Уравнения Максвелла

Электромагнитная теория Максвелла (60-е годы 19 века)

Электромагнитная теория Максвелла

- Это последовательная теория единого электромагнитного поля, создаваемого произвольной системой зарядов и токов.

- В ней решается *основная задача электродинамики*: по заданному распределению зарядов и токов отыскиваются основные характеристики создаваемых ими электрических и магнитных полей.

Электромагнитная теория Максвелла

- *феноменологическая теория*, т.е. она не рассматривает механизмы явлений, происходящих в среде и вызывающих появление полей.

- Электрические и магнитные свойства среды характеризуются:

ε – диэлектрической проницаемостью (**диэлектри́ческая проница́емость** среды — физическая величина, характеризующая свойства изолирующей (диэлектрической) среды и показывающая зависимость электрической индукции от напряженности электрического поля)

$$D = \varepsilon\varepsilon_0 E$$

Электромагнитная теория Максвелла

μ – магнитной проницаемостью

(**магнитная проницаемость** — физическая величина, коэффициент, зависящий от свойств среды и характеризующий связь между магнитной индукцией и напряженностью магнитного поля в веществе)

$$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$$

σ – удельной электрической проводимостью

(**электри́ческая проводи́мость** — способность тела проводить электрический ток)

$$\vec{j} = \sigma\vec{E}$$

Электромагнитная теория Максвелла

рассматривает *макроскопические поля*,

(а) которые создаются макроскопическими зарядами и токами, сосредоточенными в объемах много больших, чем объем атомов и молекул,

(б) расстояние от источников полей до рассматриваемой точки пространства много больше размеров атомов и молекул,

(в) период изменения переменных электрических и магнитных полей много больше периода внутримолекулярных процессов.

Электромагнитная теория Максвелла

Теория Максвелла –

теория *близкодействия*, т.е. электромагнитное взаимодействие происходит с конечной скоростью, равной скорости света c.

Основные положения теории Максвелла

1. Закон Фарадея

$$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S},$$

$$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = \mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Фарадей: переменное магнитное поле создает в <u>проводящем</u> замкнутом контуре ***вихревое электрическое поле***.

Максвелл: *Циркуляция вектора напряженности электрического поля <u>по произвольному замкнутому контуру L</u> равна взятой с обратным знаком скорости изменения магнитного потока сквозь поверхность, натянутую на контур.*

Основные положения теории Максвелла

2. Закон полного тока

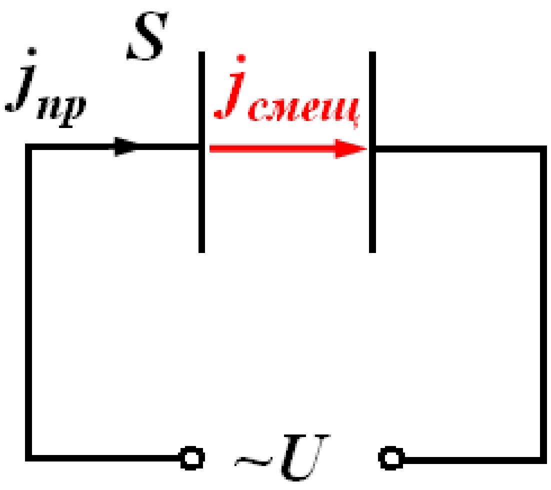
$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \mu_0\left(I_{макро} + I_{микро}\right)$$

где $I_{макро}$ – результирующий макроток,

$I_{микро}$ – микроток сквозь поверхность, натянутую на замкнутый контур L.

Ток смещения

Максвелл предположил, что переменное электрическое поле подобно электрическому току порождает магнитное поле, и ввел понятие ***ток смещения***.



Постулируется: линии тока проводимости на границах обкладок конденсатора переходят в линии тока смещения.

Ток смещения

$$j_{пр} = j_{см} \qquad (1)$$

$$j_{пр} = \frac{I}{S} \qquad (2)$$

$$I = \frac{dq}{dt} \qquad (3)$$

Уравнение (3) показывает, как увеличивается заряд *q* на обкладках конденсатора *C*.

Заряд на обкладках конденсатора

$$q = \sigma S \qquad (4)$$

Ток смещения

Ток в цепи $$I = S\frac{d\sigma}{dt} \qquad (5)$$

С учетом уравнений (1), (2) получаем:

$$j_{см} = \frac{I}{S} = \frac{d\sigma}{dt} \qquad (6)$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad (7)$$

$$D = \varepsilon_0 E = \sigma \quad (8)$$

$$j_{см} = \frac{dD}{dt} \qquad (9)$$

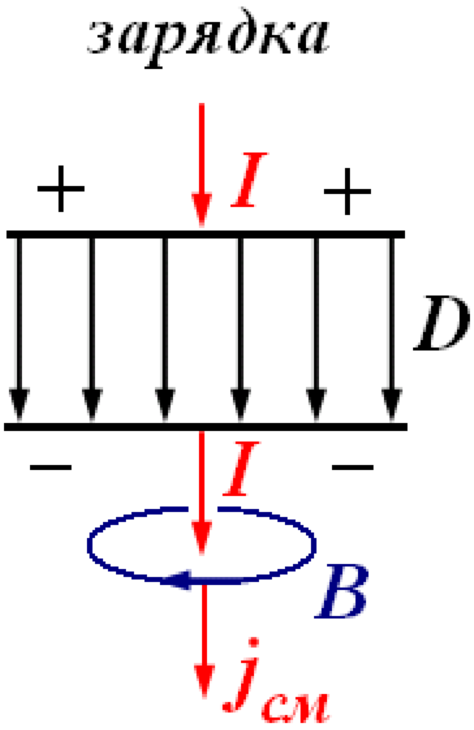
$$\vec{j}_{см} = \frac{d\vec{D}}{dt} \qquad (10)$$

D - электрическая индукция.

Ток смещения

$$\vec{j}_{см} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad \vec{D} \uparrow\uparrow \vec{E}$$

- Конденсатор заряжается.



Электрическое поле возрастает,

вектор D увеличивается,

$$\vec{j}_{см} \uparrow\uparrow \vec{D}$$

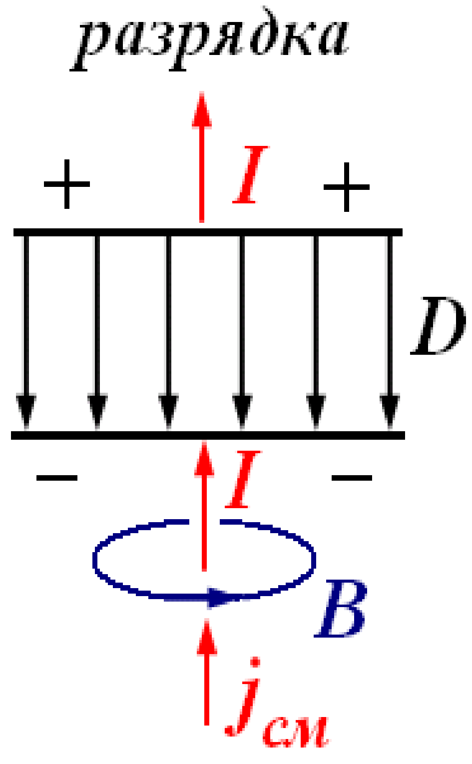
Ток смещения

- Конденсатор разряжается.

Электрическое поле убывает,

вектор D уменьшается,

$$\vec{j}_{см} \uparrow\downarrow \vec{D}.$$



$$I_{смещ} = \int_S \vec{j}_{смещ} d\vec{S} =$$

$$= \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S} = \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{D} d\vec{S} = \frac{\partial \Phi_D}{\partial t}$$

Ток смещения

Закон полного тока: $$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left(j_{полн} \right) d\vec{S}.$$

В нашем случае:

$$j_{полн} = j_{пр} + j_{см} = j + \frac{\partial D}{\partial t}$$

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}$$

Циркуляция вектора H напряженности магнитного поля по произвольному замкнутому контуру L равна алгебраической сумме макротоков и тока смещения сквозь поверхность, натянутую на этот контур.

Ток смещения

$$D = \varepsilon_0 E + P$$

$$j_{см} = \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial t}$$

$\dfrac{\partial P}{\partial t}$ - токи поляризации (из-за смещения связанных зарядов);

$\varepsilon_0 \dfrac{\partial E}{\partial t}$ - «истинная» часть тока смещения, которая не связана с движением зарядов, а обусловлена лишь изменением электрического поля.

Ток смещения

Максвелл приписал току смещения только одно общее свойство с током проводимости – *способность создавать в окружающем пространстве магнитное поле*.

Следствия:

1) ток смещения не является направленным движением заряженных частиц, поэтому может существовать в вакууме,
2) протекание тока смещения не приводит к выделению тепла, поэтому проводник не нагревается.

Система уравнений Максвелла в интегральной форме

1. $$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}.$$

2. $$\oint_S \vec{B}d\vec{S} = 0.$$

3. $$\oint_L \vec{H}d\vec{l} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}.$$

4. $$\oint_S \vec{D}d\vec{S} = \int_V \rho dV.$$

Уравнение Максвелла

$$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$$

1. Циркуляция вектора напряженности E вихревого электрического поля по замкнутому контуру равна скорости изменения магнитного потока через площадь контура, взятую с обратным знаком.

- закон электромагнитной индукции,
- первое положение теории Максвелла.
- Физический смысл: Всякое изменение магнитного поля во времени вызывает появление вихревого электрического поля.

Уравнение Максвелла

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$$

2. Поток вектора индукции B магнитного поля через любую замкнутую поверхность равен нулю.

- силовые линии магнитного поля замкнуты.
- Физический смысл: Источники магнитного поля в виде магнитных зарядов в природе отсутствуют.

Уравнение Максвелла

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}$$

3. Циркуляция вектора напряженности H магнитного поля по замкнутому контуру равна алгебраической сумме токов, пронизывающих этот контур.

Закон полного тока.

Физический смысл: магнитное поле порождается не только током проводимости, но и переменным электрическим полем.

Уравнение Максвелла

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV$$

4. Поток вектора электрической индукции D через любую замкнутую поверхность равен сумме свободных зарядов, охватываемых этой поверхностью.

Теорема Гаусса для вектора D.

- Физический смысл: Источником электрического поля является электрический заряд.

Система уравнений Максвелла в дифференциальной форме

Переход к уравнениям Максвелла в дифференциальной форме осуществляется на основании

теоремы Остроградского-Гаусса:

$$\oint\limits_S \vec{A}d\vec{S} = \int\limits_V div\vec{A}dV,$$

теоремы Стокса:

$$\oint\limits_L \vec{A}d\vec{l} = \int\limits_S rot\vec{A}d\vec{S}.$$

Система уравнений Максвелла
в дифференциальной форме

Ротор вектора A определяется в декартовой системе координат следующим выражением:

$$rot\,\vec{A} = \vec{i}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} &\oint_L \vec{E}\,d\vec{l} = \int_S rot\,\vec{E}\,d\vec{S} \\ &\oint_L \vec{E}d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}d\vec{S} \end{aligned}\right\} \qquad \int_S rot\,\vec{E}\,d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial\,\vec{B}}{\partial t}\,d\vec{S}$$

Система уравнений Максвелла в дифференциальной форме

1. $$rot\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

2. $$div\,\vec{B} = 0$$

3. $$rot\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

4. $$div\vec{D} = \rho$$

Из уравнений Максвелла следует

1) Электрическое и магнитное поля взаимосвязаны, т.е. в общем случае электрическое и магнитное поля не могут существовать независимо друг от друга. Следовательно, существует единое *электромагнитное поле*.

2) Уравнения Максвелла являются инвариантными относительно преобразований Лоренца, т.е. их вид не меняется при переходе от одной ИСО к другой.

Из уравнений Максвелла следует

3) В общем случае уравнения Максвелла не симметричны.

$$rot\vec{E} = \underbrace{-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}}_{\text{одно слагаемое}}; \qquad rot\vec{H} = \underbrace{\vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}}_{\text{два слагаемых}}.$$

$$div\vec{D} = \rho; \qquad div\vec{B} = 0.$$

Из уравнений Максвелла следует

Если среда не содержит свободных зарядов ($\rho = 0$) и в ней нет токов проводимости ($j = 0$), то

уравнения становятся более симметричными

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \qquad rot\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

$$div\vec{B} = 0; \qquad div\vec{D} = 0.$$

и отличаются только знаками первых двух уравнений

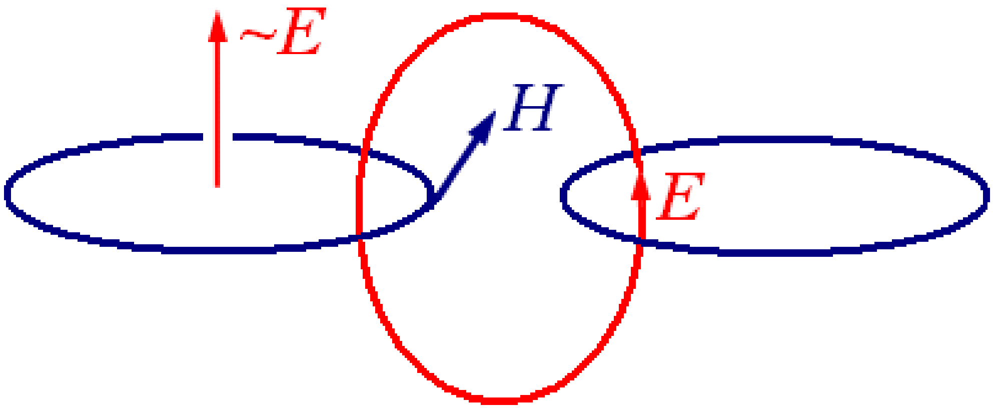
Из уравнений Максвелла следует

Различие в знаках правых частей уравнений Максвелла является необходимым условием существования устойчивого электромагнитного поля.

Если бы знаки при $\partial B/\partial t$ и $\partial D/\partial t$ были одинаковы, то бесконечно малое увеличение одного из полей привело бы к неограниченному возрастанию обоих полей, и наоборот.

Из уравнений Максвелла следует

4) Возникновение электромагнитной волны.



Материальные уравнения Максвелла

Для расчета полей в среде система уравнений Максвелла дополняется уравнениями, которые характеризуют электрические и магнитные свойства среды – *материальные уравнения Максвелла*:

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E},$$

$$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H},$$

$$\vec{j} = \sigma\left(\vec{E}_{кул} + \vec{E}_i\right).$$

Система статических уравнений Максвелла

В случае, когда вектора D и B не зависят от времени, т.е. D и $B = const$, система уравнений Максвелла принимает вид:

$$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = 0, \qquad rot\vec{E} = 0.$$

$$\oint_S \vec{B}d\vec{S} = 0, \qquad div\vec{B} = 0.$$

$$\oint_L \vec{H}d\vec{l} = \int_S \vec{j}d\vec{S}, \qquad rot\vec{H} = \vec{j}.$$

$$\oint_S \vec{D}d\vec{S} = \int_V \rho dV, \qquad div\vec{D} = \rho.$$

Значение теории Максвелла

1. Показывает, что электромагнитное поле – это совокупность взаимосвязанных электрических и магнитных полей.
2. Предсказывает существование электромагнитных волн, распространяющихся от точки к точке с конечной скоростью.
3. Показывает, что световые волны являются электромагнитными волнами.
4. Связывает воедино электричество, магнетизм и оптику.