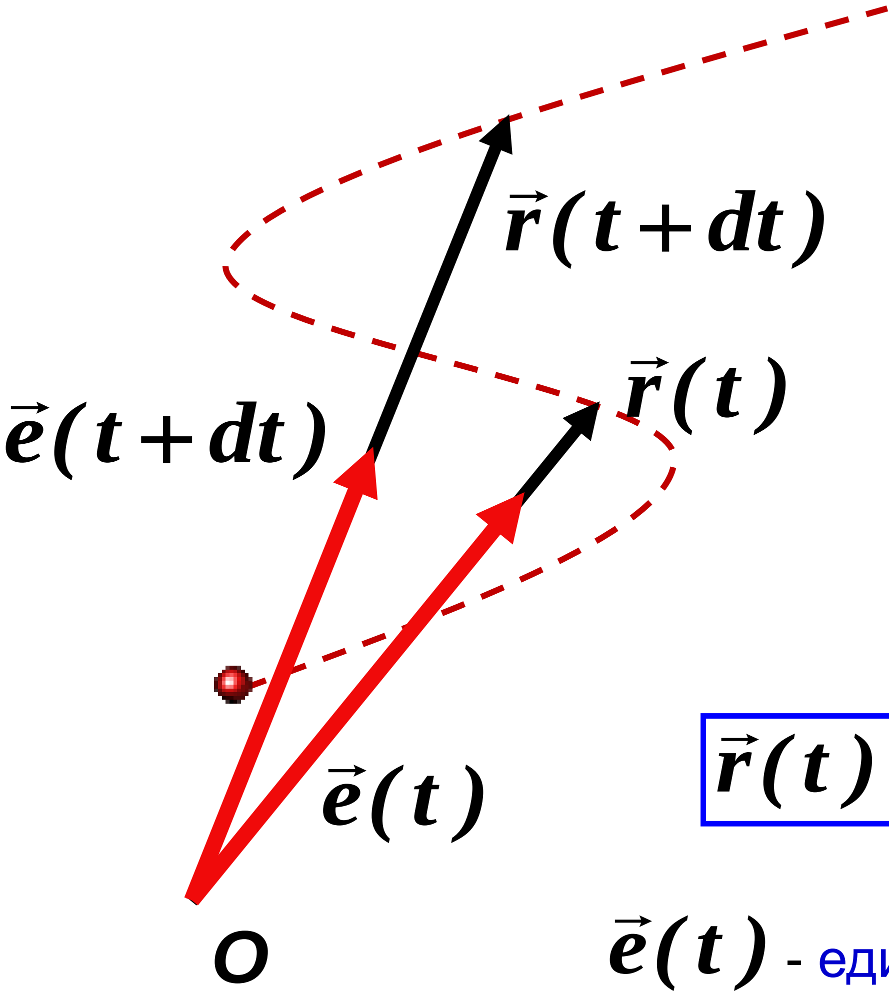
КИНЕМАТИКА

Скорость при произвольном движении

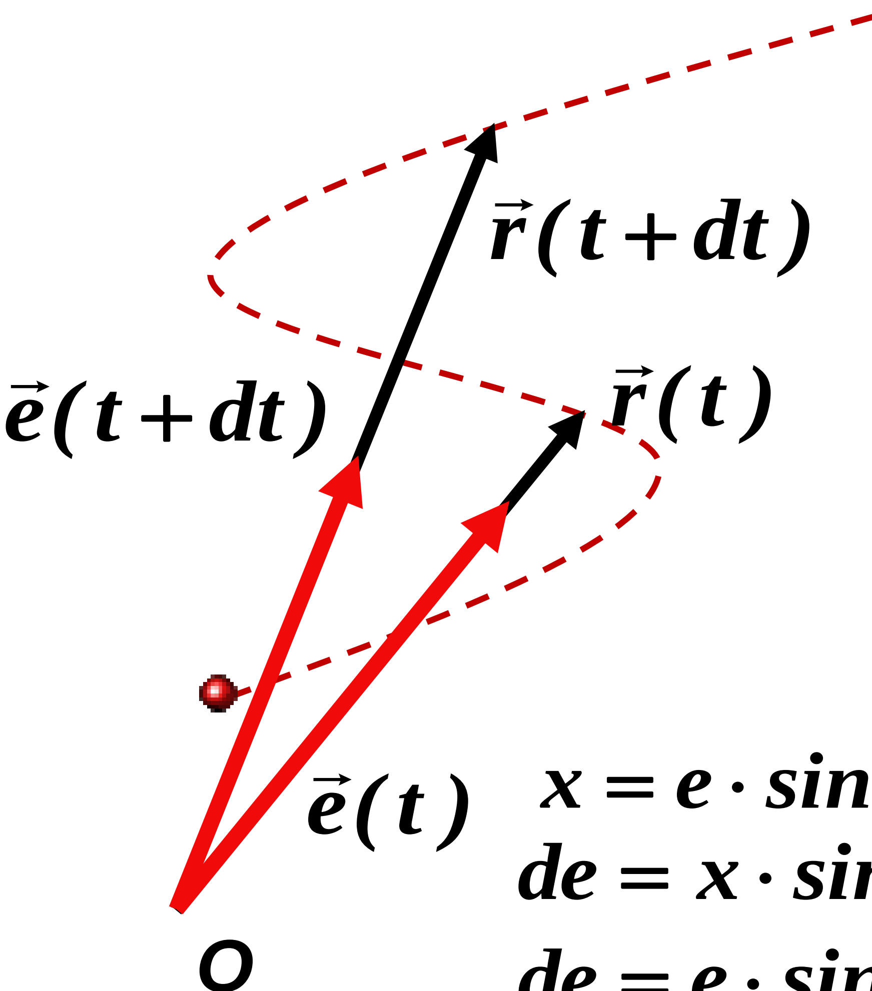
Скорость при произвольном движении

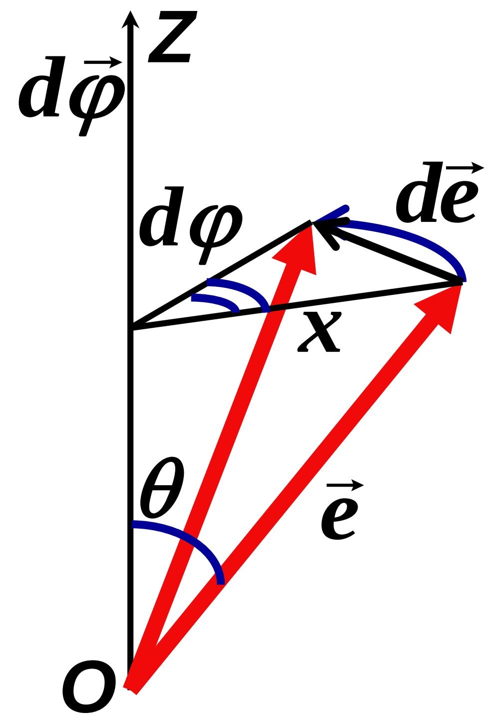


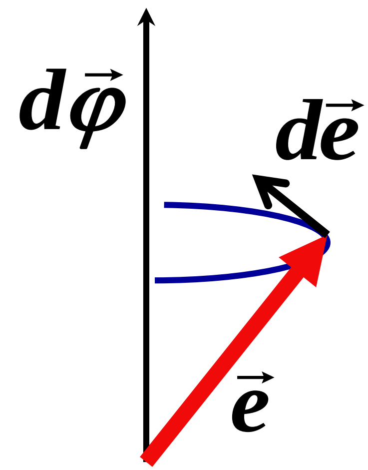
$$\boxed{\vec{r}(t) = |\vec{r}(t)| \cdot \vec{e}(t) \equiv r(t) \cdot \vec{e}(t)}$$

$\vec{e}(t)$ - единичный вектор, направленный вдоль радиус-вектора.

Скорость при произвольном движении







$$x = e \cdot \sin\theta$$

$$de = x \cdot \sin d\varphi \approx x \cdot d\varphi$$

$$de = e \cdot \sin\theta \cdot d\varphi \qquad d\vec{e}(t) = \left[d\vec{\varphi}(t), \vec{e}\right]$$

Векторное произведение

$$\left|\,[\vec{a},\vec{b}]\,\right| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$$

$$\boxed{\frac{d\vec{e}}{dt} = \left[\frac{d\vec{\varphi}}{dt}, \vec{e}\right]}$$

Скорость при произвольном движении

$$\vec{r}(t) = r(t)\cdot\vec{e}(t)$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dr(t)}{dt}\vec{e}(t) + r(t)\frac{d\vec{e}(t)}{dt}$$

$$\frac{d\vec{e}(t)}{dt} = \left[\frac{d\vec{\varphi}(t)}{dt},\vec{e}\right]$$

$$r(t)\frac{d\vec{e}(t)}{dt} = r(t)\left[\vec{\omega}(t),\vec{e}\right] = \left[\vec{\omega}(t),\vec{r}(t)\right]$$

$$\vec{v}(t) = \frac{dr(t)}{dt}\vec{e}(t) + \left[\vec{\omega}(t),\vec{r}(t)\right]$$

Скорость при произвольном движении

$$\boxed{\vec{v}(t)=\frac{dr(t)}{dt}\vec{e}(t)+\left[\vec{\omega}(t),\vec{r}(t)\right]}$$

Вектор скорости в любой точке траектории может быть представлен **в виде суммы двух** компонент:

– ***скорости, направленной вдоль радиус-вектора:***

$$\boxed{\vec{v}_r(t)=\frac{dr(t)}{dt}\vec{e}(t)}$$

(явл. характеристикой прямолинейного движения материальной точки и наз. **скоростью прямолинейного движения**)

– ***скорости , перпендикулярной радиус-вектору:***

$$\boxed{\vec{v}_n(t)=\left[\vec{\omega}(t),\vec{r}(t)\right]}$$

(явл. характеристикой вращательного движения материальной точки и наз. **скоростью вращательного движения**)

Скорость при произвольном движении

В каждой точке траектории

любое движение материальной точки можно разложить на два движения:
прямолинейное - ***вдоль радиус-вектора*** **(*со скоростью*** $\mathbf{v}_r$ **)**
и **вращательное** - ***относительно начала*** **СО (*со скоростью*** $\mathbf{v}_n$ **)**

КИНЕМАТИКА

Ускорение при произвольном движении

Ускорение при произвольном движении

Представим вектор скорости материальной точки в виде

$$\vec{v}(t)=\left|\vec{v}(t)\right|\cdot\vec{e}_\tau(t)=v(t)\vec{e}_\tau(t)$$

Тогда

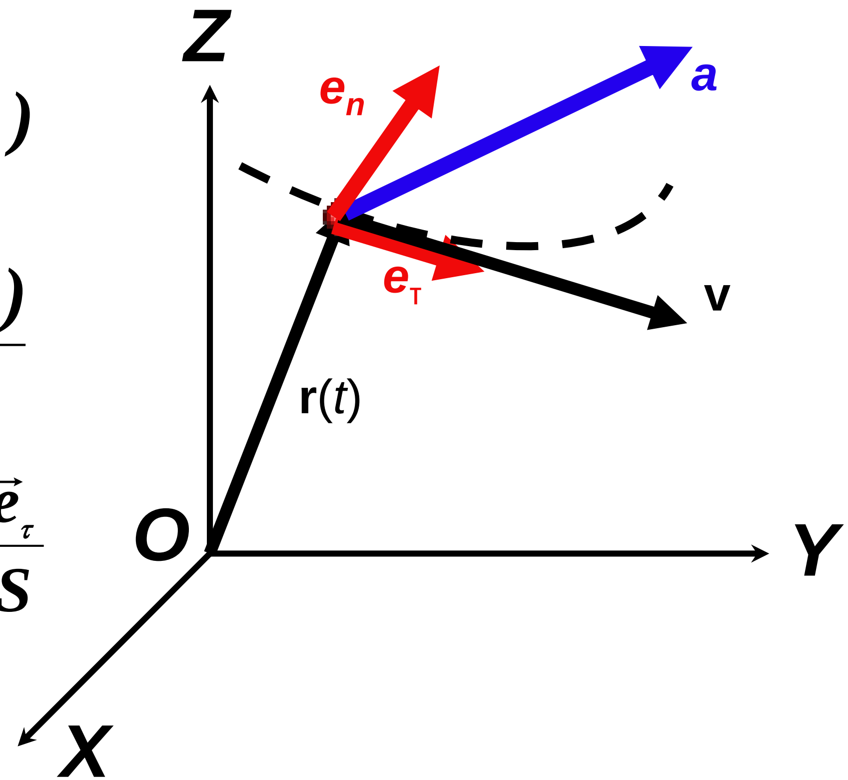
$$\vec{a}(t)=\frac{dv(t)}{dt}\vec{e}_\tau(t)+v(t)\frac{d\vec{e}_\tau(t)}{dt}$$

$$\frac{d\vec{e}_\tau(t)}{dt}=\frac{d\vec{e}_\tau}{dt}\cdot\frac{dS}{dS}=\frac{d\vec{e}_\tau}{dS}\cdot\frac{dS}{dt}=v(t)\frac{d\vec{e}_\tau}{dS}$$

Следовательно

$$\boxed{\vec{a}(t)=\frac{dv(t)}{dt}\vec{e}_\tau+\frac{v(t)^2}{R}\vec{e}_n}$$

$\vec{e}_n$ - единичный вектор, перпендикулярный вектору скорости



Обозначено

$$R=1\Big/\left|\frac{d\vec{e}_\tau}{dS}\right|$$

Ускорение при произвольном движении

Первое слагаемое обозначают

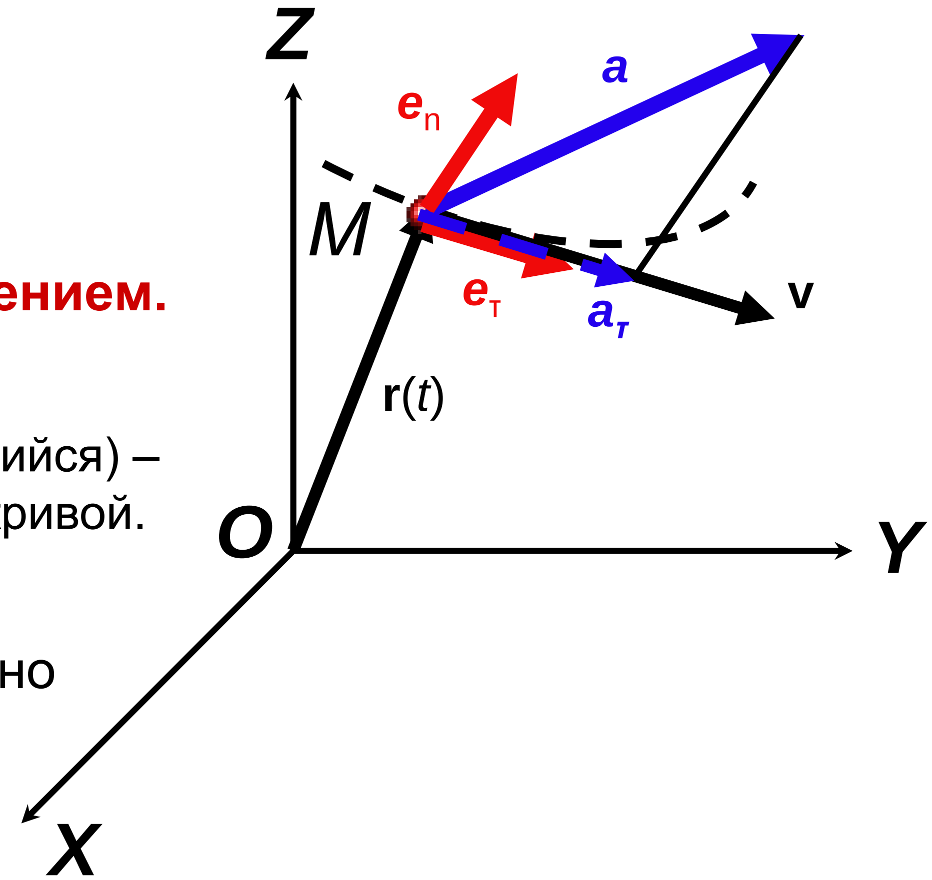
$$\boxed{\vec{a}_\tau(t) = \frac{dv(t)}{dt}\vec{e}_\tau}$$

и называют **тангенциальным ускорением.**

Тангенциальный (*лат.* tangens – касающийся) – направленный по касательной к данной кривой.

Тангенциальное ускорение направлено по касательной к траектории.

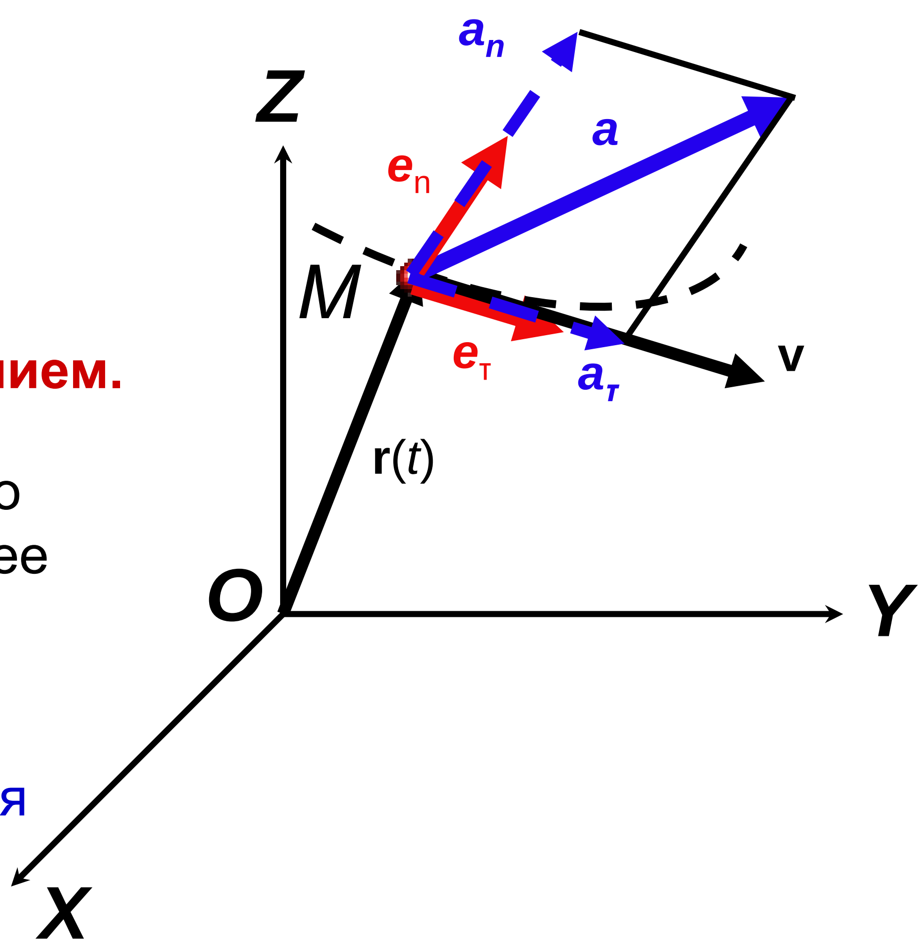
Тангенциальное ускорение характеризует быстроту изменения скорости по величине.



Ускорение при произвольном движении

Второе слагаемое обозначают

$$\boxed{\vec{a}_n(t) = \frac{v(t)^2}{R}\vec{e}_n}$$



и называют **нормальным ускорением.**

Нормальное ускорение направлено по нормали к траектории к центру ее кривизны.

Нормальное ускорение характеризует быстроту изменения скорости по направлению.

При любом движении материальной точки

$$\boxed{\vec{a}(t) = \vec{a}_\tau(t) + \vec{a}_n(t)}$$

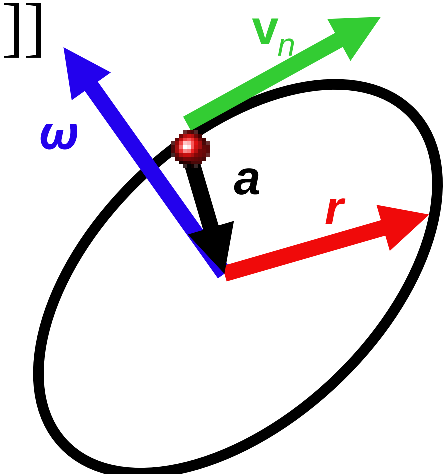
Ускорение при произвольном движении

Смысл величины R.

Движение материальной точки по окружности при ω=const.

$$\vec{v}(t)=\vec{e}(t)\frac{d\left|\vec{r}(t)\right|}{dt}+[\vec{\omega}(t),\vec{r}(t)] \quad \Rightarrow \quad \vec{v}(t)=\vec{v}_n(t)=[\vec{\omega}(t),\vec{r}(t)]$$

$$\vec{a}(t)=\frac{d\vec{v}_n}{dt}=\frac{d}{dt}[\vec{\omega},\vec{r}]=\left[\vec{\omega},\frac{d\vec{r}}{dt}\right]=[\vec{\omega},[\vec{\omega},\vec{r}]]$$



Формула BAC-CAB $\quad [\vec{a},[\vec{b},\vec{c}]]=\vec{b}(\vec{a}\vec{c})-\vec{c}(\vec{a}\vec{b})$

$$\vec{a}(t)=\vec{\omega}(\vec{\omega}\vec{r})-\vec{r}\omega^2$$

$$\vec{\omega}\perp\vec{r}\Leftrightarrow(\vec{\omega}\vec{r})=0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a}(t)=-\vec{r}\omega^2$$

$$|\vec{v}_n|=|\vec{\omega}||\vec{r}| \quad \Rightarrow \quad \left|\vec{a}(t)\right|=\frac{\left|\vec{v}_n\right|^2}{\left|\vec{r}\right|}$$

$$\boxed{\vec{a}_n(t)=\frac{\left|\vec{v}(t)\right|^2}{R}\vec{e}_n}$$

При движении материальной точки по окружности величина R совпадает с радиусом окружности,

$$\boxed{R=\left|\vec{r}\right|}$$

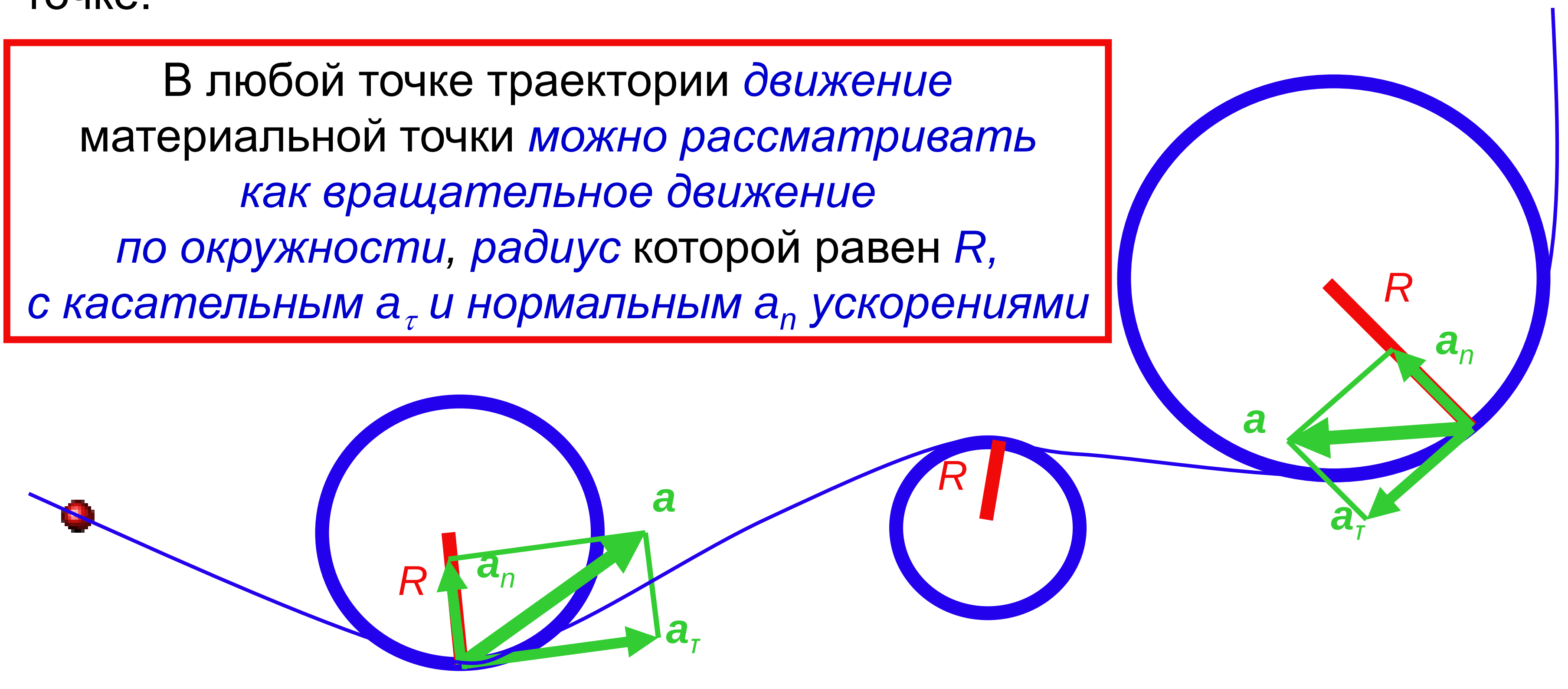
нормальное ускорение называется центростремительным.

Ускорение при произвольном движении

При произвольном движении материальной точки величина R является радиусом некоторой моментальной окружности (т.е. соответствующей данному моменту времени), которая сливается в данном месте с траекторией на бесконечно малом ее участке.

Величина R называется **радиусом кривизны** траектории в данной точке.

> В любой точке траектории *движение* материальной точки *можно рассматривать как вращательное движение по окружности, радиус* которой равен *R*, *с касательным a_τ и нормальным a_n ускорениями*



КИНЕМАТИКА

Некоторые виды движения материальной точки

Некоторые виды движения материальной точки

I. $\begin{cases} \vec{a}_n = 0 \\ \vec{a}_\tau = 0 \end{cases}$

$$\vec{a}_n(t) = \frac{|\vec{v}(t)|^2}{R}\vec{e}_n \Rightarrow R \to \infty \Rightarrow$$

Движение прямолинейное (*направление* скорости не меняется)

$$\vec{a}_\tau(t) = \vec{e}_\tau \frac{d|\vec{v}(t)|}{dt} \Rightarrow |\vec{v}(t)| = v = const \Rightarrow$$

Движение равномерное (*величина* скорости не меняется)

Восстановление уравнения движения:

$$\pm v = \frac{dx(t)}{dt} \Rightarrow dx(t) = \pm v dt \Rightarrow \int_{t_0}^{t} dx(t) = \pm \int_{t_0}^{t} v dt$$

$$\boxed{x(t) = x(t_0) \pm v \cdot (t - t_0)} \Rightarrow x = vt$$

Некоторые виды движения материальной точки

II. $\begin{cases} \vec{a}_n = 0 \\ \vec{a}_\tau = const \end{cases}$

$\vec{a}_n = 0$ → Движение прямолинейное

$$\frac{d\left|\vec{v}(t)\right|}{dt} = a = const$$ → Движение равнопеременное

Восстановление уравнения движения:

$$\pm dv(t) = adt \quad \rightarrow \quad \int_{t_0}^{t} dv(t) = \pm\int_{t_0}^{t} adt \quad \rightarrow \quad \boxed{v(t) = v(t_0) \pm a\cdot(t - t_0)}$$

$$v = v_0 \pm at$$

$$\pm\left[v(t_0) + a\cdot(t - t_0)\right] = \frac{dx(t)}{dt} \quad \rightarrow \quad \pm\left[v(t_0) + a\cdot(t - t_0)\right]dt = dx(t)$$

$$\pm\int_{t_0}^{t}\left[v(t_0) + a\cdot(t - t_0)\right]dt = \int_{t_0}^{t} dx(t)$$

$$\boxed{x(t) = x(t_0) \pm v(t_0)\cdot(t - t_0) \pm a\cdot\frac{(t - t_0)^2}{2}}$$

$$x = x_0 \pm v_0 t \pm \frac{at^2}{2}$$

Некоторые виды движения материальной точки

III. $\begin{cases} \vec{a}_n = const \\ \vec{a}_\tau = 0 \end{cases}$ $\quad \vec{a}_\tau = 0 \Rightarrow$ Движение равномерное

$$\frac{|\vec{v}(t)|^2}{R} = a = const$$ $\Rightarrow$ Равномерное движение по окружности

IV. $\begin{cases} \vec{a}_n \neq const \\ \vec{a}_\tau \neq const \end{cases}$ $\Rightarrow$ Переменное криволинейное движение

Прямая задача кинематики. *Определение параметров движения (скорости, ускорения, пути) по известному уравнению движения.*

Обратная задача кинематики. *Определение кинематического уравнения движения по известным характеристикам движения.*

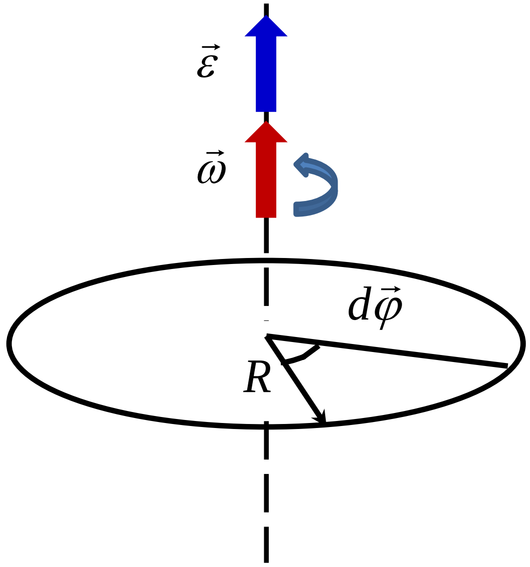
Связь между линейным и угловыми величинами

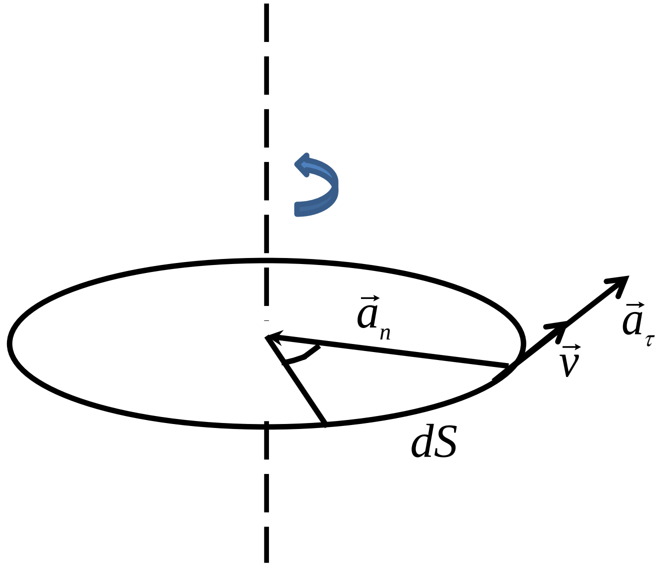
$$\boxed{\vec{v}(t) = [\vec{\omega}(t), \vec{R}]}$$

$$\boxed{\vec{a}_n(t) = \left[\vec{\omega}(t), [\vec{\omega}(t), \vec{R}]\right]}$$

$$\boxed{dS = R d\varphi}$$

$$\boxed{\vec{a}_\tau(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = [\vec{\varepsilon}(t), \vec{R}]}$$





Связь между линейным и угловыми величинами

Прямолинейное движение материальной точки	Вращательное движение твердого тела
Пройденный путь S	Угол поворота φ
Скорость $\vec{v}$	Угловая скорость $\vec{\omega}$
Ускорение $\vec{a}$	Угловое ускорение $\vec{\varepsilon}$
Равномерное движение	
$v = const$ $S = vt$	$\omega = const$ $\varphi = \omega t$
Равнопеременное движение	
$a = const$ $S = v_0 t \pm \frac{at^2}{2}$ $v = v_0 \pm at$	$\varepsilon = const$ $\varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}$ $\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t$