# ДИНАМИКА АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

## Вращение вокруг неподвижной оси

# Вращение вокруг неподвижной оси

Движение материальной точки по окружности

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] = m[\vec{r}, \vec{v}] = mr^2\vec{\omega}$$

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

**Момент инерции МТ**

$$\boxed{I = mr^2}$$

**Уравнение динамики вращ. движения МТ**

$$\boxed{\frac{d(I\vec{\omega})}{dt} = \vec{M}}$$

$$I\vec{\varepsilon} = \vec{M}$$

Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси z

$$L_z = \omega \sum_i m_i r_i^2$$

$$L_z = I_z \omega$$

**Момент инерции АТТ (системы МТ)**

$$\boxed{I_z = \int r^2 dm} \qquad \boxed{I_z = \sum_i m_i r_i^2}$$

**Уравнение динамики вращения АТТ вокруг неподвижной оси z**

$$\boxed{\frac{d(I_z\omega)}{dt} = M_z}$$

$$I_z \varepsilon = M_z$$

# Вращение вокруг неподвижной оси

$$I_z \varepsilon = M_z$$

***Момент инерции – мера инертности тела при вращательном движении.***

$$I_z = \int r^2 dm$$

***Момент инерции АТТ зависит от:***

-массы тела;

-формы и размеров тела;

-распределения массы относительно оси вращения, в частности, выбора оси вращения.

При переносе ***оси вращения*** или ***частей тела*** момент инерции ***изменяется***.

# Вращение вокруг неподвижной оси

**Кинетическая энергия вращающегося АТТ вокруг неподвижной оси:**

$$K = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i \omega^2 r_i^2$$

$$\boxed{K = \frac{I_z \omega^2}{2} = \frac{L_z^2}{2I_z}}$$

# Вращение вокруг неподвижной оси

**Работа внешних сил при вращении АТТ вокруг неподвижной оси:**

$$\delta A = \left(\vec{F}, d\vec{r}\right) = F_\tau ds = F_\tau r d\varphi = M_z d\varphi$$

$$\boxed{A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z d\varphi}$$

$$\delta A = M_z d\varphi = I_z \frac{d\omega}{dt} \omega dt = I_z \omega d\omega$$

$$\boxed{A_{12} = \frac{I_z \omega_2^2}{2} - \frac{I_z \omega_1^2}{2}}$$

# Вращение вокруг неподвижной оси

| Поступательное движение | | Вращательное движение | |
|---|---|---|---|
| Масса | $m$ | Момент инерции | $I$ |
| Скорость | $\vec{\upsilon} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ | Угловая скорость | $\vec{\omega} = \dfrac{d\vec{\varphi}}{dt}$ |
| Ускорение | $\vec{a} = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ | Угловое ускорение | $\vec{\varepsilon} = \dfrac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}$ |
| Сила | $\vec{F}$ | Момент силы | $\vec{M}$ |
| Импульс | $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$ | Момент импульса | $\vec{L} = I\vec{\omega}$ |
| Основное уравнение динамики | $\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$ | Основное уравнение динамики | $\vec{M} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$ |
| Работа | $dA = F_s dS$ | Работа | $dA = M_z d\varphi$ |
| Кинетическая энергия | $\dfrac{m\upsilon^2}{2}$ | Кинетическая энергия | $\dfrac{I\omega^2}{2}$ |

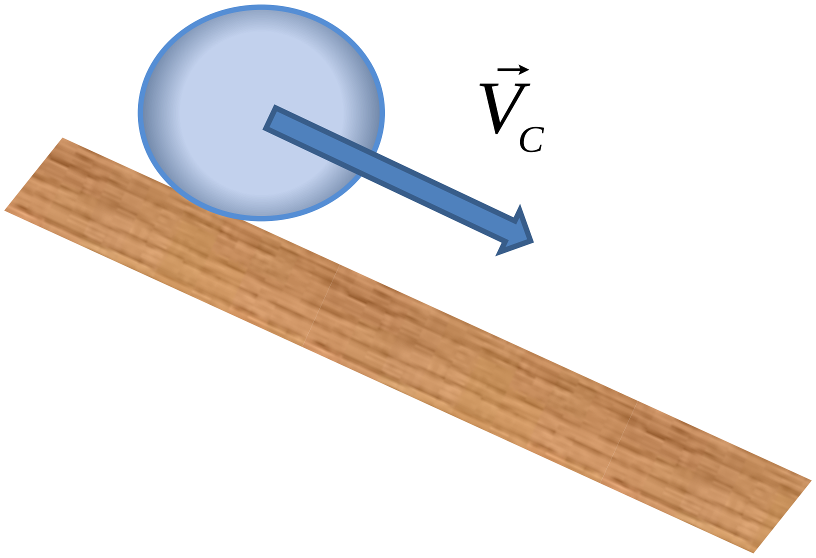
# ДИНАМИКА АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

## Плоское движение твердого тела

# Плоское движение твердого тела

## Кинетическая энергия при плоском движении АТТ :

$$K = \frac{I_C \omega^2}{2} + \frac{m V_C^{\;2}}{2}$$



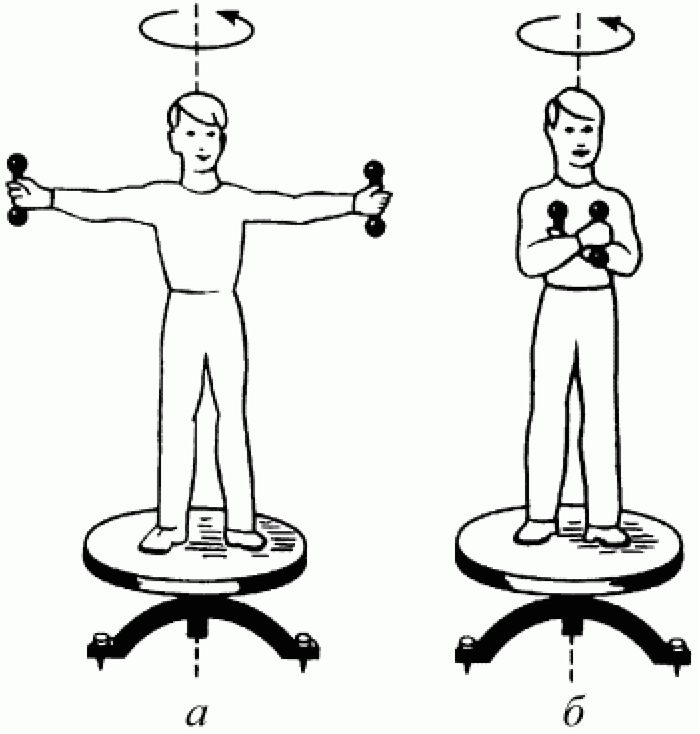
# ДИНАМИКА АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

## Примеры сохранения момента импульса

# Пример сохранения момента импульса

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{внеш} \qquad \vec{M}_{внеш} = 0 \rightarrow \vec{L} = I\vec{\omega} = const \rightarrow I_1\omega_1 = I_2\omega_2$$

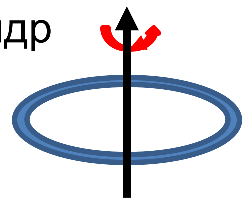
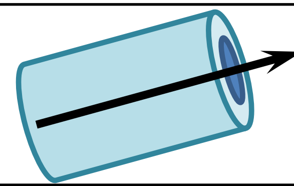
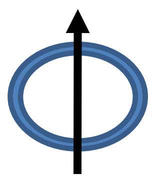
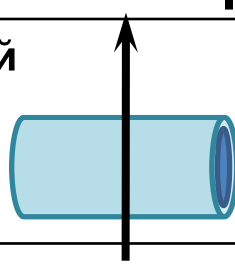
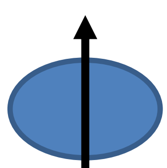
**Скамья Жуковского**



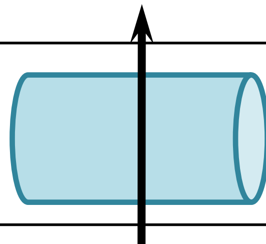
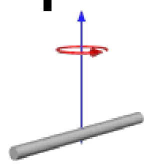
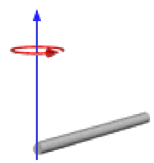
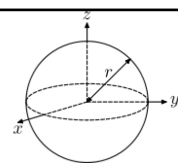
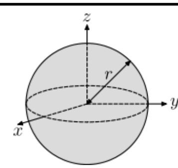
# ДИНАМИКА АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

## Расчет момента инерции

# Момент инерции

| Тело | Положение оси | Момент инерции |
|---|---|---|
| Полый **тонкостенный** цилиндр (кольцо) радиуса *R* и массы *m*  | Ось цилиндра (кольца) | $I = mR^2$ |
| Момент инерции **толстостенного** цилиндра относительно оси симметрии |  | $I = \frac{1}{2}m(R_1^2 + R_2^2)$ |
| Тонкостенное кольцо радиуса *R* и массы *m*  | Ось лежит в плоскости кольца и проходит через его середину | $I = \frac{mR^2}{2}$ |
| Полый **тонкостенный** цилиндр длины *l*, радиуса *R* и массы *m*  | Ось перпендикулярна к цилиндру и проходит через его середину | $I = \frac{mR^2}{2} + \frac{ml^2}{12}$ |
| Сплошной цилиндр (диск) радиуса *R* и массы *m*  | Ось цилиндра | $I = \frac{mR^2}{2}$ |
| Сплошной диск радиуса *R* и массы *m*  | Ось лежит в плоскости диска и проходит через его середину | $I = \frac{mR^2}{4}$ |

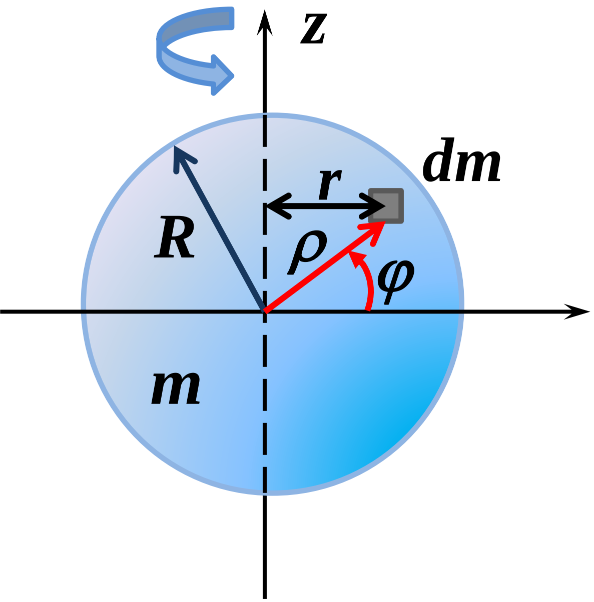
# Момент инерции

| Тело | | Положение оси | Момент инерции |
|---|---|---|---|
| Сплошной цилиндр длины *l*, радиуса *R* и массы *m* |  | Ось перпендикулярна к цилиндру и проходит через его середину | $I = \frac{mR^2}{4} + \frac{ml^2}{12}$ |
| Прямой тонкий стержень длины *l* и массы *m* |  | Ось перпендикулярна к стержню и проходит через его середину | $I = \frac{ml^2}{12}$ |
| Прямой тонкий стержень длины *l* и массы *m* |  | Ось перпендикулярна к стержню и проходит через его конец | $I = \frac{ml^2}{3}$ |
| Тонкостенная сфера радиуса *R* и массы *m* |  | Ось проходит через центр сферы | $I = \frac{2mR^2}{3}$ |
| Шар радиуса *R* и массы *m* |  | Ось проходит через центр шара | $I = \frac{2}{5}mR^2$ |

# Момент инерции

**_Сплошной диск радиуса R и массы m_**

***Ось лежит в плоскости диска и проходит через его середину***




$$I_z = \int r^2 dm$$

$$dm = d(\rho_0 \cdot V) \qquad dV = d(h \cdot S)$$

$$dm = \rho_0 dV \qquad dV = hdS$$

$$I_z = \rho_0 h \int r^2 dS \qquad dS = dxdy$$

$$dS = \rho d\rho d\varphi$$

$$r = \rho \cos\varphi$$

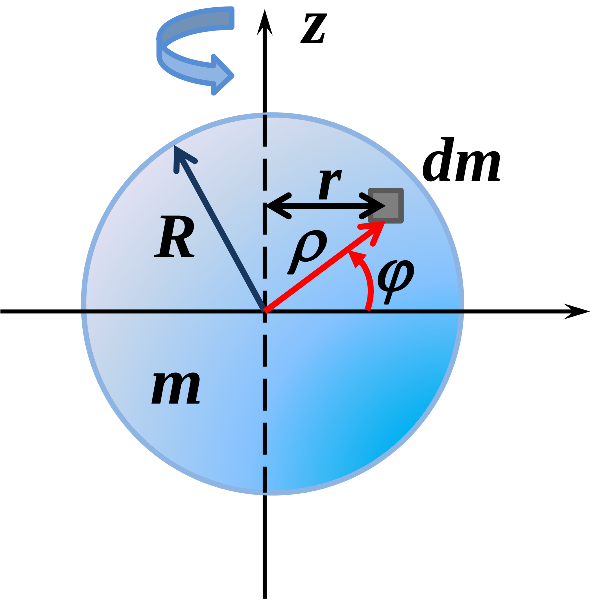
$$I_z = \rho_0 h \iint (\rho \cos\varphi)^2 \rho d\rho d\varphi$$

$$I_z = \rho_0 h \int_0^R \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi$$

# Момент инерции

***<u>Сплошной диск радиуса R и массы m</u>***

***Ось лежит в плоскости диска и проходит через его середину***




$$I_z = \rho_0 h \frac{R^4}{4} \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\varphi}{2} d\varphi$$

$$I_z = \rho_0 h \frac{R^4}{4} \left( \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\varphi + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos 2\varphi d\varphi \right)$$

$$I_z = \rho_0 h \frac{R^4}{4} \left( \pi + \frac{\sin 2\varphi}{4} \Big|_0^{2\pi} \right)$$

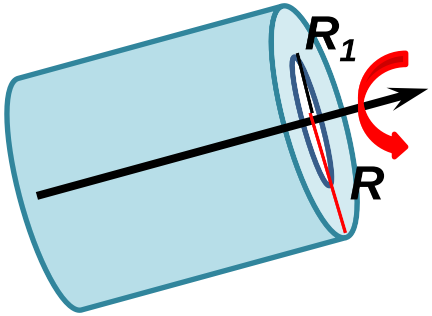
$$I_z = \rho_0 h \frac{R^4}{4} \pi$$

$$V = \pi R^2 h$$

$$\boxed{I_z = \frac{mR^2}{4}}$$

# Момент инерции

Момент инерции **толстостенного цилиндра относительно** оси симметрии

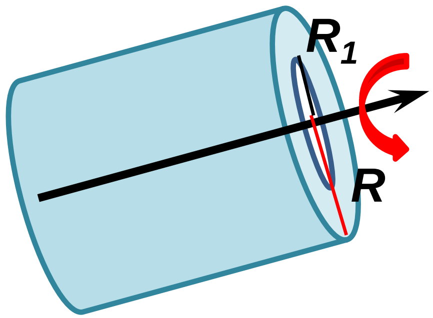



$$dm = \rho dV = \rho \cdot 2\pi rhdr$$

$$dI = r^2 dm = 2\pi\rho hr^3 dr$$

# Момент инерции

Момент инерции **толстостенного цилиндра относительно** оси симметрии




$$I=\int_{R_1}^{R} dI = 2\pi\rho h\int_{R_1}^{R} r^3 dr = 2\pi\rho h\left.\frac{r^4}{4}\right|_{R_1}^{R} =$$

$$=\frac{1}{2}\pi\rho h\left(R^4-R_1^4\right)=\frac{1}{2}\pi\rho h\left(R^2-R_1^2\right)\cdot\left(R^2+R_1^2\right)$$

$$V=\pi\left(R^2-R_1^2\right)h$$

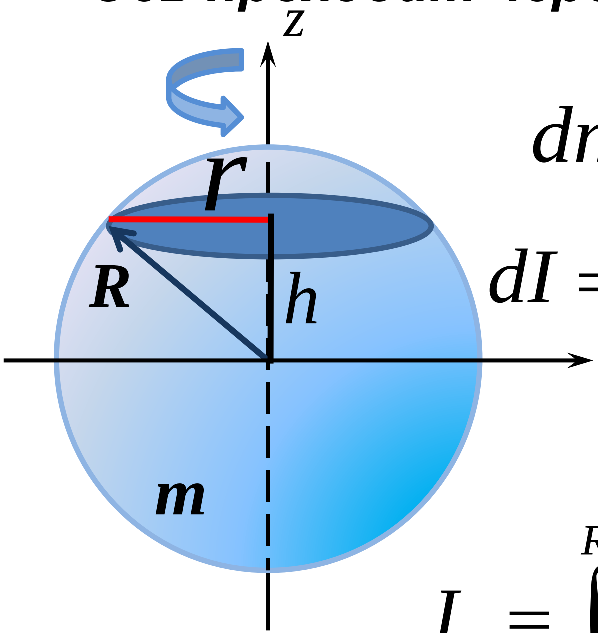
$$m=\rho V=\pi\rho\left(R^2-R_1^2\right)h$$

$$\boxed{I=\frac{1}{2}m\left(R^2+R_1^2\right)}$$

# Момент инерции

***<u>Шар радиуса R и массы m</u>***

***Ось проходит через центр шара***




$$r = \sqrt{R^2 - h^2}$$

$$dm = \rho dV = \rho \cdot \pi r^2 dh$$

$$dI = \frac{1}{2} r^2 dm = \frac{1}{2} \pi \rho r^4 dh = \frac{1}{2} \pi \rho (R^2 - h^2)^2 dh =$$

$$= \frac{1}{2} \pi \rho (R^4 - 2R^2 h^2 + h^4) dh$$

$$I_z = \int_{-R}^{R} dI_z = 2\int_0^R dI_z = \pi \rho \int_0^R (R^4 - 2R^2 h^2 + h^4) dh =$$

$$= \pi \rho \left( R^4 h - \frac{2}{3} R^2 h^3 + \frac{1}{5} h^5 \right) \Bigg|_0^R = \pi \rho \left( R^5 - \frac{2}{3} R^5 + \frac{1}{5} R^5 \right) = \frac{8}{15} \pi \rho R^5 =$$

$$= \left( \frac{4}{3} \pi R^3 \rho \right) \cdot \frac{2}{5} R^2 = \frac{2}{5} m R^2$$

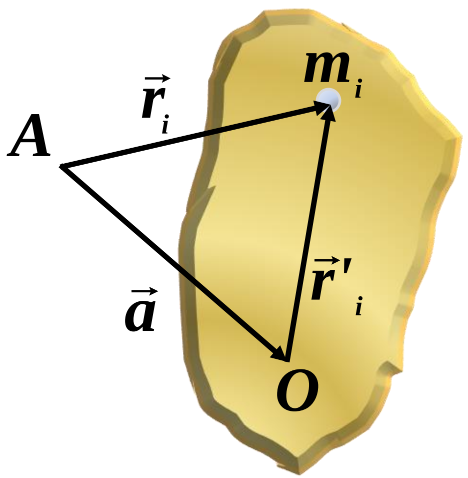
$$\boxed{I_z = \frac{2}{5} m R^2}$$

# Момент инерции

**Теорема Гюйгенса – Штейнера:** ***Момент инерции I твердого тела относительно произвольной оси равен сумме момента инерции $I_C$ этого тела относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела, и произведения массы m тела на квадрат расстояния a между осями.***

$$I = I_C + ma^2$$

Доказательство:




$$I = \sum_i m_i r_i^2 = \sum_i m_i (\vec{r}_i' + \vec{a})^2$$

$$I = \sum_i m_i r_i'^2 + 2(\vec{a}, \sum_i m_i \vec{r}_i') + a^2 \sum_i m_i$$

$$I = I_O + 2(\vec{a}, \sum_i m_i \vec{r}_i') + ma^2$$

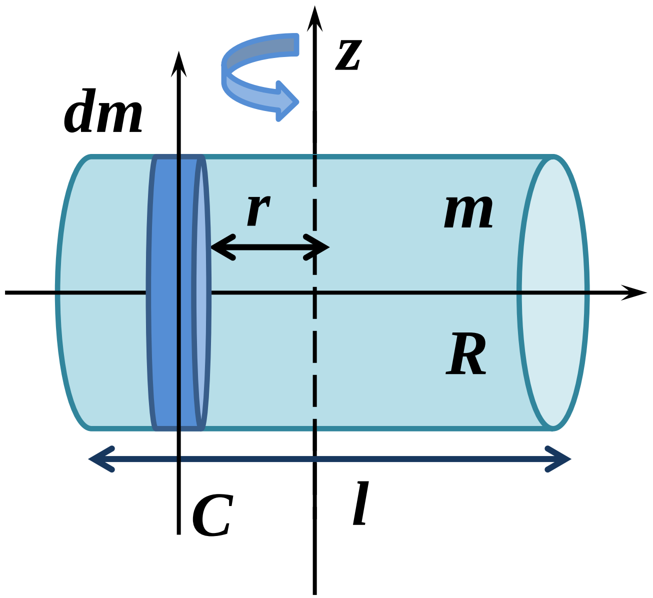
$$\vec{R}_{CO} = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{r}_i' \qquad \sum_i m_i \vec{r}_i' = m\vec{R}_{CO}$$

$$I = I_O + 2m(\vec{a}, \vec{R}_{CO}) + ma^2$$

# Момент инерции

**_Сплошной цилиндр длины l, радиуса R и массы m_**

***Ось перпендикулярна к цилиндру и проходит через его середину***




$$dI_z = dI_C + r^2 dm \qquad dI_C = dm\frac{R^2}{4}$$

$$I_z = \frac{R^2}{4}\int dm + \int r^2 dm$$

$$I_z = \frac{mR^2}{4} + \rho_0 \int r^2 dV$$

$$I_z = \frac{mR^2}{4} + \rho_0 \int_{-l/2}^{l/2} r^2 dr \cdot S$$

$$I_z = \frac{mR^2}{4} + \rho_0 S \frac{l^3}{12}$$

$$\boxed{I_z = \frac{mR^2}{4} + \frac{ml^2}{12}}$$