ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ 1

Тема: **Введение в анализ**

1. Понятие множества, подмножества, пустого множества, равных множеств.
2. Числовое множество $\mathbb{R}$,.свойства множества $\mathbb{R}$.
3. Точные грани числовых множеств. Понятие точных граней ограниченного множества. Теорема существования точной верхней грани у множества, ограниченного сверху (без доказательства, но с иллюстрацией).
4. Понятие функции. Вещественная функция вещественного аргумента. Композиция функций. Основные элементарные функции. Классификация основных элементарных функций.
5. Понятие числовой последовательности. Ограниченные и неограниченные числовые последовательности.
6. Бесконечно малые последовательности и их свойства.
7. Бесконечно большие последовательности и их свойства.
8. Сходящаяся последовательность. Единственность ее предела и ограниченность.
9. Монотонные последовательности. Критерий сходимости.
10. Доказательство монотонности и ограниченности числовой последовательности $x_n = \left[1 + \frac{1}{n}\right]^n$. Второй замечательный предел.
11. Определение предела функции в точке по Гейне и по Коши. Теоремы о пределе суммы, произведения, частного и композиции функций.
12. Теоремы о предельном переходе в неравенстве.
13. Односторонние пределы функции в точке. Необходимые и достаточные условия существования предела функции в точке.
14. Локальные свойства функций, имеющих предел в точке: о локальной ограниченности функции, об устойчивости знака.
15. Предел функции на бесконечности.
16. Бесконечно малые функции в точке и на бесконечности и их свойства.
17. Бесконечно большие функции в точке и на бесконечности и их свойства.
18. Понятие функции, непрерывной в точке. Необходимые и достаточные условия непрерывности функции в точке. Точки разрыва и их классификация.
19. Локальные свойства непрерывных функций. Непрерывность элементарных функций в области определения.
20. Первый замечательный предел и его следствия.
21. Второй замечательный предел и его следствия.
22. Сравнение бесконечно малых величин.
23. Эквивалентные бесконечно малые величины, их свойства. Таблица эквивалентных бесконечно малых.
24. Критерий эквивалентности бесконечно малых величин. Теорема о применении эквивалентных бесконечно малых величин к вычислению пределов.
25. Свойства функций, непрерывных на отрезке.

Тема: **Дифференциальное исчисление**

1. Задачи, приводящие к понятию производной функции.
2. Понятие производной функции в точке. Односторонние производные функции в точке.
3. Связь производной функции в точке с ее непрерывностью в этой точке.
4. Геометрический и физический смысл производной функции.
5. Правила дифференцирования. Производная суммы, разности, произведения и частного функций. Производная обратной функции. Производная сложной функции.
6. Понятие обратной функции, функции заданной неявно и параметрически. Дифференцирование неявно заданной функции; функции, заданной параметрически. Логарифмическое дифференцирование.
7. Понятие дифференцируемой функции в точке.
8. Необходимое и достаточное условие существования производной в точке.
9. Понятие дифференциала функции в точке. Геометрический смысл дифференциала. Свойства Дифференциала.

10. Инвариантность формы первого дифференциала.
11. Производные высших порядков.
12. Производные высших порядков от функции, заданной неявно, параметрически. Формула Лейбница.
13. Дифференциалы высших порядков.
14. Теоремы о среднем значении для дифференцируемых функций. Теорема Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши.

Тема: **Приложения дифференциального исчисления**

1. Привило Лопиталя для неопределенности вида $\frac{0}{0}$ ($\frac{\infty}{\infty}$).
2. Формула Тейлора. Понятие остаточного члена формулы Тейлора. Остаточный член в форме Пеано и Лагранжа.
3. Понятие формула Маклорена.
4. Аналитические признаки монотонности функции. Понятие локального максимума и минимума. Понятие убывающей и невозрастающей функции, возрастающей и неубывающей функции. Достаточное условие строгой монотонности.
5. Понятие стационарных и критических точек. Необходимый признак экстремума дифференцируемой функции (теорема Ферма). Первый и второй достаточный признаки экстремума.
6. Понятие наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке.
7. Понятие выпуклого и вогнутого графика функции. Достаточное условие выпуклости и вогнутости графика функции.
8. Понятие точки перегиба. Необходимое и достаточное условия точки перегиба.
9. Понятие асимптоты. Вертикальная и наклонная асимптота. Критерий существования наклонной асимптоты.

Тема: **ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ (ФНП)**

1. Основные топологические понятия: замкнутая и открытая область, расстояние между точками, связная и несвязная область и т.д.
2. Понятие функции нескольких переменных. Область определения, область значений, график, линии (поверхности) уровня.
3. Понятие предела ФНП. Свойства пределов ФНП
4. Непрерывность ФНП.
5. Свойства ФНП, непрерывной в точке (без док.)
6. Теорема о непрерывности элементарных ФНП в области определения (без док.) Свойства ФНП, непрерывной на множестве (без док.)
7. Понятие частной производной ФНП. Геометрический и физический смысл.
8. Понятие дифференцируемой ФНП в точке.
9. Понятие полного приращения и полного дифференциала. Геометрическая интерпретация.
10. Свойства дифференцируемой ФНП в точке: теорема о непрерывности дифференцируемой функции и теорема о необходимом условии дифференцируемости функции (2 теоремы - доказать), теорема о достаточном условии дифференцируемости функции и следствие (без док.)
11. Понятие неявно заданной функции. Теорема о дифференцируемости неявно заданной функции (без док.)
12. Уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности в точке (вывод)
13. Теоремы о дифференцировании сложной функции (1-я теорема – доказать, 2-я – без док.)
14. Теорема об инвариантности формы первого дифференциала (доказать для случая $z=U(x,y)$).
15. Понятие производной по направлению (вывод).
16. Понятие градиента. Свойства градиента (3 свойства доказать).
17. Понятие частной производной высшего порядка. Дифференциал высшего порядка.
18. Формула Тейлора ФНП (теорема без док.)
19. Экстремум ФНП. Теорема о необходимом условии существования экстремума (доказать).
20. Квадратичные формы. Положительно определенная, отрицательно определенная, квазизнакоопределенная, неопределенная квадратичная форма. Достаточное условие существования экстремума в терминах квадратичной формы (теорему сформулировать).