МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

Распределение Максвелла

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСВЕЛЛА

Молекулы любого газа находятся в вечном хаотическом движении.

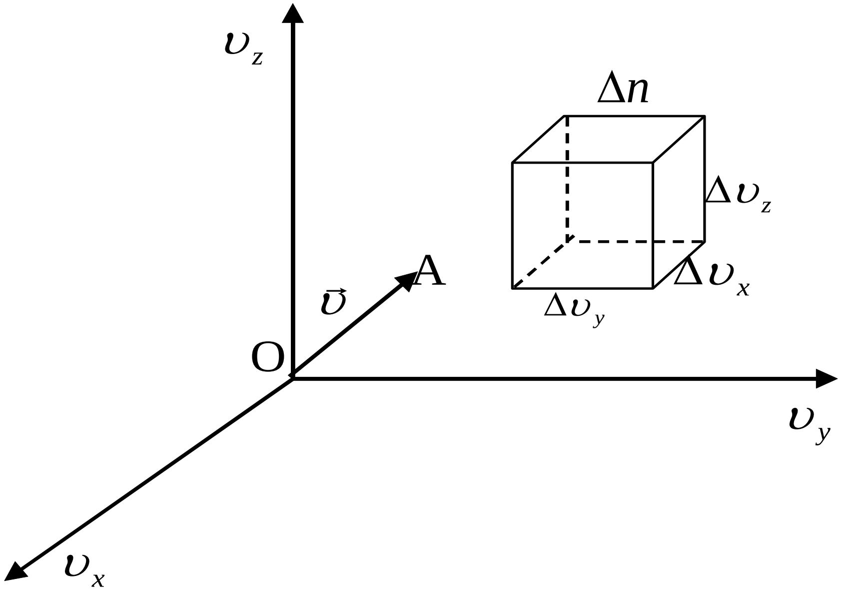
Столкновение молекул $\Longrightarrow$ Изменение скоростей молекул

В каждый данный момент времени скорость каждой отдельной молекулы является **случайной** и по величине и по направлению

Если газ предоставить самому себе, то различные скорости теплового движения распределяются между молекулами данной массы газа при данной температуре по определённому закону,
т.е. **существует распределение молекул по скоростям**.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСВЕЛЛА

Найдем аналитическое выражение распределения скоростей молекул.



Координатное пространство скоростей

Каждой точке (A) соответствует молекула со скоростью υ с проекциями $\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z$.

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2}$$

Выберем в пространстве скоростей достаточно малый объем в виде параллелепипеда

Δn - число молекул в единице объема со скоростями в пределах от $\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z$ до $\upsilon_x + \Delta\upsilon_x$, $\upsilon_y + \Delta\upsilon_y, \upsilon_z + \Delta\upsilon_z$.

$$\Delta n_x \sim n\Delta\upsilon_x$$

$$\Delta n_x = f(x) n \Delta\upsilon_x$$

$f(x)$ - функция, определяющая распределение молекул по скоростям υ_x .

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСВЕЛЛА

$$\Delta n_x = f(x) n \Delta \upsilon_x$$

$$\frac{\Delta n_x}{n} = f(x) \Delta \upsilon_x$$

$\frac{\Delta n_x}{n_x}$ - вероятность того, что молекулы имеют составляющую скорости по оси Ох лежащую в пределах от υ_x до $(\upsilon_x + \Delta \upsilon_x)$.

$$\frac{\Delta n_y}{n} = f(\upsilon_y) \Delta \upsilon_y \qquad \frac{\Delta n_z}{n} = f(\upsilon_Z) \Delta \upsilon_z$$

Вероятность $\Delta n / n$ того, что молекулы имеют скорость, составляющие которой заключены в пределах от $\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z$ до $\upsilon_x + \Delta \upsilon_x, \upsilon_y + \Delta \upsilon_y, \upsilon_z + \Delta \upsilon_z$, равна произведению вероятностей

$$\frac{\Delta n}{n} = \frac{\Delta n_x}{n} \frac{\Delta n_y}{n} \frac{\Delta n_z}{n}$$

$$\frac{\Delta n}{n} = f(\upsilon_x) f(\upsilon_y) f(\upsilon_z) \Delta \upsilon_x \Delta \upsilon_y \Delta \upsilon_z$$

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСВЕЛЛА

$$\frac{\Delta n}{n} = f(\upsilon_x) f(\upsilon_y) f(\upsilon_z) \Delta\upsilon_x \Delta\upsilon_y \Delta\upsilon_z$$

$\dfrac{\Delta n}{n} = const$ так как молекулы движутся беспорядочно. $\Rightarrow d(\dfrac{\Delta n}{n}) = 0$

$d(\Delta\upsilon_x \Delta\upsilon_y \Delta\upsilon_z) = 0$ элементарный объем является постоянным.

$$d(\frac{\Delta n}{n}) = d[f(\upsilon_x) f(\upsilon_y) f(\upsilon_z)]\Delta\upsilon_x \Delta\upsilon_y \Delta\upsilon_z + f(\upsilon_x) f(\upsilon_y) f(\upsilon_z) \times d[\Delta\upsilon_x \Delta\upsilon_y \Delta\upsilon_z] = 0$$

$$d[f(\upsilon_x) f(\upsilon_y) f(\upsilon_z)]\Delta\upsilon_x \Delta\upsilon_y \Delta\upsilon_z = 0$$

Так как $\Delta\upsilon_x \Delta\upsilon_y \Delta\upsilon_z \neq 0$, то $d[f(\upsilon_x) f(\upsilon_y) f(\upsilon_z)] = 0$

Продифференцируем

$$f'(\upsilon_x) f(\upsilon_y) f(\upsilon_z) d\upsilon_x + f(\upsilon_x) f'(\upsilon_y) f(\upsilon_z) d\upsilon_y + f(\upsilon_x) f(\upsilon_y) f'(\upsilon_z) d\upsilon_z = 0$$

Разделим все члены этого выражения на $f(\upsilon_x) f(\upsilon_y) f(\upsilon_z)$

$$\frac{f'(\upsilon_x)}{f(\upsilon)_x} d\upsilon_x + \frac{f'(\upsilon_y)}{f(\upsilon_y)} d\upsilon_y + \frac{f'(\upsilon_z)}{f(\upsilon_z)} d\upsilon_z = 0$$

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСВЕЛЛА

$$\frac{f'(\upsilon_x)}{f(\upsilon)_x}d\upsilon_x + \frac{f'(\upsilon_y)}{f(\upsilon_y)}d\upsilon_y + \frac{f'(\upsilon_z)}{f(\upsilon_z)}d\upsilon_z = 0$$

Вспомним, что $\upsilon^2 = \upsilon_x{}^2 + \upsilon_y{}^2 + \upsilon_z{}^2$

Скорость не меняется по отношению к изменению ее составляющих $\upsilon = const$.

$$\upsilon_x d\upsilon_x + \upsilon_y d\upsilon_y + \upsilon_z d\upsilon_z = 0$$

Умножим последнее выражение на произвольную постоянную величину λ и сложим с первым

$$[\frac{f'(\upsilon_x)}{f(\upsilon_x)} + \lambda\upsilon_x]d\upsilon_x + [\frac{f'(\upsilon_y)}{f(\upsilon_y)} + \lambda\upsilon_y]d\upsilon_y + [\frac{f'(\upsilon_z)}{f(\upsilon_z)} + \lambda\upsilon_z]d\upsilon_z = 0$$

$$\frac{f'(\upsilon_x)}{f(\upsilon_x)} + \lambda\upsilon_x = 0$$

Решим это уравнение!

$$\frac{f'(\upsilon_y)}{f(\upsilon_y)} + \lambda\upsilon_y = 0$$

$$\frac{f'(\upsilon_z)}{f(\upsilon_z)} + \lambda\upsilon_z = 0$$

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСВЕЛЛА

$$\frac{f'(\upsilon_x)}{f(\upsilon_x)}+\lambda\upsilon_x=0$$ Обозначим $f(\upsilon_x)=y$, $f'(\upsilon_x)=\dfrac{dy}{d\upsilon_x}$

Тогда $$\frac{1}{y}\frac{dy}{d\upsilon_x}+\lambda\upsilon_x=0$$ или $$\frac{dy}{y}=-\lambda\upsilon_x d\upsilon_x,\quad \int\frac{dy}{y}=-\lambda\int\upsilon_x d\upsilon_x$$

$$\ln y=-\frac{\lambda\upsilon_x^{\ 2}}{2}+c_1$$

Константу интегрирования $c_1=\ln c$

$$\ln y=-\frac{\lambda\upsilon_x^{\ 2}}{2}+\ln c\quad\Rightarrow y=ce^{-\frac{\lambda\upsilon_x^{\ 2}}{2}}$$

Переходим к старым обозначениям $$\frac{\Delta n_x}{n}=f(\upsilon_x)\Delta\upsilon_x=ce^{-\frac{\lambda\upsilon_x^2}{2}}\Delta\upsilon_x$$ Аналогично

$$\frac{\Delta n_y}{n}=f(\upsilon_y)\Delta\upsilon_y=ce^{-\frac{\lambda\upsilon_y^{\ 2}}{2}}\Delta\upsilon_y$$

Перемножим вероятности

$$\frac{\Delta n_z}{n}=f(\upsilon_z)\Delta\upsilon_z=ce^{-\frac{\lambda\upsilon_z^{\ 2}}{2}}\Delta\upsilon_z$$

$$\frac{\Delta n}{n}=c^3e^{-\frac{\lambda(\upsilon^2{}_x+\upsilon_y{}^2+\upsilon_z{}^2)}{2}}\Delta\upsilon_x\Delta\upsilon_y\Delta\upsilon_z$$

$$\boxed{\frac{\Delta n}{n}=c^3e^{-\frac{\lambda\upsilon^2}{2}}\Delta\upsilon_x\Delta\upsilon_y\Delta\upsilon_z}$$

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСВЕЛЛА

Рассмотрим наиболее важный случай, когда требуется найти число Δn молекул, *абсолютные величины скоростей* которых лежат в интервале $\upsilon, \upsilon + \Delta\upsilon$.

Выделенный объем $\Delta\upsilon_x, \Delta\upsilon_y, \Delta\upsilon_z$ заменим объемом шарового слоя, заключенного между сферами с радиусами $\upsilon, \upsilon + \Delta\upsilon$. Объем шарового слоя: $4\pi\upsilon^2\Delta\upsilon$

$$\frac{\Delta n}{n} = c^3 4\pi\upsilon^2 e^{-\frac{\lambda\upsilon^2}{2}}\Delta\upsilon$$

Из теоретических расчетов $\lambda = \dfrac{2}{\upsilon^2{}_в}, \quad c = \sqrt{\dfrac{\lambda}{2\pi}} = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}\upsilon_в}$ (см. МодТ-04)!!

Наиболее вероятной скоростью $\upsilon_в$ называется скорость, близкой к которой обладает наибольшее число молекул данной массы газа.

$$\boxed{\Delta n = \frac{4}{\sqrt{\pi}} n e^{-\frac{\upsilon^2}{\upsilon_в^2}} \frac{\upsilon^2}{\upsilon^3{}_в}\Delta\upsilon}$$

или

$$\boxed{\Delta N = \frac{4}{\sqrt{\pi}} N e^{-\frac{\upsilon^2}{\upsilon_в^2}} \frac{\upsilon^2}{\upsilon^3{}_в}\Delta\upsilon}$$

ΔN - число молекул, Δn - в единице объёма, скорости которых лежат в интервале $(\upsilon, \upsilon + \Delta\upsilon)$, N - общее число молекул данной массы газа.

Закон Максвелла дает число молекул, скорости которых лежат в данном интервале скоростей независимо от направления скоростей.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСВЕЛЛА

Число Δn молекул в единице объема в газе, составляющие скорости, которых лежат в интервале между υ_x и $\upsilon_x + \Delta\upsilon_x$, υ_y и $\upsilon_y + \Delta\upsilon_y$, υ_z и $\upsilon_z + \Delta\upsilon_z$:

$$\boxed{\Delta n = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} n e^{-\frac{m(\upsilon_x^2+\upsilon_y^2+\upsilon_z^2)}{2kT}} \Delta\upsilon_x \Delta\upsilon_y \Delta\upsilon_z}$$

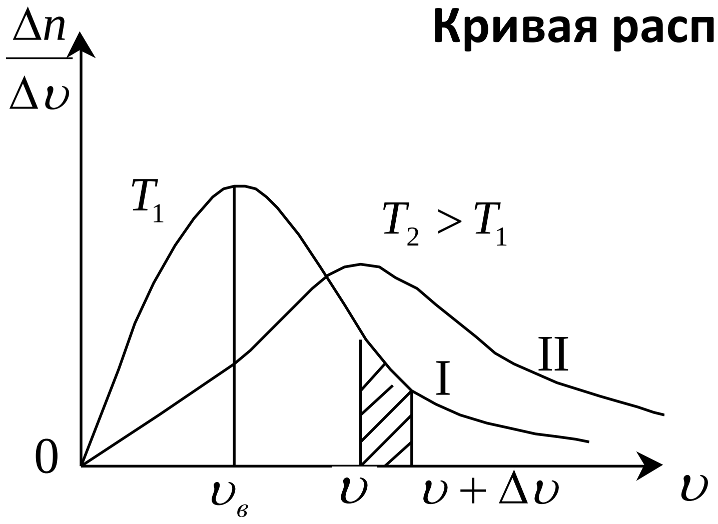
$$\boxed{\Delta n = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} n e^{-\frac{E_к}{kT}} \Delta\upsilon_x \Delta\upsilon_y \Delta\upsilon_z}$$

формулы распределения Максвелла

$E_к = \dfrac{m(\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2)}{2}$ - кинетическая энергия молекулы газа, m - масса молекулы, k- постоянная Больцмана, T - абсолютная температура газа.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСВЕЛЛА

Кривая распределения молекул по скоростям



$$\frac{\Delta n}{\Delta \upsilon} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} n e^{-\frac{\upsilon^2}{\upsilon_в^2}} \frac{\upsilon^2}{\upsilon^3_в}$$

<u>Максимум кривой соответствует наиболее вероятной скорости.</u>

$$\frac{d}{d\upsilon}\left(\frac{4}{\sqrt{\pi}} n e^{-\frac{\upsilon^2}{\upsilon_в^2}} \frac{\upsilon^2}{\upsilon_в^3}\right) = 0, \quad \frac{4}{\sqrt{\pi}} n \frac{1}{\upsilon_в^3} \frac{d}{d\upsilon}\left(e^{-\frac{\upsilon^2}{\upsilon_в^2}} \upsilon^2\right) = 0$$

Так как $\frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{n}{\upsilon_в^3} \neq 0$, то $\frac{d}{d\upsilon}\left(e^{-\frac{\upsilon^2}{\upsilon_в^2}} \upsilon^2\right) = 0$. Взяв производную, получим $\upsilon = \upsilon_в$.

<u>Площадь под всей кривой равна N.</u>

Рассмотрим интервал $\upsilon, \upsilon + \Delta\upsilon$: $\Delta S = \frac{\Delta n}{\Delta \upsilon} \Delta\upsilon = \Delta n$

Площадь заштрихованной полоски равна числу молекул в единицу объема, скорости которых лежат в указанном интервале.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСВЕЛЛА

Скорости, характеризующие тепловое движение

1. Наиболее вероятная скорость:

$$\upsilon_в = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}$$

$$\boxed{\Delta n = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} n e^{-\frac{E_к}{kT}} \Delta\upsilon_x \Delta\upsilon_y \Delta\upsilon_z}$$

$$\Delta\upsilon_x \Delta\upsilon_y \Delta\upsilon_z = 4\pi\upsilon^2 \Delta\upsilon$$

$$\Delta n = \left(\frac{m}{2\pi RT}\right)^{\frac{3}{2}} n e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}} 4\pi\upsilon^2 \Delta\upsilon$$

Экстремум функции: $\left[\frac{d}{d\upsilon}\left(e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}} \upsilon^2\right)\right]_{\upsilon=\upsilon_в} = 0$

$$e^{-\frac{m\upsilon_в^2}{2kT}} \left(-\frac{m2\upsilon_в}{2kT}\right)\upsilon_в^2 + e^{-\frac{m\upsilon^2_в}{2kT}} 2\upsilon_в = 0$$

$$e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}} \upsilon_в \left[-\frac{m\upsilon_в^2}{kT} + 2\right] = 0$$

Так как $e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}} \neq 0$ и $\upsilon_в \neq 0$, следовательно $-\frac{m\upsilon^2_в}{kT} + 2 = 0$ или $\upsilon_в = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$

$$k = \frac{R}{N_A} \Rightarrow \upsilon_в = \sqrt{\frac{2RT}{N_A m}}$$ или $$\boxed{\upsilon_в = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}}$$

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСВЕЛЛА

2. Средняя арифметическая скорость: $$\bar{\upsilon} = \frac{\upsilon_1 + \upsilon_2 + \ldots + \upsilon_N}{N}.$$

Вспомним $\Delta n = f(\upsilon) n \Delta\upsilon, \quad \Delta n = \left(\frac{m}{2\pi RT}\right)^{\frac{3}{2}} n e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}} 4\pi\upsilon^2 \Delta\upsilon$

функция распределения Максвелла

$$\boxed{f(\upsilon) = \left(\frac{m}{2\pi RT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}} 4\pi\upsilon^2}$$

(см. МодТ-04)!!

$$\boxed{\bar{\upsilon} = \int_0^\infty \upsilon \cdot f(\upsilon) d\upsilon;} \Rightarrow \boxed{\bar{\upsilon} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}}$$

3. Средняя квадратичная скорость $\langle \upsilon_{кв} \rangle$: $\langle \upsilon_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2 + \ldots + \upsilon_N^2}{N}};$

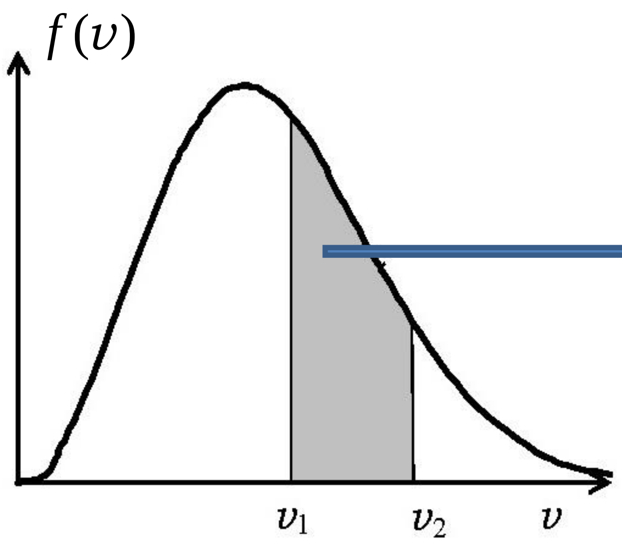
$$\boxed{\langle \upsilon_{кв} \rangle = \int_0^\infty \upsilon^2 \cdot f(\upsilon) d\upsilon;} \Rightarrow \boxed{\langle \upsilon_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}.}$$

Все скорости прямо пропорциональны $\sqrt{T}$
и обратно пропорциональны $\sqrt{\mu}$.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСВЕЛЛА

Физический смысл функции распределения Максвелла

$$f(\upsilon) = \left(\frac{m}{2\pi RT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m\upsilon^2}{2kT}} 4\pi\upsilon^2$$

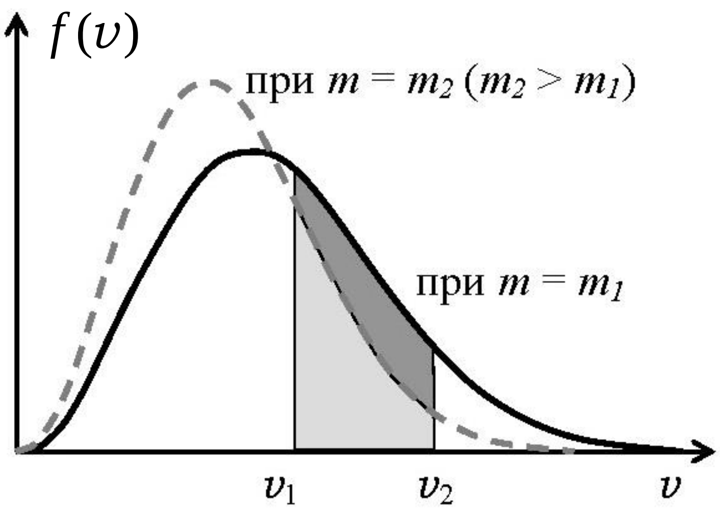


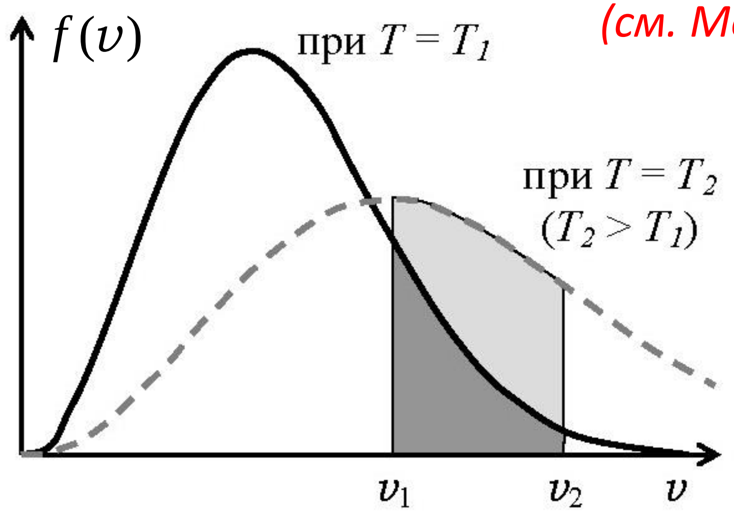
$\int\limits_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} f(\upsilon)d\upsilon$ - вероятность того, что скорость частицы лежит в пределах (υ_1, υ_2).

$\int\limits_{0}^{\infty} f(\upsilon)d\upsilon = 1$ - *условие нормировки.*

Зависимость функции распределения Максвелла от m и T

(см. МодТ-04)!!

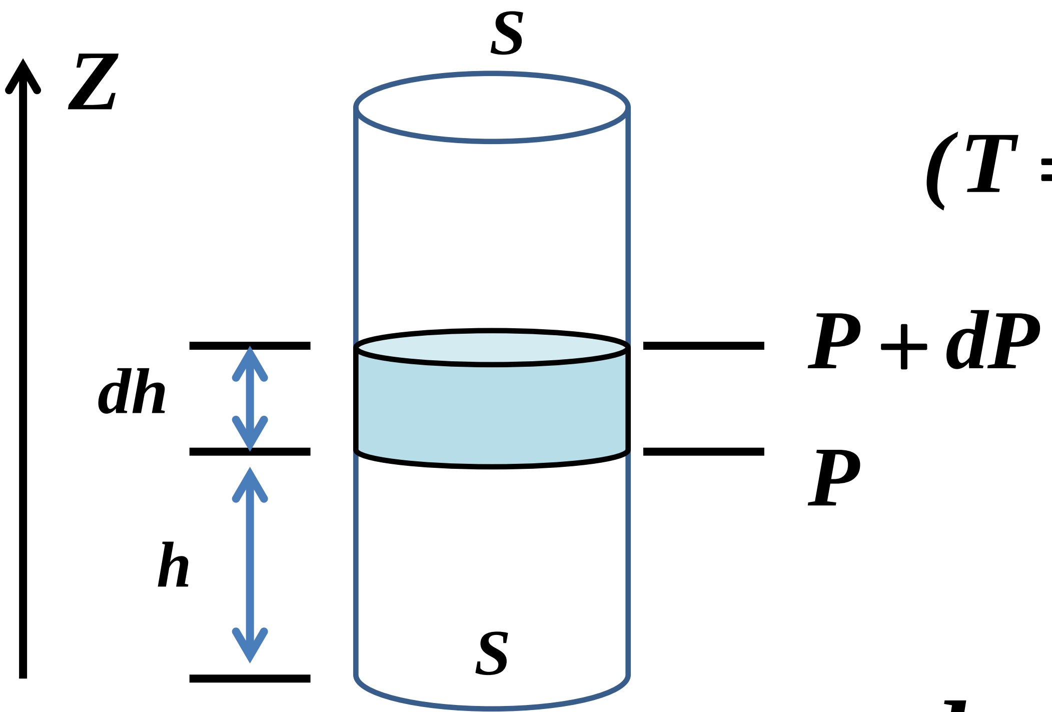




МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

Барометрическая формула
Распределение Больцмана

БАРОМЕТРИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ БОЛЬЦМАНА



$$(T = const, g = const)$$

$$dF = gdm$$

$$dm = \rho dV = \rho S dh$$

$$dF = \rho S g dh$$

dV - объём слоя газа

ρ -плотность газа

БАРОМЕТРИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ БОЛЬЦМАНА

$$dP = \frac{dF}{S} = \rho g dh$$

$$dP = -\rho g dh$$

Знак «минус» имеет физический смысл.

Он показывает, что давление газа убывает с высотой. Если подняться на высоту dh, то давление газа уменьшится на величину dP.

ρ **находим из уравнения Менделеева – Клапейрона**

$$PV = \frac{m}{\mu} RT$$

$$\frac{m}{V} = \frac{P\mu}{RT} \qquad \rho = \frac{P\mu}{RT}$$

$$\boxed{dP = -\frac{P\mu}{RT} g dh}$$

БАРОМЕТРИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ БОЛЬЦМАНА

Это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными.

$$\boxed{\frac{dP}{P} = -\frac{\mu g}{RT}dh}$$

Интегрируем:

$$\int_{p_0}^{p}\frac{dP}{P} = -\frac{\mu g}{RT}\int_{0}^{h}dh$$

$$\ln P - \ln P_0 = \ln\frac{P}{P_0} = -\frac{\mu g}{RT}h$$

Получим *барометрическую формулу*:

$$\boxed{P = P_0 e^{-\frac{\mu g h}{RT}}}$$

БАРОМЕТРИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ БОЛЬЦМАНА

$$\boxed{P = P_0 e^{-\frac{\mu g h}{RT}}}$$

Барометрическая формула показывает, как зависит атмосферное давление *P* от высоты h над поверхностью Земли.

$$P = nkT$$

n - концентрация молекул на высоте h

P_0, n_0 - давление газа и концентрация молекул газа на высоте $h = 0$

$$T = const$$

$$P_0 = n_0 kT$$

$$\boxed{n = n_0 e^{-\frac{\mu g h}{RT}}}$$

– распределение Больцмана

http://www.youtube.com/watch?v=lgp4RoKcMpg&feature=related

БАРОМЕТРИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ БОЛЬЦМАНА

$$\boxed{n = n_0 e^{-\frac{\mu g h}{RT}}}$$

$$\boxed{\mu = m N_A}$$

$$n = n_0 e^{-\frac{m N_A g h}{RT}} = n_0 e^{-\frac{mgh}{kT}}$$

$$\boxed{k = \frac{R}{N_A}}$$

$$\boxed{n = n_0 e^{-\frac{mgh}{kT}}} \qquad \boxed{n = n_0 e^{-\frac{U}{kT}}} \qquad \boxed{U = mgh}$$

распределение Больцмана для поля силы тяжести

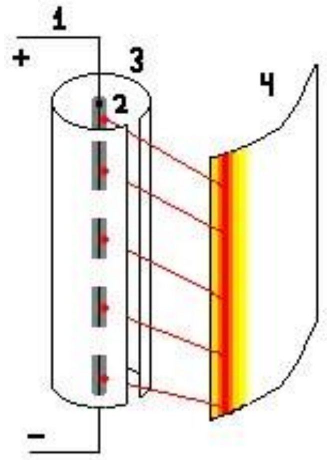
Эта формула, выражающая распределение Больцмана справедлива для любого силового поля с потенциальной функцией U

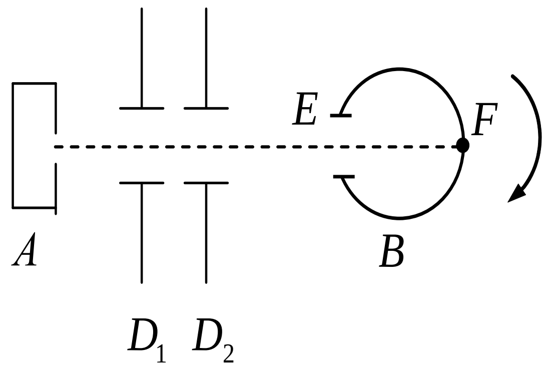
МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

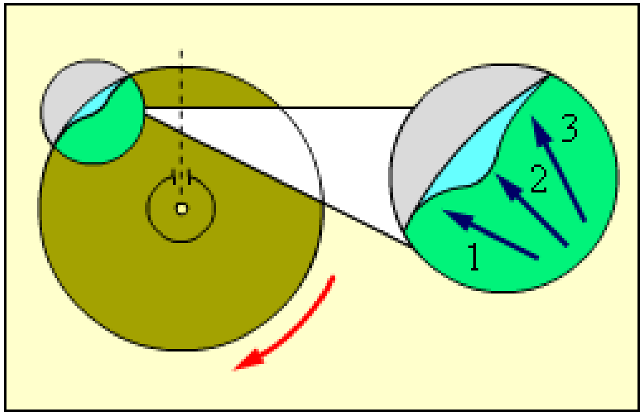
Экспериментальная проверка распределения Максвелла и Больцмана

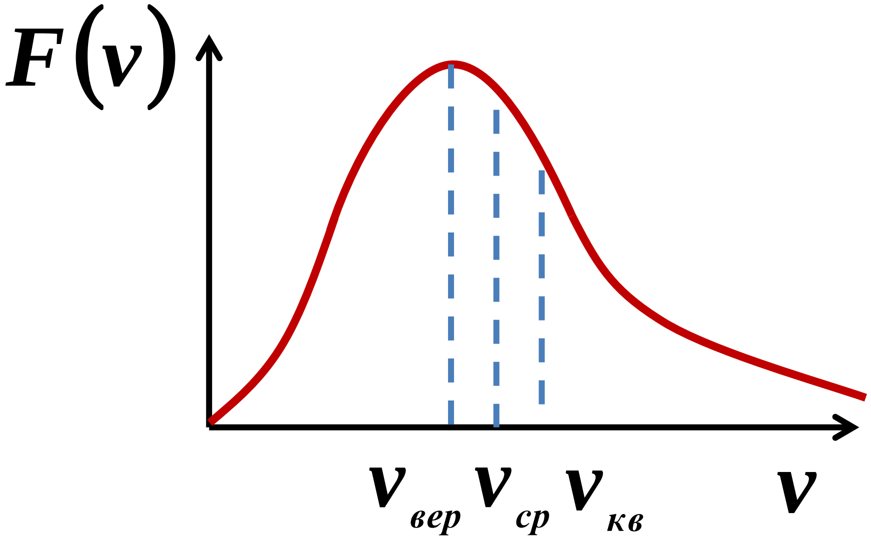
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ПРОВЕРКА РАСПРЕДЕЛЕНИЙ МАКСВЕЛЛА И БОЛЬЦМАНА

Опыт Штерна



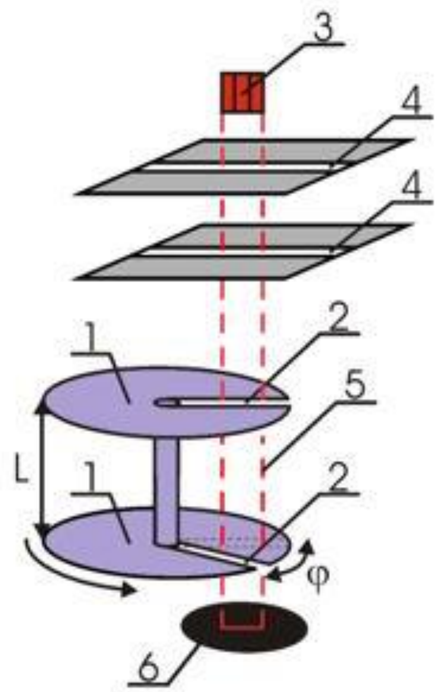


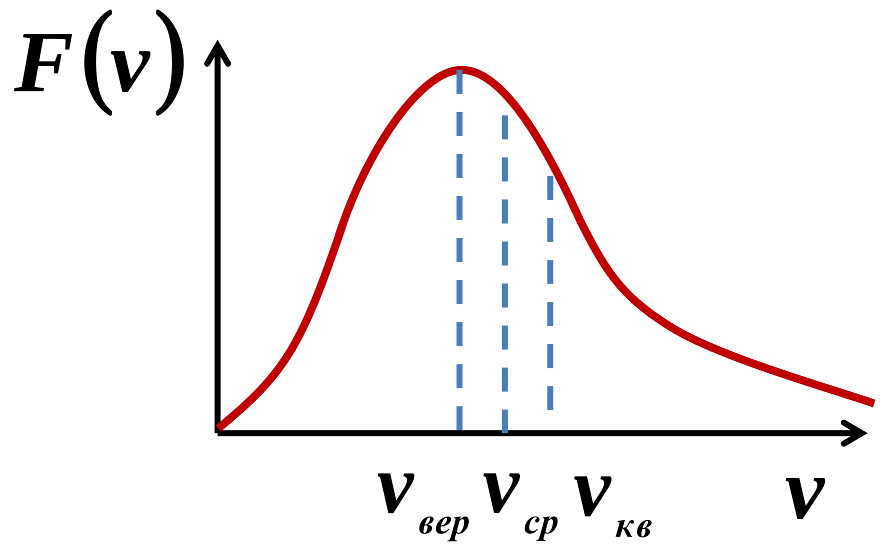




ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ПРОВЕРКА РАСПРЕДЕЛЕНИЙ МАКСВЕЛЛА И БОЛЬЦМАНА

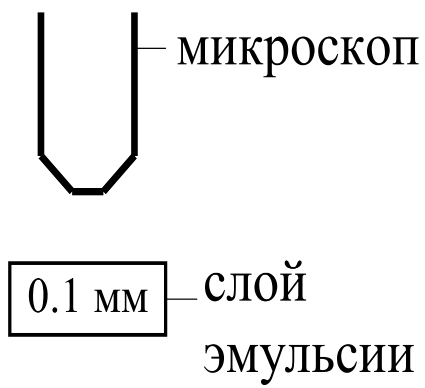
Опыт Ламмерта





http://www.youtube.com/watch?v=rj_3c_oi9VQ&feature=related

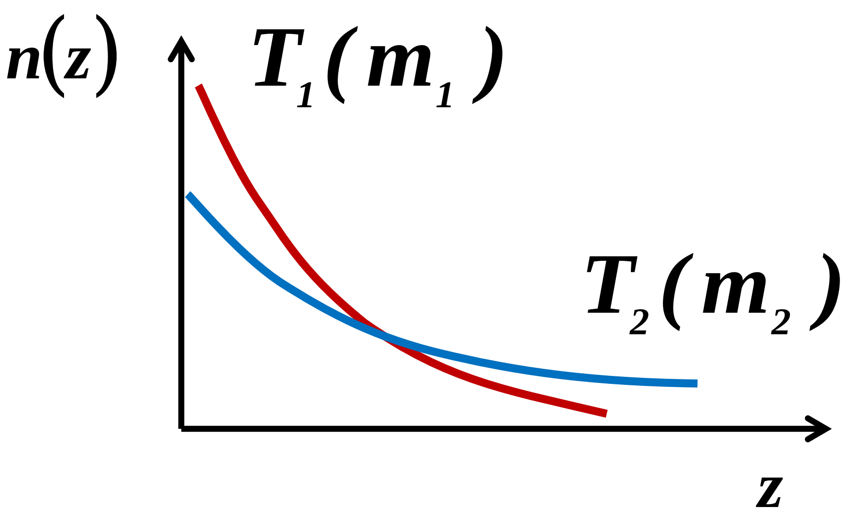
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ПРОВЕРКА РАСПРЕДЕЛЕНИЙ МАКСВЕЛЛА И БОЛЬЦМАНА



Французский физик Перрен воспользовался распределением Больцмана для экспериментального определения числа Авогадро.

$$n = n_0 e^{-\frac{mghN_A}{RT}}$$

Величины n, n_0, m, g, h, R, T известны.



$$T_1 < T_2 (m_1 > m_2)$$

http://www.youtube.com/watch?v=lgp4RoKcMpg&feature=related