ДИНАМИКА

Центр масс

Центр масс

Центр масс (инерции) системы материальных точек – воображаемая точка, положение которой определяется радиус-вектором

$$\vec{r}_c = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \qquad \vec{r}_c = \frac{1}{M}\int_V \rho(\vec{r})\vec{r}\,dV$$

Скорость центра масс

$$\vec{\mathrm{v}}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{\mathrm{v}}_i$$

Импульс центра масс

$$\vec{p}_c = M\vec{\mathrm{v}}_c = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{\mathrm{v}}_i$$

Ускорение центра масс

$$\vec{a}_c = \frac{d\vec{v}_c}{dt} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i$$

Центр масс

$$\vec{a}_c = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i$$

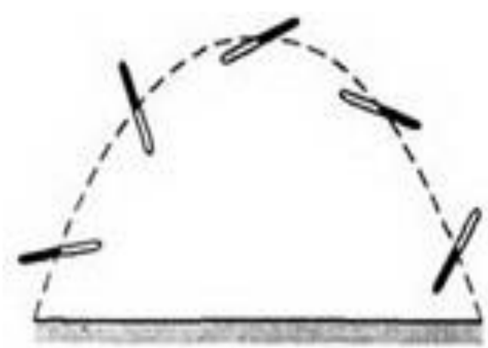
$$\vec{F}_i = m_i \vec{a}_i$$

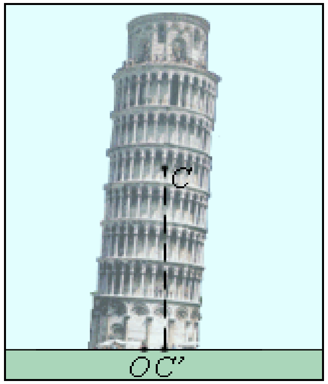
$$\vec{a}_c = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{\,ext\,*)}$$

*) *Следует уточнить, что* формула имеет смысл только *для однородного и стационарного поля сил т.е.* $F_i \neq F_i(r,t)$

Теорема о движении центра масс

Центр масс системы движется таким образом, как будто вся масса системы сосредоточена в одной точке и все силы, действующие на отдельные частицы системы, приложены к этой точке – центру масс.





Центр масс

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{\,ext} = 0 \qquad \vec{a}_c = \frac{d\vec{v}_c}{dt} = 0 \qquad \vec{v}_c = const$$

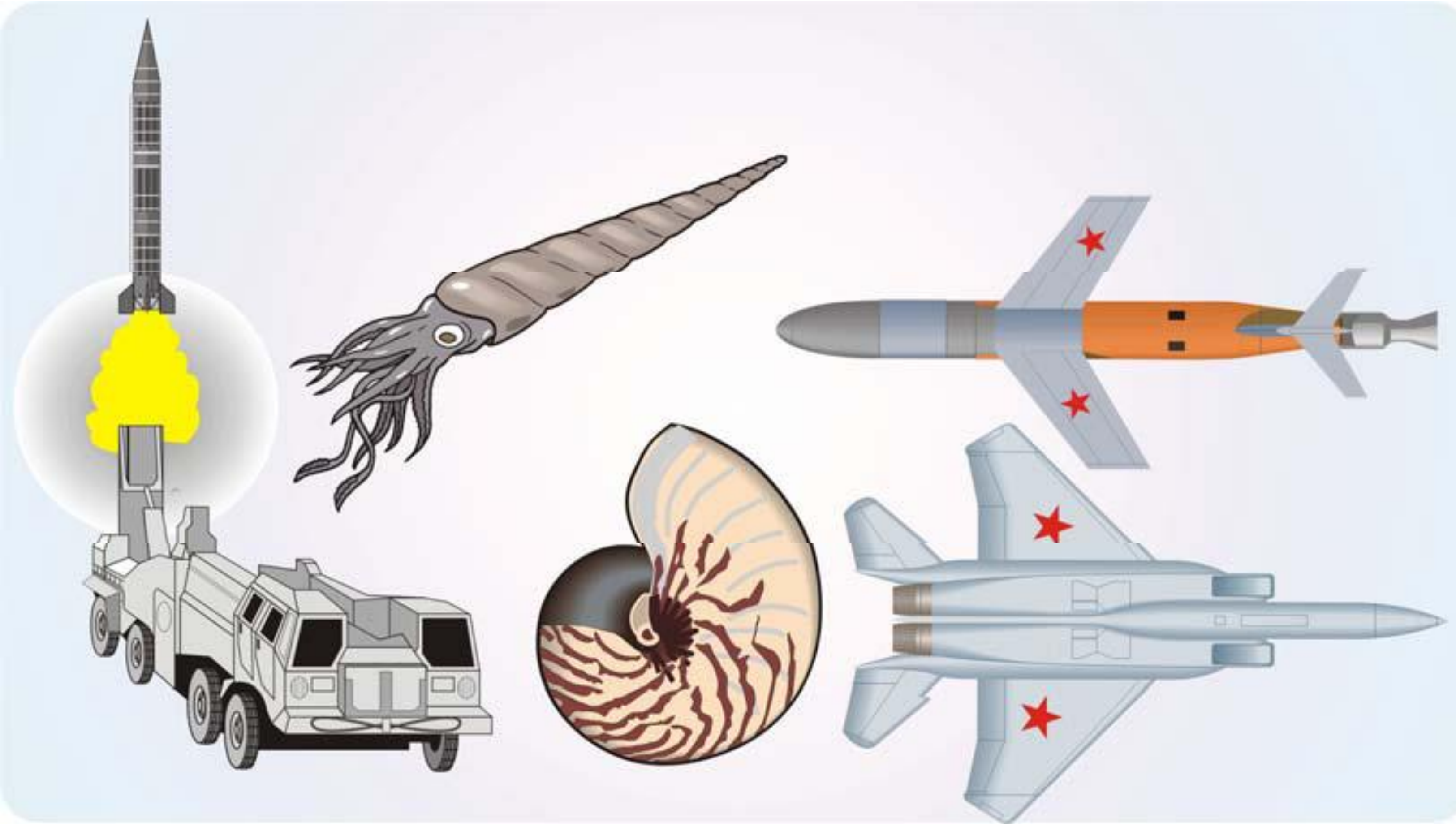
Систему отсчета, жестко связанную с центром масс и перемещающуюся поступательно по отношению к инерциальным системам, называют ***системой центра масс*** или, кратко, ***Ц-системой***.

$$\boxed{\vec{p}_c = M\vec{v}_c = 0}$$

ДИНАМИКА

Движение тела переменной массы

Движение тела переменной массы



Движение тела переменной массы

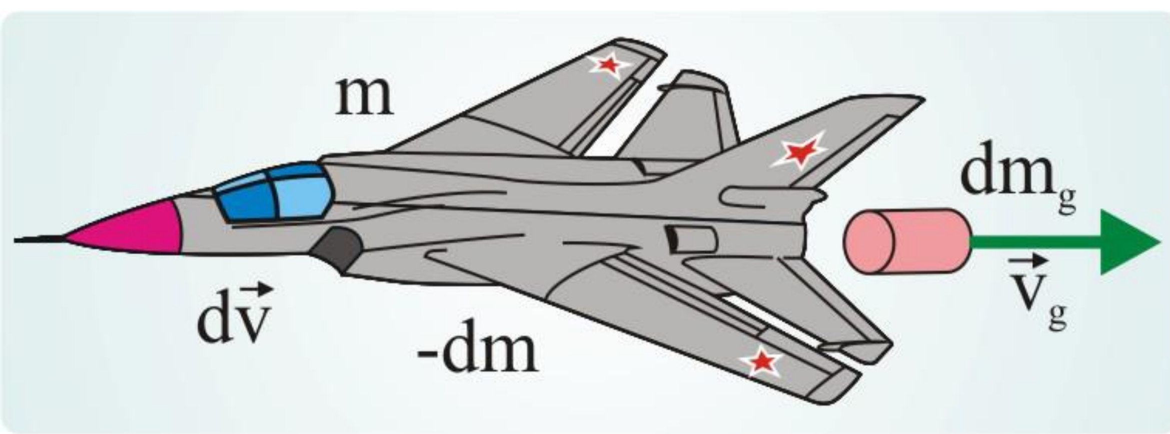
$$d\vec{p} = \vec{F}_{ext} dt$$

$$d\vec{p} = [(m - dm)(\vec{\upsilon} + d\vec{\upsilon}) + dm(\vec{\upsilon} + d\vec{\upsilon} + \vec{u})] - m\vec{\upsilon}$$

$$d\vec{p} = m d\vec{\upsilon} - \vec{u} dm$$

$$\boxed{m(t)\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{ext} + \vec{u}\frac{dm(t)}{dt}}$$

уравнение динамики тела
с переменной массой
(*уравнение Мещерского*)
1902 год



Движение тела переменной массы

Частный случай

$$\vec{F}_{ext} = 0 \rightarrow m(t)d\vec{v} = \vec{u}dm(t) \rightarrow m(t)dv = -udm(t)$$

$$dv = -u\frac{dm(t)}{m(t)}$$

а. $u = const$

б. $m(t=0) = m_0$

$$\int_0^v dv = -u\int_{m_0}^m \frac{dm(t)}{m(t)}$$

$$v = -u\ln\frac{m}{m_0}$$

$$\boxed{v = u\ln\frac{m_0}{m}}$$

Уравнение реактивного движения

$$\boxed{\frac{m_0}{m} = e^{\frac{v}{u}}}$$

Формула Циолковского

ДИНАМИКА

Энергия и работа

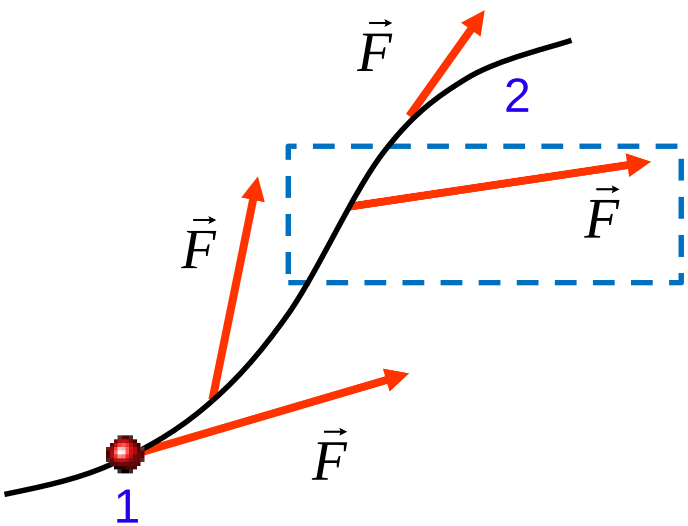
Энергия и работа

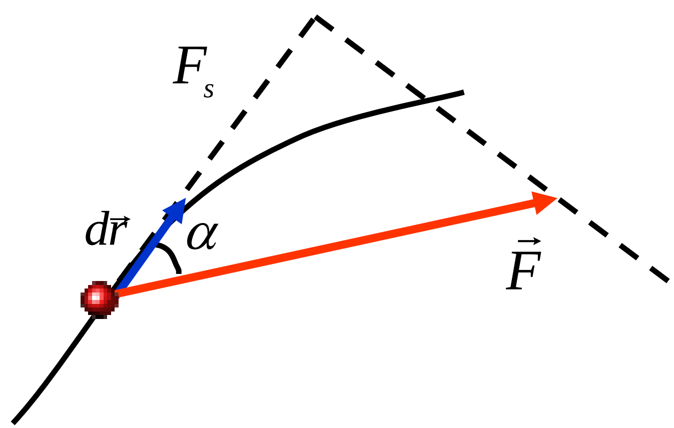
***Энергия** – скалярная физическая величина, являющаяся мерой движения и взаимодействия всех видов материи.*

С различными формами движения материи связывают различные формы энергии: механическую, тепловую, электромагнитную, ядерную и т. д.

Изменение энергии тел связано с силами, действующими со стороны других тел или полей. Мерой такого воздействия является работа.

***Работа** – это количественная характеристика (мера) изменения энергии при движении и взаимодействии тел.*





$$\left(\vec{F}, d\vec{r}\right) = F\cos\alpha ds = F_s ds$$

Энергия и работа

Приращением величины *X называют разность конечного и начального значений этой величины:*

$$\Delta X = X_2 - X_1$$

Дифференциалом *будем называть бесконечно малое приращение какой-то величины.*

Работа является характеристикой (функцией) процесса передачи энергии, и не относятся к состоянию системы.

Количество совершенной работы зависит от способа проведения процесса обмена энергией. Работа не являются функцией состояния системы.

Бесконечно малое количество работы не является полным дифференциалом*, т. е. работа не всегда может быть представлена как бесконечно малые приращения какой-то функции состояния.*

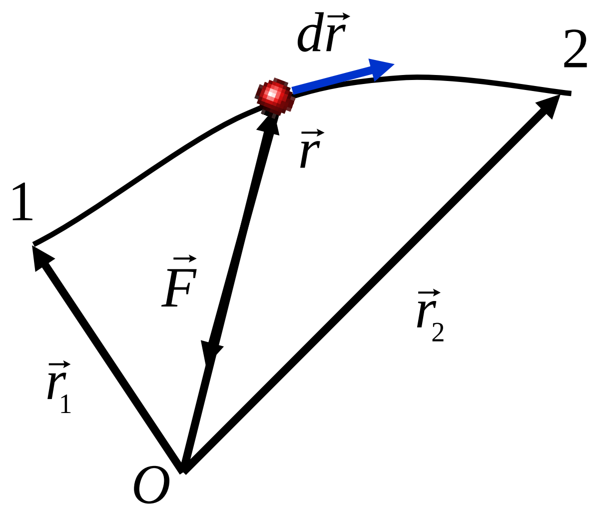
$$\boxed{\delta A = \left(\vec{F}, d\vec{r}\right) = F_s ds}$$

$$[A] = Дж$$

Энергия и работа

Мощность: $\boxed{P = \dfrac{\delta A}{dt}}$

$$P = \frac{\delta A}{dt} = \frac{(\vec F, d\vec r)}{dt} = (\vec F, \vec v) \qquad [P] = \text{Вт}$$

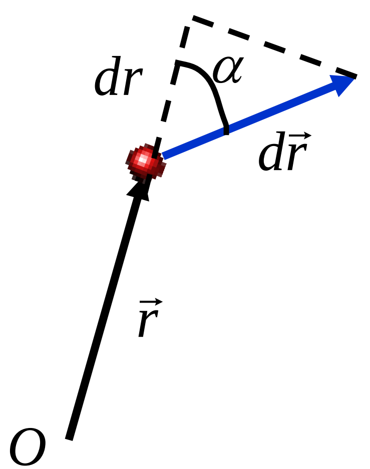


Работа упругой силы:

$$\delta A = \left(-\kappa \vec r, d\vec r\right) = -\kappa\left(\vec r, d\vec r\right)$$

$$\left(\vec r, d\vec r\right) = |\vec r|\cos\alpha\,|d\vec r|$$

$$\boxed{\cos\alpha\,|d\vec r| = dr} \qquad \boxed{\left(\vec r, d\vec r\right) = r\,dr}$$

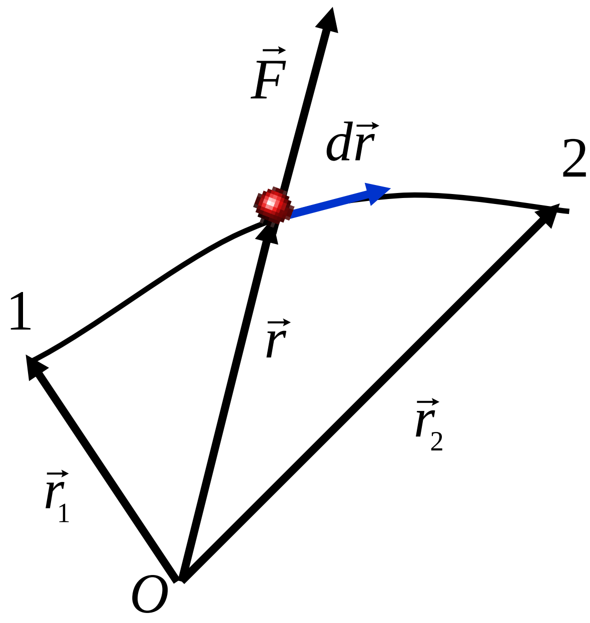


$$\delta A = -\kappa r\,dr = -d\left(\frac{\kappa r^2}{2}\right)$$

$$\boldsymbol{A_{12} = -\int_1^2 \kappa r\,dr = \frac{\kappa r_1^2}{2} - \frac{\kappa r_2^2}{2}}$$

Энергия и работа

Работа гравитационной (кулоновской) силы:



$$\vec{F} = \frac{\beta}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\beta = -Gm_1 m_2$$

$$\beta = kq_1 q_2$$

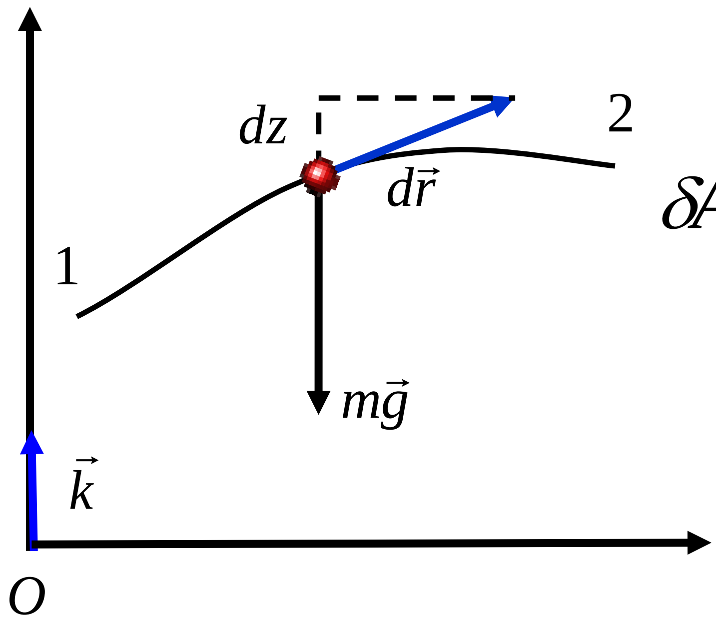
$$\delta A = \left(\frac{\beta}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}, d\vec{r} \right) = \frac{\beta}{r^3} (\vec{r}, d\vec{r}) = \frac{\beta}{r^3} r dr$$

$$\delta A = \frac{\beta}{r^2} dr = -d\left(\frac{\beta}{r} \right)$$

$$\boldsymbol{A_{12} = \int_1^2 \frac{\beta}{r^2} dr = \frac{\beta}{r_1} - \frac{\beta}{r_2}}$$

Энергия и работа

Работа однородной силы тяжести:



$$\vec{F} = -mg\vec{k}$$

$$\delta A = \left(-mg\vec{k}, d\vec{r}\right) = -mg\left(\vec{k}, d\vec{r}\right) = -mgdz$$

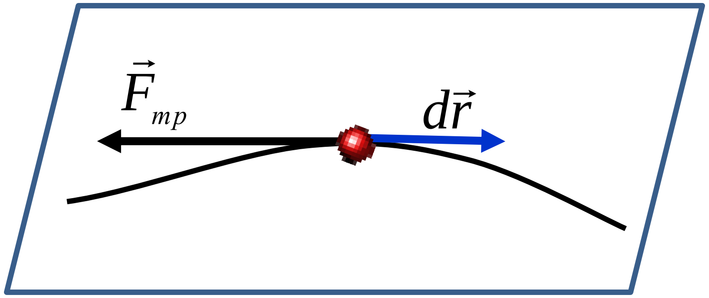
$$\delta A = -d\left(mgz\right)$$

$$A_{12} = -\int_1^2 mgdz = mg(z_1 - z_2)$$

Работа упругой, гравитационной, кулоновской сил и силы тяжести не зависит от формы траектории движения МТ, а определяется только начальным и конечным положением МТ.

Энергия и работа

Работа силы трения скольжения:



$$F_{mp} = \mu mg$$

$$A_{12} = \int_1^2 (\vec{F}, d\vec{r}) = -\int_1^2 \mu mgds = -\mu mgs_{12}$$

Работа силы трения* зависит от длины пройденного телом пути, и, следовательно, *зависит от формы траектории.

Энергия и работа

***Силы**, работа которых не зависит от формы траектории, а определяется только начальным и конечным положением тела относительно других тел, называются **консервативными**.*

***Конфигурацией системы материальных точек** называется положение системы, при котором определено положение каждой ее материальной точки.*

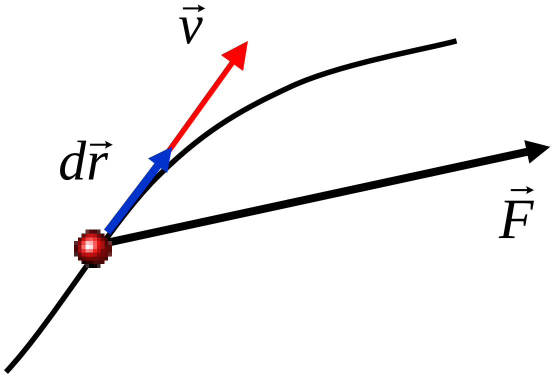
***Консервативными** называются силы, зависящие только от конфигурации системы материальных точек и суммарная работа которых не зависит от пути перехода, а определяется только начальной и конечной конфигурациями системы.*

Работа консервативных сил по замкнутому контуру равна нулю.

*Сила называется **центральной**, если она зависит только от расстояния до некоторой точки, называемой **силовым центром** или **полюсом**, и направлена к этой точке или от нее.*

Центральные силы являются консервативными.

Энергия и работа



$$\delta A = \left(\vec{F}, d\vec{r}\right) = m\left(\frac{d\vec{v}}{dt}, d\vec{r}\right) = m\left(d\vec{v}, \frac{d\vec{r}}{dt}\right)$$

$$\delta A = m\left(d\vec{v}, \vec{v}\right) = mvdv$$

$$\delta A = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) \qquad \delta A = dK$$

Кинетическая энергия – это энергия движения.

Кинетическая энергия – это мера движения тел, зависящая от скоростей их движения.

а) является функцией состояния системы

б) всегда положительна

Энергия и работа

$$\delta A = d\left(\frac{mv^2}{2}\right)$$

$$\boxed{A_{12} = K_2 - K_1 = \frac{mv_2^{\,2}}{2} - \frac{mv_1^{\,2}}{2}}$$

Приращение кинетической энергии частицы *на некотором перемещении равно* ***алгебраической сумме работ всех сил****, действующих на частицу на том же перемещении.*

Кинетическая энергия системы материальных точек *равна сумме кинетических энергий материальных точек, из которых эта система состоит, независимо от того, взаимодействуют они между собой или нет.*

Приращение кинетической энергии системы МТ *равно работе, которую совершают* ***все силы****, действующие* ***на все части*** *системы.*

Энергия и работа

Теорема Кёнига

$$K = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum \frac{m_i(\vec{\tilde{v}}_i + \vec{\mathrm{v}}_c)^2}{2} = \sum \frac{m_i \tilde{v}_i^2}{2} + (\vec{\mathrm{v}}_c, \sum m_i \vec{\tilde{v}}_i) + \sum \frac{m_i \mathrm{v}_c^2}{2}$$

$$\boxed{K = \tilde{K} + \frac{M\mathrm{v}_c^2}{2}}$$

Кинетическая энергия системы материальных точек складывается из суммарной кинетической энергии в Ц-системе и кинетической энергии, связанной с движением системы материальных точек как целого.

Кинетическая энергия системы материальных точек минимальна в Ц-системе.