УДК 681.5

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ ПИ-РЕГУЛЯТОРА ЛИНЕЙНОЙ САУ НА ОСНОВЕ КОЭФФИЦИЕНТНЫХ ОЦЕНОК СТЕПЕНИ УСТОЙЧИВОСТИ И ЗАДАННОЙ ДОБРОТНОСТИ

М.И. Пушкарёв, С.А. Гайворонский

Томский политехнический университет
E-mail: pushkarev@tpu.ru

Разработана методика выбора настроек линейного пропорционально-интегрального регулятора, обеспечивающих квазимаксимальную степень устойчивости и заданную точность системы автоматического управления в установившихся статических режимах. В основу методики положены коэффициентные оценки показателей качества стационарных систем и базирующиеся на них достаточные условия заданной степени устойчивости.

Ключевые слова:
Регулятор, максимальная степень устойчивости, показатели качества, коэффициентные оценки, точность.

Key words:
Controller, maximal degree of stability, quality indexes, coefficient estimation, accuracy.

Введение

К настоящему времени разработано большое число методов синтеза линейных систем автоматического управления (САУ), позволяющих осуществлять обоснованный выбор структуры и параметров регулятора для обеспечения в системе заранее заданных требований к ее качеству. Показатели качества можно разбить на четыре группы: частотные, временные, корневые и коэффициентные, определяемые набором коэффициентов передаточной функции. Анализ методов синтеза САУ показывает, что для выбора настроек регулятора желательно иметь простые аналитические или графические зависимости, позволяющие легко перейти от показателей качества САУ к искомым параметрам регулятора. За исключением простых случаев (для систем первого и второго порядков) такие зависимости сложно получить при использовании частотных или временных показателей качества. Значительно проще задача параметрического синтеза регулятора решается на основе корневого подхода или при использовании коэффициентных методов.

Коэффициенты передаточной функции линейной системы или некоторые их комбинации наиболее удобно иметь в качестве показателей работоспособности системы, поскольку они наиболее просто и непосредственно связаны с физическими параметрами системы, выбираемыми при ее проектировании. Это обстоятельство является одной из причин интереса к коэффициентным методам оценки устойчивости и качества динамических систем [1].

Коэффициентные методы позволяют получить пусть и приближенные в некотором смысле, но простые соотношения, позволяющие связать (обычно некоторыми неравенствами) показатели качества САУ произвольного порядка и искомые параметры регулятора.

Одним из широко используемых при проектировании САУ критериев является максимальная степень устойчивости системы. Известно, что системы, синтезированные по этому критерию, при прочих равных условиях, обладают более высоким быстродействием, меньшим перерегулированием и большим запасом устойчивости [1].

Синтезу линейных регуляторов, обеспечивающих максимальную степень устойчивости в стационарных САУ, посвящены работы [2–6]. В большинстве из них используется подход, предложенный в [3, 4], где используются полиномы, как правило, нормированные по определенному параметру. Для решения задачи обеспечения максимальной степени устойчивости представляет интерес также применение метода нелинейного программирования [5]. Однако получаемые в [5] системы уравнений позволяют аналитически находить максимальную степень устойчивости и обеспечивающие ее параметры регулятора только для систем низкого порядка, а для сложных САУ приходится применять численные методы синтеза.

Таким образом, представляет интерес решение на основе коэффициентного метода задачи максимизации степени устойчивости САУ произвольного порядка выбором соответствующих параметров стандартного пропорционально-интегрального (ПИ) регулятора. Заметим, что наряду с максимизацией степени устойчивости САУ необходимо также гарантировать в ней и требуемую точность управления, определяемую величиной добротности системы.

Постановка задачи

Пусть структурная схема САУ, включающая объект управления $W_{ОУ}$ и регулятор $W_Р$, имеет вид, показанный на рис. 1, где g – входное воздействие; ε – ошибка системы; u – управляющее воздействие; y – выходной сигнал системы. Объект управления описывается передаточной функцией

$$W_{ОУ}(s)=\frac{k_{ОУ}}{\sum_{i=0}^{z} d_i s^i},$$

где d_i – коэффициенты характеристического полинома; $k_{ОУ}$ – коэффициент передачи объекта управления, s – оператор Лапласа; z=1,2,3...

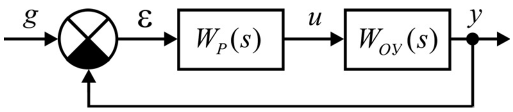

Рис. 1. *Структурная схема САУ*

Передаточная функция ПИ-регулятора имеет вид

$$W_p(s)=\frac{k_1 s+k_0}{s},$$

где k_0 и k_1 – настраиваемые параметры регулятора.

Тогда характеристический полином САУ может быть представлен в виде

$$A(s)=s\sum_{i=0}^{z} d_i s^i + k_{OY}(k_1 s+k_0).$$

Необходимо выбрать такие значения параметров k_0 и k_1, которые на основе достаточных условий коэффициентного метода [1] обеспечивают близкую к максимальной (квазимаксимальную) степень устойчивости $\eta^*_{\max}$ и заданную добротность D системы управления. Полюсы передаточной функции замкнутой САУ должны лежать левее вертикальной прямой, проходящей через точку $(-\eta^*_{\max},j0)$, рис. 2.

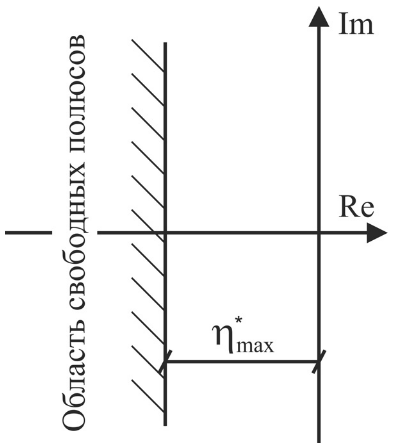

Рис. 2. *Расположение полюсов САУ*

Коэффициентные оценки устойчивости САУ

Рассмотрим линейную стационарную непрерывную систему с характеристическим полиномом

$$A(s)=a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1}+...+a_0, \quad a_n>0. \tag{1}$$

Введем вспомогательные параметры λ_i, образуемые четверками рядом стоящих коэффициентов (1):

$$\lambda_i=\frac{a_{i-1}a_{i+2}}{(a_i a_{i+1})}, \quad i=\overline{1,n-2}. \tag{2}$$

В соответствии с (2) $\lambda_1=\dfrac{a_0 a_3}{a_1 a_2}$; $\lambda_2=\dfrac{a_1 a_4}{a_2 a_3}$ и т. д.

Указанные параметры λ_i, называются показателями устойчивости [1]. Из [1] известно, что для устойчивости системы с характеристическим полиномом (1) достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$\lambda_i<\lambda^*\approx 0{,}465, \ \forall\ i=\overline{1,n-2}, \tag{3}$$

$$\lambda_i+\lambda_{i+1}<\lambda^{**}\approx 0{,}89, \ \forall\ i=\overline{1,n-3}. \tag{4}$$

Достаточные условия устойчивости являются основным математическим аппаратом при обеспечении устойчивости в методах синтеза на основе характеристического уравнения. Их простота позволяет строить хорошо алгоритмизируемые процедуры синтеза, а некоторая избыточность способствует получению устойчивости с запасом, всегда необходимым при проектировании реальных систем.

Оценка снизу максимальной степени устойчивости

В [1] предложены достаточные условия заданной степени устойчивости η, использующие коэффициенты характеристического полинома САУ

$$\begin{cases}\dfrac{a_{i-1}a_{i+2}}{[a_i-a_{i+1}(n-i-1)\eta][a_{i+1}-a_{i+2}(n-i-2)\eta]}<\lambda^*,\\ \quad k=\overline{1,n-2};\\ a_l-a_{l+1}(n-l-1)\eta\ge 0, \quad l=\overline{1,n-1};\\ a_0-a_1\eta+\dfrac{2a_2\eta^2}{3}\ge 0.\end{cases} \tag{5}$$

Выполнение этих условий гарантирует расположение корней характеристического полинома (1) левее вертикальной прямой, проходящей через точку $(-\eta,j0)$. Очевидно, что увеличение η в указанных условиях позволяет найти его максимальное значение, которое будем рассматривать как оценку снизу степени устойчивости системы. Обозначим ее через η^*.

Показатель η^* предлагается использовать для параметрического синтеза линейного регулятора САУ коэффициентным методом. Задачей синтеза в этом случае является выбор настроек ПИ-регулятора $\bar{k}^*$, при которых достигается максимум η^*. Обозначим его через $\eta^*_{\max}$. Таким образом, $\eta^*_{\max}=\max\limits_{\bar{k}}\eta^*$, где $\eta^*_{\max}$ – оценка снизу максимальной степени устойчивости. Она является своего рода квазимаксимальной степенью устойчивости САУ.

Очевидно, что определить не оценочное, а реальное значение максимальной степени устойчивости можно, например, в результате непосредственного вычисления корней полинома (1) САУ с синтезированным регулятором.

Введем следующие обозначения

$$\lambda_i(\eta)=\frac{a_{i-1}a_{i+2}}{[a_i-a_{i+1}(n-i-1)\eta][a_{i+1}-a_{i+2}(n-i-2)\eta]},$$
$$k=\overline{1,n-2}; \tag{6}$$

$$f_l(\eta)=a_l-a_{l+1}(n-l-1)\eta, \ l=\overline{1,n-1};$$

$$g(\eta)=a_0-a_1\eta+\frac{2a_2\eta^2}{3}.$$

Перепишем систему неравенств (5) в следующем виде

$$\begin{cases} \lambda_i(\eta) < \lambda^*, & i = \overline{1,\ n-2}; \\ f_l(\eta) \ge 0, & l = \overline{1,\ n-1}; \\ g(\eta) \ge 0. \end{cases} \quad (7)$$

При η=0 условия (7) соответствуют достаточным условиям устойчивости (3).

Таким образом, для определения квазимаксимальной степени устойчивости достаточно (n–2) раз решить следующую систему

$$\begin{cases} \lambda_i(\eta) = \lambda^*, & i \in \overline{1,\ n-2}; \\ \lambda_j(\eta) < \lambda^*, & j = \overline{1,\ n-2},\ \ j \ne i; \\ f_l(\eta) \ge 0, & l = \overline{1,\ n-1}; \\ g(\eta) \ge 0. \end{cases} \quad (8)$$

находя на каждом шаге максимальное значение η^*, и после этого выбрать из них максимальное.

Поскольку найденное значение $\eta^*_{\max}$ является квазимаксимальной степенью устойчивости САУ, следует заметить, что все корни синтезированной системы будут лежать левее вертикальной прямой, проведенной через точку $(-\eta^*_{\max}, j0)$.

Алгоритм параметрического синтеза регулятора

Для заданной передаточной функции объекта управления $W_{OY}(s)$ и функции ПИ-регулятора $W_P(s)$ величина добротности по скорости будет определяться выражением

$$D = \frac{k_0 k_{OY}}{d_0}. \quad (9)$$

Обозначим вектор настроечных параметров ПИ-регулятора $\bar{k}=[k_0,k_1]$. Таким образом, система (8) примет вид:

$$\begin{cases} \lambda_i(\bar{k},\eta) = \lambda^*, & i = \overline{1,\ n-2}; \\ \lambda_j(\bar{k},\eta) < \lambda^*, & j = \overline{1,\ n-2},\ \ j \ne i; \\ f_l(\bar{k},\eta) \ge 0, & l = \overline{1,\ n-1}; \\ g(\bar{k},\eta) \ge 0. \end{cases} \quad (10)$$

Для ее решения авторами разработана блок-схема алгоритма параметрического синтеза ПИ-регулятора, рис. 3.

Пример

Пусть объект управления задан передаточной функцией

$$W_{OY}(s) = \frac{k_{OY}}{d_3 s^3 + d_2 s^2 + d_1 s + d_0}, \quad (11)$$

где безразмерные коэффициенты имеют следующие значения: d_0=1, d_1=0,61, d_2=0,056, d_3=0,005, k_{OY}=1.

Необходимо выбрать параметры регулятора

$$W_p(s) = \frac{k_1 s + k_0}{s}, \quad (12)$$

обеспечивающего системе квазимаксимальную степень устойчивости и заданную точность. Пусть в соответствии с требованиями к точности необходимо обеспечить в системе добротность D=10.

На основании (11) и (12) характеристический полином системы будет иметь вид

$$d_3 s^4 + d_2 s^3 + d_1 s^2 + (k_{OY} k_1 + d_0)s + k_{OY} k_0 = 0, \quad (13)$$

Из (9) определим первый коэффициент регулятора k_0=10 и, подставляя в (13) численные значения коэффициентов передаточной функции объекта управления, получим следующие коэффициенты характеристического полинома САУ: $a_0(k_1)$=10, $a_1(k_1)=k_1+1$, a_2=0,61, a_3=0,056, a_4=0,005.

В соответствии с (6) сформируем выражения для показателей устойчивости $\lambda_i(\bar{k},\eta)$:

$$\lambda_1(k_1,\eta) =$$

$$= \frac{10\cdot 0{,}056}{[(k_1+1) - 0{,}61(4-1-1)\eta][0{,}61-(4-1-2)\eta]} =$$

$$= \frac{0{,}56}{[(k_1+1) - 1{,}22\eta][0{,}61-\eta]},$$

$$\lambda_2(k_1,\eta) =$$

$$= \frac{0{,}005(k_1+1)}{[0{,}61 - 0{,}056(4-2-1)\eta][0{,}056-(4-2-2)\eta]} =$$

$$= \frac{0{,}005(k_1+1)}{0{,}056[0{,}61 - 0{,}056\eta]},$$

где обозначим

$$(k_1+1) - 1{,}22\eta = f_1(\bar{k},\eta),\ \ 0{,}61 - 0{,}056\eta = f_2(\bar{k},\eta).$$

Согласно (10), для рассматриваемой задачи запишем систему

$$\begin{cases} \dfrac{0{,}56}{[(k_1+1)-1{,}22\eta][0{,}61-\eta]} = \lambda^*; & (14) \\ \dfrac{0{,}005(k_1+1)}{0{,}056[0{,}61-0{,}056\eta]} < \lambda^*; & (15) \\ (k_1+1) - 1{,}22\eta \ge 0; & (16) \\ 0{,}61 - 0{,}056\eta \ge 0; & (17) \\ 10 - (k_1+1)\eta + 0{,}407\eta^2 \ge 0. & (18) \end{cases}$$

Из (14) находим выражение $k_1(\eta)$ и подставляем его в (15)–(18). В результате получаем систему из четырех неравенств с одним неизвестным параметром η. В результате решения данной системы получаем значение η_1^*=2,29 и соответствующее ему значение параметра регулятора k_1=4,294. Из условия $\lambda_2(\bar{k},\eta)$=0,465 аналогично находим η_2^*=0,325 и соответствующее ему значение параметра регулятора k_1=29,821. Очевидно, что искомыми параметрами будут максимальное значение η_1^*=2,29 и k_1=4,294.

На рис. 4 изображена реакция системы на линейно-нарастающее входное воздействие $g(t)$ и переходные характеристики системы с регуляторами (рис. 5).

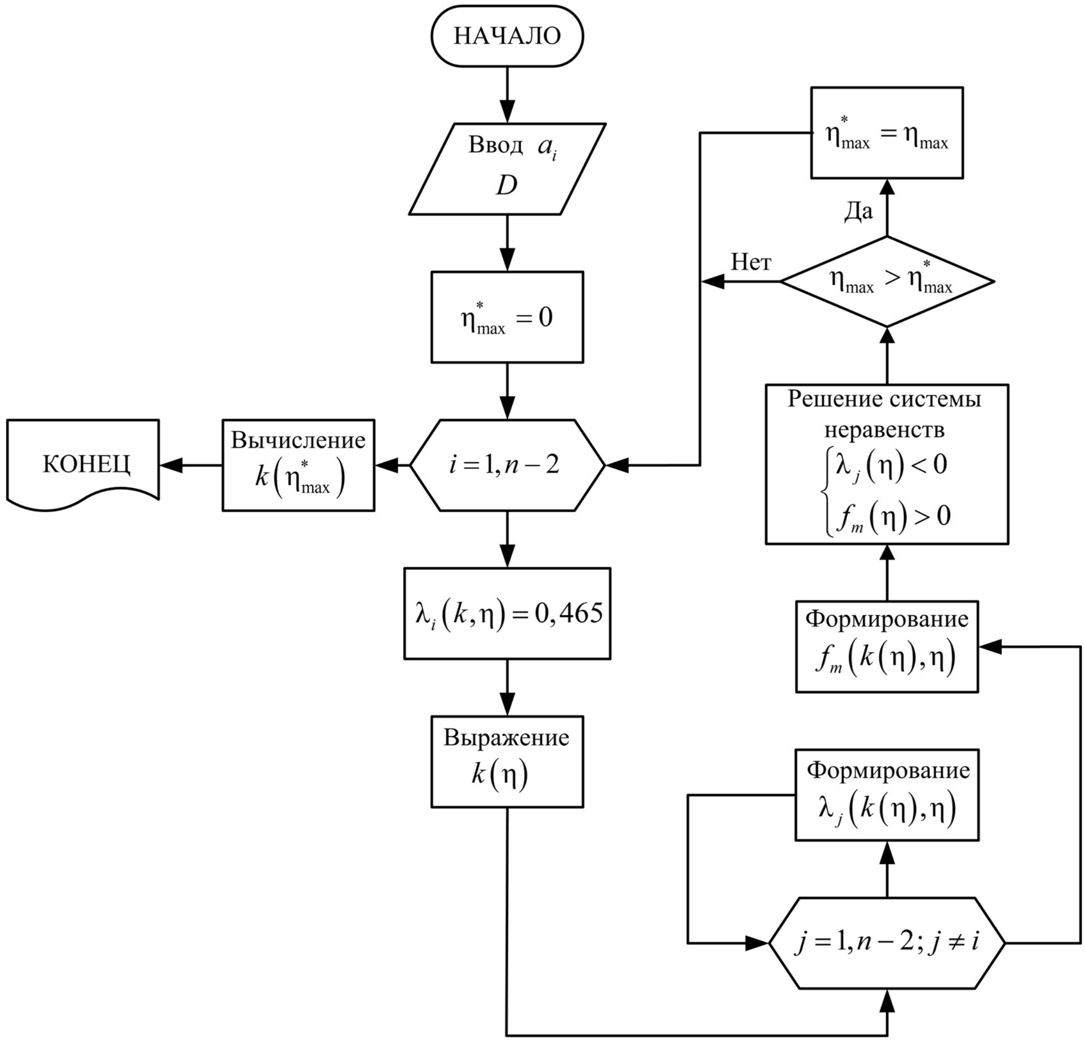

Рис. 3. *Блок-схема алгоритма параметрического синтеза ПИ-регулятора*

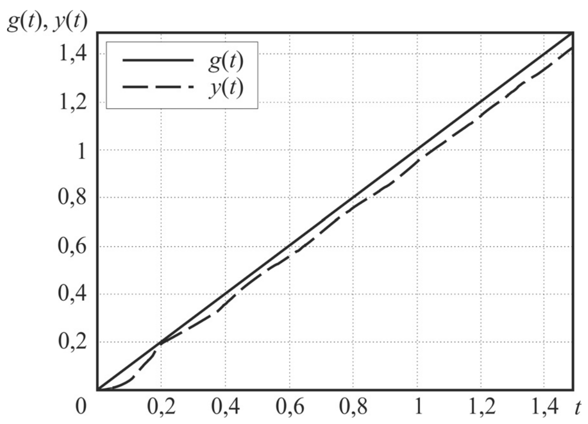

Рис. 4. *Графики изменения входного $g(t)$ и выходного $y(t)$ сигналов системы*

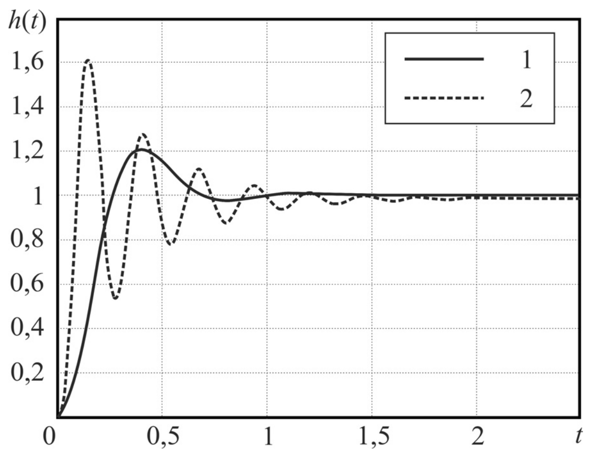

Рис. 5. *Переходные характеристики системы при: 1) η_1^*=2,29; 2) η_2^*=0,325*

Заметим, что при обоих значениях k_1 в системе гарантируется устойчивость и требуемая точность функционирования при реакции на линейно-нарастающее входное воздействие $g(t)$, рис. 4. Однако регулятор с коэффициентами, определенными из условия $\eta_1^*=2,29$ обеспечивает большее быстродействие, а также меньшее перерегулирование в системе по сравнению с регулятором, обеспечивающим $\eta_2^*=0,325$, что видно из рис. 5.

Выводы

1. Представлена методика параметрического синтеза ПИ-регулятора, обеспечивающего квазимаксимальную степень устойчивости и заданную добротность системы автоматического управления.
2. Устойчивость системы автоматического управления достигается путем расположения ее полюсов левее максимальной оценки снизу степени устойчивости системы, что обеспечивает максимальное быстродействие и снижает колебательность.
3. Алгоритм синтеза использует коэффициентные оценки показателей качества системы, на основе которых формируются упрощенные алгебраические соотношения между оценкой снизу степени устойчивости системы и коэффициентами характеристического полинома.
4. Полученные результаты рассмотрены и апробированы на численном примере.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Петров Б.Н., Соколов Н.И., Липатов А.В. и др. Системы автоматического управления объектами с переменными параметрами: Инженерные методы анализа и синтеза. – М.: Машиностроение, 1986. – 256 с.: ил.
2. Волков А.Н., Загашвили Ю.В. Метод синтеза систем автоматического управления с максимальной степенью устойчивости при наличии ограничений // Известия РАН. Сер. Теория и системы управления. – 1997. – № 3. – С. 12–19.
3. Шубладзе А.М. Способы синтеза систем управления максимальной степени устойчивости // Автоматика и телемеханика. – 1980. – № 1. – С. 28–37.
4. Шубладзе А.М. Методика расчета оптимальных по степени устойчивости ПИ-законов. I // Автоматика и телемеханика. – 1987. – № 4. – С. 16–25.
5. Татаринов А.В., Цирлин А.М. Задачи математического программирования, содержащие комплексные переменные, и предельная степень устойчивости линейных динамических систем // Известия РАН. Сер. Теория и системы управления. – 1995. – № 1. – С. 28–33.
6. Воронина Н.О., Татаринов А.В., Цирлин А.М. Предельная степень апериодической устойчивости и соответствующие ей настройки для типовых систем регулирования // Известия вузов. Сер. Приборостроение. – 1989. – № 3. – С. 26–32.

Поступила 28.03.2012 г.

УДК 681.5.015

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ В ФОРМЕ ДИСКРЕТНЫХ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ НА ОСНОВЕ ВЕЩЕСТВЕННОГО ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО МЕТОДА

В.А. Рудницкий, А.С. Алексеев, В.В. Курганкин

Томский политехнический университет
E-mail: alekseyev@tpu.ru

Для решения задачи параметрической идентификации линеаризуемых объектов использован вещественный интерполяционный метод. На основе аппарата чисел обусловленности рассмотрена возможность повышения точности определения структуры модели в виде дискретной передаточной функции.

Ключевые слова:
Идентификация, объект управления, числа обусловленности, вещественный интерполяционный метод.
Key words:
Identification, controlled object, condition numbers, real interpolation method.

Введение

В современной технике управления широко применяют различные цифровые устройства. Прогресс в развитии микроэлектроники привел к улучшению основных качественных и количественных показателей микроконтроллеров, что сделало возможным эффективно решать задачи адаптации, оптимизации и диагностики систем управления. В то же время успешное их решение невозможно без получения и использования адекватного математического описания объектов и систем.

Методы идентификации цифровых объектов во многих случаях удобно классифицировать по области описания математической модели: