

ДИНАМИКА АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Вращение вокруг неподвижной оси

Вращение вокруг неподвижной оси

Движение материальной точки
по окружности

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] = m[\vec{r}, \vec{v}] = mr^2 \vec{\omega}$$

$$\vec{L} = I \vec{\omega}$$

Момент инерции МТ

$$I = mr^2$$

Уравнение динамики
вращ. движения МТ

$$\frac{d(I \vec{\omega})}{dt} = \vec{M}$$

$$I \vec{\varepsilon} = \vec{M}$$

Вращение твердого тела вокруг
неподвижной оси z

$$L_z = \omega \sum_i m_i r_i^2$$

$$L_z = I_z \omega$$

Момент инерции АТТ (системы МТ)

$$I_z = \int r^2 dm$$

$$I_z = \sum_i m_i r_i^2$$

Уравнение динамики вращения
АТТ вокруг неподвижной оси z

$$\frac{d(I_z \omega)}{dt} = M_z$$

$$I_z \varepsilon = M_z$$

Вращение вокруг неподвижной оси

$$I_z \varepsilon = M_z$$

Момент инерции – мера инертности тела при вращательном движении.

$$I_z = \int r^2 dm$$

Момент инерции АТТ зависит от:

- массы тела;
- формы и размеров тела;
- распределения массы относительно оси вращения, в частности, выбора оси вращения.

При переносе **оси вращения** или **частей тела** момент инерции **изменяется**.

Вращение вокруг неподвижной оси

Кинетическая энергия вращающегося АТТ вокруг неподвижной оси:

$$K = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \omega^2 r_i^2$$

$$K = \frac{I_z \omega^2}{2} = \frac{L_z^2}{2I_z}$$

Вращение вокруг неподвижной оси

Работа внешних сил при вращении АТТ вокруг неподвижной оси:

$$\delta A = (\vec{F}, d\vec{r}) = F_{\tau} ds = F_{\tau} r d\varphi = M_z d\varphi$$

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z d\varphi$$

$$\delta A = M_z d\varphi = I_z \frac{d\omega}{dt} \omega dt = I_z \omega d\omega$$

$$A_{12} = \frac{I_z \omega_2^2}{2} - \frac{I_z \omega_1^2}{2}$$

Вращение вокруг неподвижной оси

Поступательное движение	Вращательное движение
Масса m	Момент инерции I
Скорость $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$	Угловая скорость $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$
Ускорение $\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$	Угловое ускорение $\vec{\varepsilon} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}$
Сила \vec{F}	Момент силы \vec{M}
Импульс $\vec{p} = m\vec{v}$	Момент импульса $\vec{L} = I\vec{\omega}$
Основное уравнение динамики $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	Основное уравнение динамики $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$
Работа $dA = F_s dS$	Работа $dA = M_z d\varphi$
Кинетическая энергия $\frac{mv^2}{2}$	Кинетическая энергия $\frac{I\omega^2}{2}$

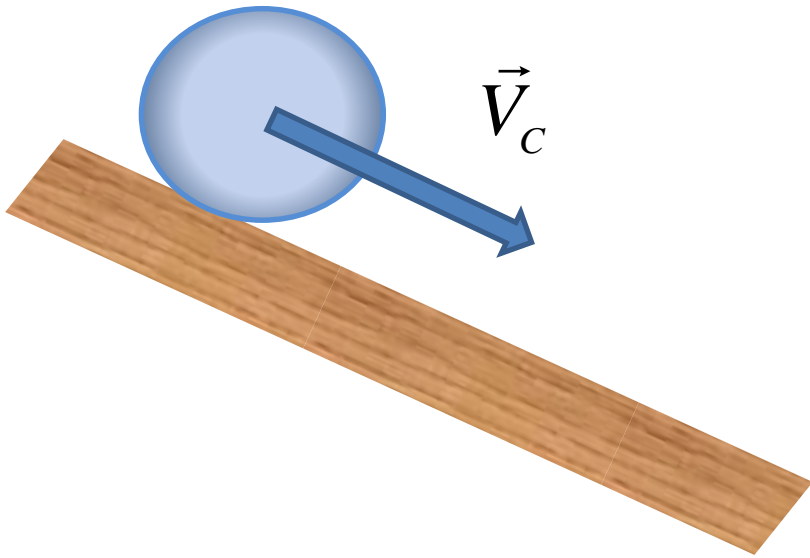
ДИНАМИКА АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Плоское движение твердого тела

Плоское движение твердого тела

Кинетическая энергия при плоском движении АТТ :

$$K = \frac{I_c \omega^2}{2} + \frac{m V_c^2}{2}$$



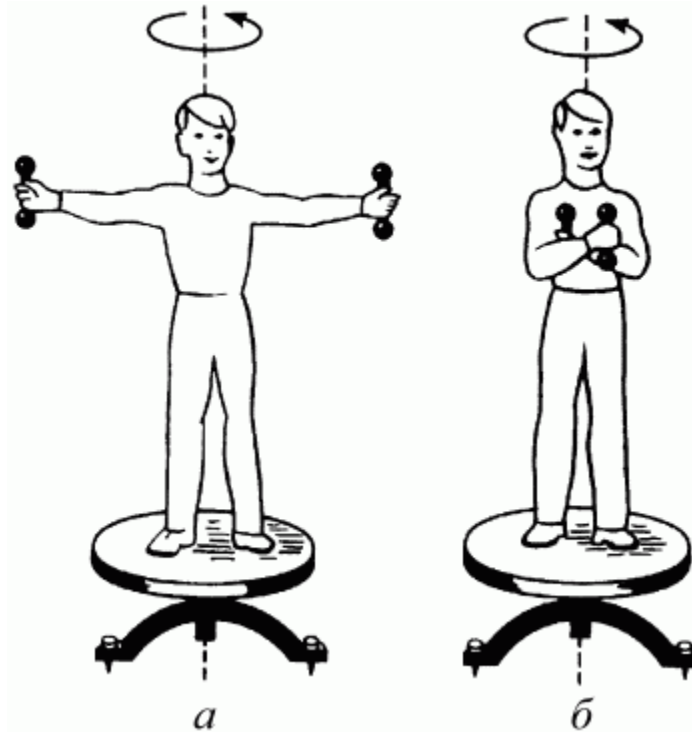
ДИНАМИКА АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Примеры сохранения момента
импульса

Пример сохранения момента импульса

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{\text{внеш}} \quad \vec{M}_{\text{внеш}} = 0 \rightarrow \vec{L} = I\vec{\omega} = \text{const} \rightarrow I_1\omega_1 = I_2\omega_2$$

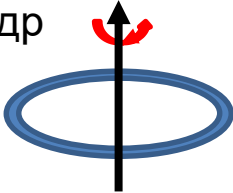
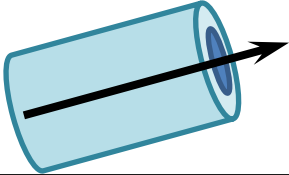
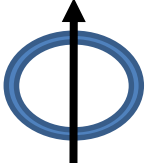
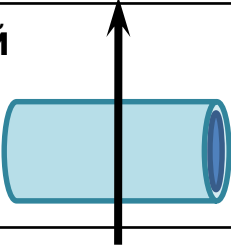

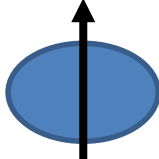
Скамья Жуковского



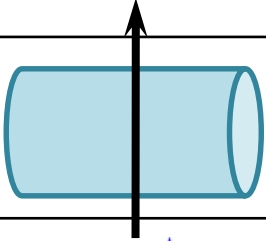
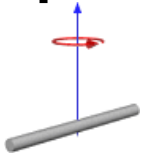
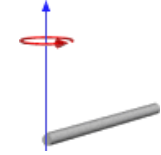
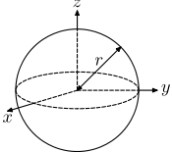
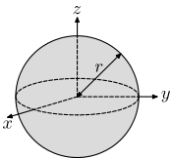
ДИНАМИКА АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Расчет момента инерции

Момент инерции

Тело	Положение оси	Момент инерции
Полый тонкостенный цилиндр (кольцо) радиуса R и массы m 	Ось цилиндра (кольца)	$I = mR^2$
Момент инерции толстостенного цилиндра относительно оси симметрии		$I = \frac{1}{2} m(R_1^2 + R_2^2)$
Тонкостенное кольцо радиуса R и массы m 	Ось лежит в плоскости кольца и проходит через его середину	$I = \frac{mR^2}{2}$
Полый тонкостенный цилиндр длины l , радиуса R и массы m 	Ось перпендикулярна к цилиндру и проходит через его середину	$I = \frac{mR^2}{2} + \frac{ml^2}{12}$
Сплошной цилиндр (диск) радиуса R и массы m 	Ось цилиндра	$I = \frac{mR^2}{2}$
Сплошной диск радиуса R и массы m 	Ось лежит в плоскости диска и проходит через его середину	$I = \frac{mR^2}{4}$

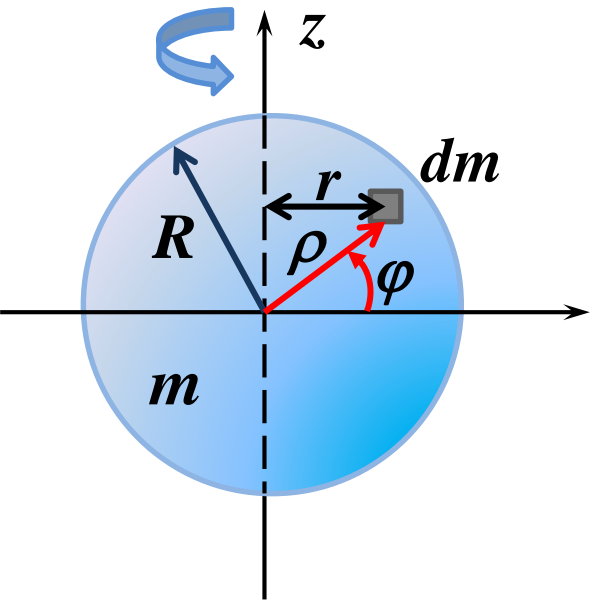
Момент инерции

Тело	Положение оси	Момент инерции
<p>Сплошной цилиндр длины l, радиуса R и массы m</p> 	<p>Ось перпендикулярна к цилиндру и проходит через его середину</p>	$I = \frac{mR^2}{4} + \frac{ml^2}{12}$
<p>Прямой тонкий стержень длины l и массы m</p> 	<p>Ось перпендикулярна к стержню и проходит через его середину</p>	$I = \frac{ml^2}{12}$
<p>Прямой тонкий стержень длины l и массы m</p> 	<p>Ось перпендикулярна к стержню и проходит через его конец</p>	$I = \frac{ml^2}{3}$
<p>Тонкостенная сфера радиуса R и массы m</p> 	<p>Ось проходит через центр сферы</p>	$I = \frac{2mR^2}{3}$
<p>Шар радиуса R и массы m</p> 	<p>Ось проходит через центр шара</p>	$I = \frac{2}{5}mR^2$

Момент инерции

Сплошной диск радиуса R и массы m

Ось лежит в плоскости диска и проходит через его середину



$$I_z = \int r^2 dm$$

$$dm = d(\rho_0 \cdot V)$$

$$dm = \rho_0 dV$$

$$dV = d(h \cdot S)$$

$$dV = h dS$$

$$I_z = \rho_0 h \int r^2 dS$$

$$dS = dx dy$$

$$dS = \rho d\rho d\varphi$$

$$r = \rho \cos \varphi$$

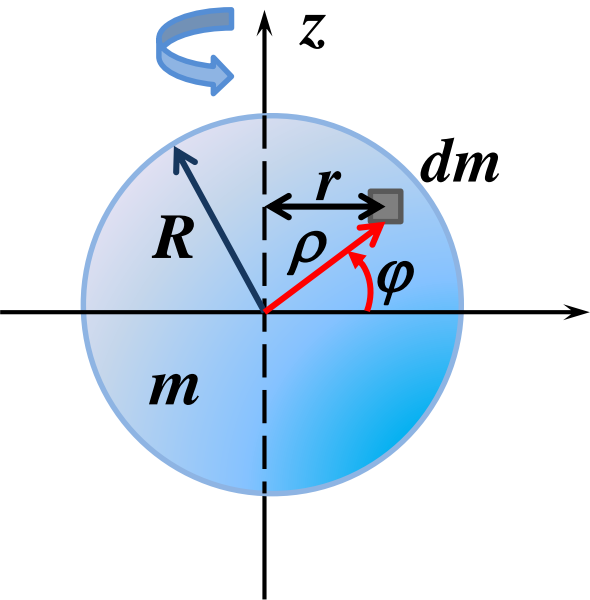
$$I_z = \rho_0 h \iint (\rho \cos \varphi)^2 \rho d\rho d\varphi$$

$$I_z = \rho_0 h \int_0^R \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi$$

Момент инерции

Сплошной диск радиуса R и массы m

Ось лежит в плоскости диска и проходит через его середину



$$I_z = \rho_0 h \frac{R^4}{4} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} d\varphi$$

$$I_z = \rho_0 h \frac{R^4}{4} \left(\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\varphi + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos 2\varphi d\varphi \right)$$

$$I_z = \rho_0 h \frac{R^4}{4} \left(\pi + \frac{\sin 2\varphi}{4} \Big|_0^{2\pi} \right)$$

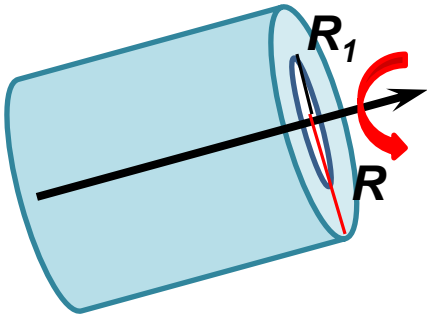
$$I_z = \rho_0 h \frac{R^4}{4} \pi$$

$$V = \pi R^2 h$$

$$I_z = \frac{mR^2}{4}$$

Момент инерции

Момент инерции толстостенного цилиндра относительно
оси симметрии

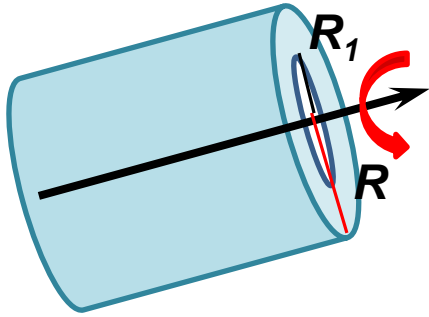


$$dm = \rho dV = \rho \cdot 2\pi r h dr$$

$$dI = r^2 dm = 2\pi \rho h r^3 dr$$

Момент инерции

Момент инерции толстостенного цилиндра относительно
оси симметрии



$$I = \int_{R_1}^R dI = 2\pi\rho h \int_{R_1}^R r^3 dr = 2\pi\rho h \left. \frac{r^4}{4} \right|_{R_1}^R =$$

$$= \frac{1}{2} \pi\rho h (R^4 - R_1^4) = \frac{1}{2} \pi\rho h (R^2 - R_1^2) \cdot (R^2 + R_1^2)$$

$$V = \pi(R^2 - R_1^2)h$$

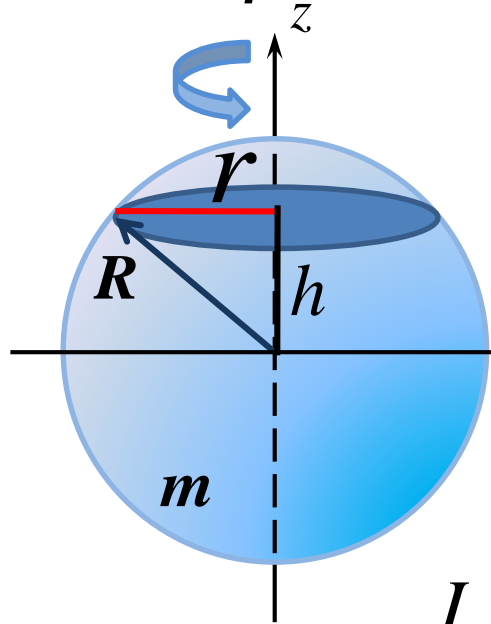
$$I = \frac{1}{2} m (R^2 + R_1^2)$$

$$m = \rho V = \pi\rho(R^2 - R_1^2)h$$

Момент инерции

Шар радиуса R и массы m

Ось проходит через центр шара



$$r = \sqrt{R^2 - h^2}$$

$$dm = \rho dV = \rho \cdot \pi r^2 dh$$

$$dI = \frac{1}{2} r^2 dm = \frac{1}{2} \pi \rho r^4 dh = \frac{1}{2} \pi \rho (R^2 - h^2)^2 dh =$$

$$= \frac{1}{2} \pi \rho (R^4 - 2R^2 h^2 + h^4) dh$$

$$I_z = \int_{-R}^R dI_z = 2 \int_0^R dI_z = \pi \rho \int_0^R (R^4 - 2R^2 h^2 + h^4) dh =$$

$$= \pi \rho \left(R^4 h - \frac{2}{3} R^2 h^3 + \frac{1}{5} h^5 \right) \Big|_0^R = \pi \rho \left(R^5 - \frac{2}{3} R^5 + \frac{1}{5} R^5 \right) = \frac{8}{15} \pi \rho R^5 =$$

$$= \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \rho \right) \cdot \frac{2}{5} R^2 = \frac{2}{5} m R^2$$

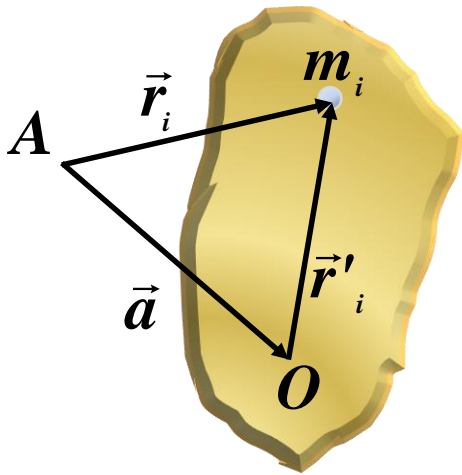
$$I_z = \frac{2}{5} m R^2$$

Момент инерции

Теорема Гюйгенса – Штейнера: Момент инерции I твердого тела относительно произвольной оси равен сумме момента инерции I_c этого тела относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела, и произведения массы m тела на квадрат расстояния a между осями.

$$I = I_c + ma^2$$

Доказательство:



$$I = \sum_i m_i r_i^2 = \sum_i m_i (\vec{r}'_i + \vec{a})^2$$

$$I = \sum_i m_i r_i'^2 + 2(\vec{a}, \sum_i m_i \vec{r}'_i) + a^2 \sum_i m_i$$

$$I = I_o + 2(\vec{a}, \sum_i m_i \vec{r}'_i) + ma^2$$

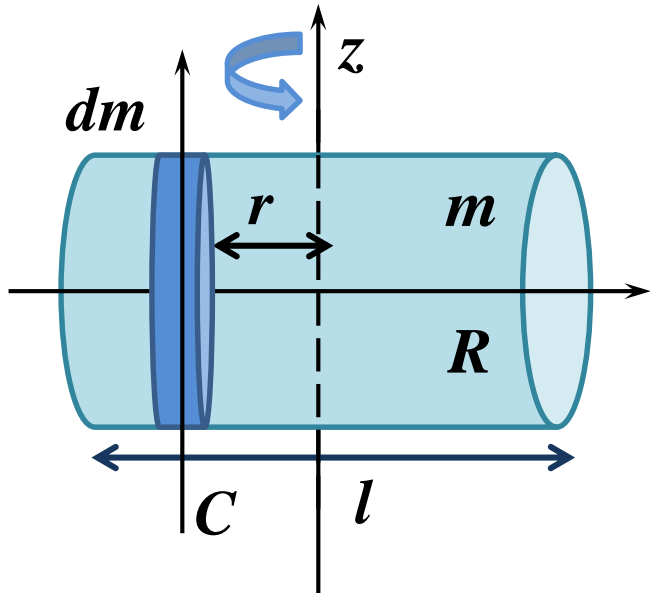
$$\vec{R}_{co} = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{r}'_i \quad \sum_i m_i \vec{r}'_i = m \vec{R}_{co}$$

$$I = I_o + 2m(\vec{a}, \vec{R}_{co}) + ma^2$$

Момент инерции

Сплошной цилиндр длины l , радиуса R и массы m

Ось перпендикулярна к цилиндру и проходит через его середину



$$dI_z = dI_C + r^2 dm \quad dI_C = dm \frac{R^2}{4}$$

$$I_z = \frac{R^2}{4} \int dm + \int r^2 dm$$

$$I_z = \frac{mR^2}{4} + \rho_0 \int r^2 dV$$

$$I_z = \frac{mR^2}{4} + \rho_0 \int_{-l/2}^{l/2} r^2 dr \cdot S$$

$$I_z = \frac{mR^2}{4} + \rho_0 S \frac{l^3}{12}$$

$$I_z = \frac{mR^2}{4} + \frac{ml^2}{12}$$