

Итерационные вычисления и построение графиков

1. Цель работы: показать знание основных свойств функций, продемонстрировать умение использовать *Mathcad* для итерационных вычислений, для разложения рациональной дроби в сумму простых дробей и построения графиков.

2. Задачи работы:

- уметь проводить итерационные вычисления;
- уметь определить основные точки графика заданной функции по ее аналитическому виду;
- уметь определить тип функции и характер ее изменения на области определения, опираясь на графическое представление;
- уметь строить графики функций средствами *Mathcad*;
- уметь раскладывать рациональные дроби в сумму простых дробей средствами *Mathcad*.

3. Общее описание задания

При выполнении лабораторной работы необходимо провести все вычислительные операции с целью получения ответа на те вопросы, которые были поставлены перед студентом в каждом конкретном случае (в соответствии с вариантом задания).

Исходные данные представлены в виде итерационных выражений и функций.

Каждый вариант задания может выполняться бригадой из двух – четырех человек для того, чтобы можно было бы провести анализ результатов расчетов разными способами.

По исходным данным необходимо:

Часть 1

1.1. Выполнить итерационные вычисления.

1.2. Проанализировать свойства полученного ряда чисел.

Часть 2

2.1. Построить графики заданных функций.

2.2. Проанализировать результаты построения графиков функций и описать поведение каждой из функций по ее графику.

2.3. Разложить рациональные дроби в сумму простых дробей средствами *Mathcad*.

2.4. Построить графики для найденного решения какой-нибудь из дробей: отдельно график функции, определяемой исходной дробью, и функций, определяемых каждым из слагаемых.

2.5. Сделать выводы на основании полученных результатов вычислений и знаний теоретических вопросов (ответить на практические вопросы задания).

4. Варианты задания:

Вариант 3.1

Часть 1

а) $x_{i+1} = 10x_{i-1} - 12 \sin x_i$; $x_0 = 1$; $x_1 = 0,53$; $i = 1, \dots, 15$;

б) $x_{i+1} = 31x_{i-1} + 27(x_i - \lg x_{i-1})$; $x_0 = 2$; $x_1 = 0.2$; $i = 1, \dots, 15$.

Часть 2

2.1. $y_1 = x \sin x$; $y_2 = 3e^x - x^2$; $y_3 = \log_3(x^3 + 3x^2 - 1)$;
 $y_4 = x^2 \sin(x-1) + (x-1) \cos x^2$; $y_5 = 15x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 13x + 17$.

2.2. а)
$$\frac{x^3 + x^2 - 1}{(x-2)(x-3)(x-1)(x-4)}$$
;

б)
$$\frac{x^4 - x^3 + x}{(x+5)(x+1)^2(x-1)(x+6)}$$
.

Вариант 3.2

Часть 1

а) $x_{i+1} = 25x_{i-1} + 17x_i$; $x_0 = -10$; $x_1 = 1$; $i = 1, \dots, 15$;

б) $x_{i+1} = \cos x_{i-1} + \sin x_i$; $x_0 = 0,01$; $x_1 = 0,032$; $i = 1, \dots, 15$.

Часть 2

2.1. $y_1 = e^x \cos x$; $y_2 = 3 \lg x - x^2$; $y_3 = (x^3 + 3x^2 - 1) \sin x$;
 $y_4 = \sin^3 2x + \cos 16x$; $y_5 = 24x^7 - 32x^6 + 14x^5 - 25x^4 + 74x^3 - 37x^2 + 83x - 12$.

2.2. а)
$$\frac{13x^3 + 77x^2 - 15x + 149}{(x+12)(x-3)(x+11)(x-43)}$$
;

б)
$$\frac{89x^4 - 45x^3 + 48x^2 - 50}{(x+15)(x+17)^2(x-21)(x+13)}$$
.

Вариант 3.4

Часть 1

а) $x_{i+1} = 5x_{i-1} - 3x_i$; $x_0 = -1$; $x_1 = 1$; $i = 1, \dots, 15$;

б) $x_{i+1} = \cos x_{i-1} + 2 \sin x_i$; $x_0 = 0,01$; $x_1 = 0,032$; $i = 1, \dots, 15$.

Часть 2

2.1. $y_1 = e^{2x} \cos x$; $y_2 = \lg 4x - (x-5)^{-2}$; $y_3 = (x^3 + 11) \sin(x - \frac{\pi}{4})$;
 $y_4 = \sin^3(x + \frac{\pi}{6}) + \cos 6x$; $y_5 = 8x^7 - 5x^6 + 14x^5 - 75x^3 - 43x^2 + 83x - 32$.

2.2. а) $\frac{23x^3 + 67x^2 - 55x + 191}{(x+17)(x-23)(x+13)(x-14)}$;

б) $\frac{9x^4 - 145x^3 + 418x^2 - 507}{(x+15)(x+17)^2(x-29)(x+33)}$

Вариант 3.5

Часть 1

а) $x_{i+1} = x_{i-1} \sin \frac{\pi}{2} x_i$; $x_0 = 1$; $x_1 = 0,45$; $i = 1, \dots, 15$;

б) $x_{i+1} = \lg x_{i-1} - \lg x_i$; $x_0 = 1$; $x_1 = 0,2$; $i = 1, \dots, 15$.

Часть 2

2.1. $y_1 = (x-2)^3 \sin x$; $y_2 = e^{x+4} + x$; $y_3 = \log_7(7x^3 - 8x^2)^2$;
 $y_4 = (x+4)^2 \sin^2 x + (x-1) \cos^2 x$; $y_5 = 61x^5 - 13x^3 + 54x^2 - 33x + 47$.

2.2. а) $\frac{127x^3 + 348x^2 - 196}{(x-23)(x-31)(x-11)(x-47)}$;

б) $\frac{89x^4 - 35x^3 + 14x - 91}{(x+51)(x+17)^2(x-19)(x+61)}$.

Вариант 3.6

Часть 1

а) $x_{i+1} = \sin \frac{\pi}{2} x_{i-1} + 17 \cos \frac{\pi}{4} x_i$; $x_0 = 0$; $x_1 = 1$; $i = 1, \dots, 15$;

б) $x_{i+1} = \log_3 x_{i-1} + \log_2 x_i$; $x_0 = 3$; $x_1 = 2$; $i = 1, \dots, 15$.

Часть 2

2.1. $y_1 = e^{x-5} \cos \frac{\pi}{5} (x-5)$; $y_2 = \lg|x-x^2|$; $y_3 = (4x^3 + 5x^2 - 11)$;
 $y_4 = \sin^2 4x + \cos^2 5x$; $y_5 = 4x^7 - 2x^6 + 15x^5 - 25x^4 + 4x^3 - 7x^2 + 8x - 12$.

2.2. а) $\frac{13x^3 + 77x^2 - 15x + 149}{(x+11)(x-13)(x+17)(x-43)}$;

б) $\frac{89x^4 - 45x^3 + 48x^2 - 50}{(x+23)(x+17)^2(x-21)(x+37)}$.

Вариант 3.7

Часть 1

а) $x_{i+1} = x_{i-1} + 3x_i$; $x_0 = 1$; $x_1 = 0,2$; $i = 1, \dots, 15$;

б) $x_{i+1} = x_{i-1} + 7(x_i - 2 \lg x_{i-1})$; $x_0 = 2$; $x_1 = 0,2$; $i = 1, \dots, 15$.

Часть 2

2.1. $y_1 = x \cos \frac{\pi}{4} x$; $y_2 = 4e^{x-2} - 2x^2$; $y_3 = \log_3(3x^2 + 1)$;

$y_4 = x^2 \sin(x - \frac{\pi}{6}) + (x-1) \cos x$; $y_5 = 6x^5 - 7x^3 + 23x^2 - 13x + 5$.

2.2. а) $\frac{76x^3 + x^2 - 9x - 86}{(x-23)(x-13)(x-11)(x-41)}$;

б) $\frac{x^4 - x^3 + 33x - 74}{(x+59)(x+13)^2(x-11)(x+61)}$.

Вариант 3.8

Часть 1

а) $x_{i+1} = 15x_{i-1} + 23x_i$; $x_0 = -15$; $x_1 = 1$; $i = 1, \dots, 15$;

б) $x_{i+1} = \cos \frac{\pi}{2} x_{i-1} + \sin \pi x_i$; $x_0 = 0,01$; $x_1 = 0,032$; $i = 1, \dots, 15$.

Часть 2

$$2.1. y_1 = 4^x \cos \left| \frac{\pi}{3} x \right|; \quad y_2 = (3-x) \lg x - x^2; \quad y_3 = (x^3 - 1) \sin \left(3x - \frac{\pi}{2} \right);$$
$$y_4 = \sin^3 4x + \cos 8x; \quad y_5 = 72x^7 - 62x^6 + 84x^5 - 29x^4 + 77x^3 - 32x^2 + 12.$$

$$2.2. \text{ а) } \frac{93x^3 + 97x^2 - 95x + 149}{(x+1)(x-13)(x+11)(x-43)};$$

$$\text{ б) } \frac{59x^4 - 455x^3 + 458x^2 - 505}{(x+19)(x+7)^2(x-21)(x+13)}.$$

Вариант 3.9

Часть 1

$$\text{ а) } x_{i+1} = 4x_{i-1} - 5 \sin x_i; \quad x_0 = 1; \quad x_1 = 0,5; \quad i = 1, \dots, 15.$$

$$\text{ б) } x_{i+1} = 3x_{i-1} + 2(x_i - \lg x_{i-1}); \quad x_0 = 1; \quad x_1 = 1,2; \quad i = 1, \dots, 15.$$

Часть 2

$$2.1. y_1 = x \sin 4x; \quad y_2 = 4e^x - (x-7)^2; \quad y_3 = \log_6(x^3 + 3x^2 - 1);$$
$$y_4 = x^2 \sin(x - \pi) + (x-1) \cos 3x; \quad y_5 = 5x^5 - 13x^3 + 14x^2 - 3x + 7.$$

$$2.2. \text{ а) } \frac{6x^3 + 6x^2 - x + 1}{(x-3)(x-5)(x-11)(x-23)};$$

$$\text{ б) } \frac{88x^4 - 99x^3 + 55x - 34}{(x+51)(x+17)^2(x-17)(x+67)}.$$

Вариант 3.10

Часть 1

$$\text{ а) } x_{i+1} = 9x_{i-1} + 7x_i; \quad x_0 = -12; \quad x_1 = 2; \quad i = 1, \dots, 15;$$

$$\text{ б) } x_{i+1} = \cos 2x_{i-1} + \sin 3x_i; \quad x_0 = 0,01; \quad x_1 = 0,032; \quad i = 1, \dots, 15.$$

Часть 2

$$2.1. y_1 = 5^{x+1} \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right); \quad y_2 = x^2 \cdot \lg x - 4x^2; \quad y_3 = (x^3 + x) \sin \frac{2}{3} x;$$
$$y_4 = \sin^3 3x + \cos^3 6x; \quad y_5 = 36x^7 - 27x^6 + 74x^5 - 25x^4 + 94x^3 - 46x^2 + 83x - 35.$$

$$2.2. \text{ а) } \frac{17x^3 + 97x^2 - 51x + 193}{(x+27)(x-13)(x+11)(x-43)};$$

$$\text{ б) } \frac{69x^4 - 45x^3 + 68x^2 - 30}{(x+15)(x+17)^2(x-21)(x+13)}.$$

Вариант 3.11

Часть 1

а) $x_{i+1} = 6x_{i-1} - 12x_i$; $x_0 = 1$; $x_1 = 0,5$; $i = 1, \dots, 15$;

б) $x_{i+1} = 3 \lg x_{i-1} + 27(x_i - \lg x_{i-1})$; $x_0 = 2$; $x_1 = 0,2$; $i = 1, \dots, 15$.

Часть 2

2.1. $y_1 = (x-4)^2 \sin x$; $y_2 = 6^x - (x-4)^2$; $y_3 = \log_8(x^2 - 4)$;
 $y_4 = x^2 \sin(x - \pi) + (x-1) \cos 0,5x^2$; $y_5 = 15x^5 - 23x^3 + x^2 - 13x + 85$.

2.2. а) $\frac{45x^3 + 12x^2 - 11x - 78}{(x-23)(x-31)(x-11)(x-47)}$;

б) $\frac{69x^4 - x^3 + 17x - 3}{(x+53)(x+13)^2(x-11)(x+61)}$.

Вариант 3.12

Часть 1

а) $x_{i+1} = 15x_{i-1} + 17x_i$; $x_0 = -10$; $x_1 = 1$; $i = 1, \dots, 15$;

б) $x_{i+1} = \cos 2x_{i-1} + \sin x_i$; $x_0 = 0,01$; $x_1 = 0,032$; $i = 1, \dots, 15$.

Часть 2.

2.1. $y_1 = 4^x \cos x$; $y_2 = (3-2x) \lg x - x^2$; $y_3 = (x^3 + 3x^2 - 1) \sin 2x$;
 $y_4 = \sin 8x + \cos 12x$; $y_5 = 24x^7 - 12x^6 + 14x^5 - 15x^4 + 44x^3 - 37x^2 + 83x - 12$.

2.2. а) $\frac{131x^3 + 177x^2 - 115x + 149}{(x-11)(x-13)(x+11)(x-43)}$;

б) $\frac{12x^4 - 45x^3 + 48x^2 - 53}{(x-15)(x-17)^2(x-21)(x-37)}$

Вариант 3.13

Часть 1

а) $x_{i+1} = \log_3(x_{i-1} + 25x_i)$; $x_0 = 1$; $x_1 = 0,53$; $i = 1, \dots, 15$;

б) $x_{i+1} = x_{i-1} + x_i \lg(x_{i-1} + 1)$; $x_0 = 2$; $x_1 = 0,2$; $i = 1, \dots, 15$.

Часть 2

2.1. $y_1 = x \operatorname{tg} x$; $y_2 = 2^x - (\sin x)^2$; $y_3 = (x^3 + 3x^2 - 1)^2$;
 $y_4 = x^2 \sin 2(x - \frac{3\pi}{4}) + x \cos x$; $y_5 = 17x^5 - 3x^3 + 41x^2 - 43x + 19$.

2.2. а) $\frac{54x^3 + x^2 - 55}{(x-97)(x-73)(x-17)(x-47)}$;

Вариант 3.14

Часть 1.

а) $x_{i+1} = 17x_{i-1} - 10x_i$; $x_0 = -10$; $x_1 = 1$; $i = 1, \dots, 15$;

б) $x_{i+1} = \cos \pi x_{i-1} + \sin \pi x_i$; $x_0 = 0,01$; $x_1 = 0,032$; $i = 1, \dots, 15$.

Часть 2

2.1. $y_1 = e^{2x-7} \cos 8x$; $y_2 = \lg 14x - x^2$; $y_3 = (6x^3 + 3x^2 - 1) \sin x$;
 $y_4 = \sin 9x + \cos 0,4x$; $y_5 = -85x^6 + 14x^5 - 25x^4 + 74x^3 - 37x^2 + 83x - 12$.

2.2. а) $\frac{75x^3 + 77x^2 - 154x + 49}{(x+12)(x-37)(x+11)(x-83)}$;

б) $\frac{89x^4 - 45x^3 + 48x^2 - 50}{(x+15)(x+17)^2(x+21)(x-13)}$.

Вариант 3.15

Часть 1

а) $x_{i+1} = x_{i-1} / 7x_i$; $x_0 = -12$; $x_1 = 2$; $i = 1, \dots, 15$;

б) $x_{i+1} = \cos 5x_{i-1} - \sin 3x_i$; $x_0 = 0,01$; $x_1 = 0,032$; $i = 1, \dots, 15$.

Часть 2

2.1. $y_1 = 5^{x-1} \cos(x - \frac{\pi}{4})$; $y_2 = (x^2 + 3) \lg x - 6x^2$; $y_3 = (x^3 - x) \sin \frac{4}{5}x$;
 $y_4 = \sin^3 5x + \cos^3 7x$; $y_5 = 44x^7 - 65x^6 + 34x^5 - 11x^4 + 15x^3 - 46x^2 + 83x - 48$.

2.2. а) $\frac{94x^3 + 97x^2 - 51x + 193}{(x-27)(x-13)(x-11)(x+43)}$;

б) $\frac{77x^4 - 45x^3 + 48x^2 - 31}{(x-17)(x+17)^2(x-23)(x-91)}$.

Вариант 3.16

Часть 1

а) $x_{i+1} = 4x_{i-1} + 5x_i$; $x_0 = 1$; $x_1 = 0,5$; $i = 1, \dots, 15$;

б) $x_{i+1} = 3 \lg x_{i-1} - 4 \lg x_i$; $x_0 = 2$; $x_1 = 0,2$; $i = 1, \dots, 15$.

Часть 2

2.1. $y_1 = (x-5)^2 \sin x$; $y_2 = 8^x (x-4)^2$; $y_3 = \log_8(x^2 - 3x + 4)$;
 $y_4 = (x-6)^{-2} \sin x + (x+3) \cos 0,3x^2$; $y_5 = 12x^5 - 21x^3 + 13x^2 + 3x + 8$.

$$2.2. \text{ а) } \frac{31x^3 + 24x^2 - 4x - 67}{(x - 29)(x - 31)(x - 11)(x - 47)} ;$$

$$\text{ б) } \frac{69x^4 - x^3 + 17x - 3}{(x + 13)(x + 29)^2(x - 11)(x + 61)}$$

5. Контрольные вопросы

1. Какие вычисления называются итерационными?
2. Какие числа называются числами Фибоначчи?
3. Что называется функцией?
4. Что такое график функции?
5. Определите понятие непрерывной функции.
6. Какие точки разрыва бывают у функции?
7. Что называется корнями функции?
8. Какие виды экстремумов функции Вы знаете?
9. Сформулируйте теорему Ферма.
10. Сформулируйте достаточный признак экстремума функции.
11. Как определить участки возрастания и убывания функции?
12. Какие функции называют четными, а какие нечетными?
13. Какие функции называются функциями общего вида?
14. Какие функции называются однородными?
15. Какие функции называют периодическими?
16. Что такое точка перегиба?
17. Как определяется точка перегиба?
18. Какая функция называется выпуклой?
19. Какая функция называется вогнутой?
20. Всегда ли точка, в которой вторая производная функции равна нулю, является точкой перегиба?
21. Как найти асимптоты графика функции?
22. Сформулируйте правила разложения рациональной дроби в сумму простых дробей.
23. Какие средства *Mathcad* используются для итерационных вычислений?
24. Как построить график функции средствами *Mathcad*?
25. Как разложить правильную рациональную дробь средствами *Mathcad*?
26. Как разложить неправильную рациональную дробь средствами *Mathcad*?