УДК 681.5

М.И. Пушкарев, С.А. Гайворонский

Параметрический синтез робастного регулятора, обеспечивающего квазимаксимальную степень устойчивости интервальной системы

В реальных системах автоматического управления параметры объекта управления, как правило, являются интервальными, поскольку неточно известны или могут изменяться по заранее неизвестным законам в определенных пределах. Рассматривается методика синтеза линейного регулятора, максимизирующего степень робастной устойчивости системы с интервальными параметрами. В основу методики положены коэффициентные оценки показателей качества и достаточные условия заданной степени устойчивости системы.

Ключевые слова: робастный регулятор, максимальная степень устойчивости, показатели качества, коэффициентные оценки, интервальная система.

Постановка задачи. Одним из широко используемых при проектировании систем автоматического управления (САУ) критериев является критерий максимальной степени устойчивости. Известно, что системы, синтезированные по этому критерию, обладают более высоким быстродействием, меньшим перерегулированием и большим запасом устойчивости [1, 2]. Важным является также малая чувствительность систем максимальной степени устойчивости к параметрическим возмущениям в объекте управления.

Применение критерия максимальной степени устойчивости при синтезе систем с интервальными параметрами с точки зрения корневого подхода предполагает максимальное удаление от мнимой оси областей локализации ближайших к ней полюсов САУ. Этим в свою очередь решается задача уменьшения длительности переходных процессов в САУ при наихудших по данному показателю качества сочетаниях интервальных параметров системы. В результате в САУ обеспечивается максимальная степень робастной устойчивости, которая определяется минимальным расстоянием от мнимой оси до границы областей локализации полюсов системы.

В этой связи представляет интерес решение задачи выбора настроек линейного регулятора, максимизирующего степень робастной устойчивости САУ в условиях интервальной неопределенности параметров объекта управления.

Выбор метода решения задачи. Решать данную задачу предлагается на основе коэффициентного метода, который позволяет получить пусть и приближенные в некотором смысле, но простые соотношения, связывающие искомые параметры регулятора и коэффициентные показатели работоспособности САУ [3]. Эти показатели определяются некоторыми комбинациями коэффициентов характеристического полинома системы. Так, для линейной стационарной системы с характеристическим полиномом

$$A(s)=a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_0,\ a_n>0 \tag{1}$$

можно определить показатели устойчивости λ_i [3], которые образуются четверками рядом стоящих коэффициентов полинома (1)

$$\lambda_i=\frac{a_{i-1}a_{i+2}}{(a_i a_{i+1})},\ i=\overline{1,n-2}. \tag{2}$$

На основе коэффициентных показателей устойчивости (2) в [3] получены достаточные условия устойчивости линейных стационарных систем

$$\lambda_i<\lambda^*\approx 0{,}465,\ \forall\, i=\overline{1,n-2}\,. \tag{3}$$

Условия (3) могут быть использованы для выбора параметров регулятора, обеспечивающих устойчивость САУ. Их простота позволяет строить хорошо алгоритмизируемые процедуры синтеза, а некоторая избыточность способствует получению устойчивости с запасом, всегда необходимым при разработке реальных систем автоматического управления.

Условия квазимаксимальной степени устойчивости. Очевидно, что при проектировании САУ важно не только получить устойчивую систему на основе применения достаточных условий устойчивости (3), но и гарантировать в САУ определенное качество функционирования. С этой точки зрения могут быть полезными предложенные в [3] достаточные условия заданной степени устойчивости η, выполнение которых гарантирует, что время переходного процесса в САУ будет не более того, которое определяется величиной η.

$$\begin{cases} \dfrac{a_{i-1}a_{i+2}}{\left[a_i - a_{i+1}(n-i-1)\eta\right]\left[a_{i+1} - a_{i+2}(n-i-2)\eta\right]} < \lambda^*, \quad i=\overline{1,n-2}; \\ a_l - a_{l+1}(n-l-1)\eta \ge 0, \quad l=\overline{1,n-1}; \\ a_0 - a_1\eta + \dfrac{2a_2\eta^2}{3} \ge 0. \end{cases} \tag{4}$$

Выполнение условий (4) при этом обеспечивает расположение корней характеристического полинома (1) левее вертикальной прямой, проходящей через точку $(-\eta, j0)$.

Очевидно, что увеличение η в (4) позволяет найти его максимальное значение, которое можно рассматривать как оценку снизу степени устойчивости системы. Обозначим ее через η^*. Задачей синтеза регулятора при этом является выбор его настроек $\bar{k}^*$, при которых достигается максимум η^*. Обозначим этот максимум через $\eta^*_{\max}$. Таким образом, $\eta^*_{\max} = \max\limits_{\bar{k}} \eta^*$, где $\eta^*_{\max}$ – оценка снизу максимальной степени устойчивости. Она является своего рода квазимаксимальной степенью устойчивости САУ.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{cases} \lambda_i(\bar{\mathrm{k}},\eta) = \dfrac{a_{i-1}(\bar{k})a_{i+2}(\bar{k})}{\left[a_i(\bar{k}) - a_{i+1}(\bar{k})(n-i-1)\eta\right]\left[a_{i+1}(\bar{k}) - a_{i+2}(\bar{k})(n-i-2)\eta\right]}, \; i=\overline{1,n-2}; \\ f_l(\bar{\mathrm{k}},\eta) = a_l(\bar{k}) - a_{l+1}(\bar{k})(n-l-1)\eta, \; l=\overline{1,n-1}; \\ g(\bar{\mathrm{k}},\eta) = a_0(\bar{k}) - a_1(\bar{k})\eta + \dfrac{2a_2(\bar{k})\eta^2}{3}. \end{cases} \tag{5}$$

Увеличение η в каждом выражении $\lambda_i(\eta)$ из (5) путем изменения настроек регулятора возможно до значения, при котором $\lambda_i(\bar{k},\eta) = \lambda^*, \; i=\overline{1,n-2}$. Таким образом, для определения квазимаксимальной степени устойчивости и соответствующих ей настроек регулятора $\bar{k}^*$ достаточно (*n*–2) раз решить следующую систему:

$$\begin{cases} \lambda_i(\bar{k},\eta) = \lambda^*, \; i=\overline{1,n-2}; \\ \lambda_j(\bar{k},\eta) < \lambda^*, \; j=\overline{1,n-2}, \; j \ne i; \\ f_l(\bar{k},\eta) \ge 0, \; l=\overline{1,n-1}; \\ g(\bar{k},\eta) \ge 0, \end{cases} \tag{6}$$

находя на каждом шаге $\eta^*_{\max}$, и после этого выбрать из них максимальное.

Интервальное расширение условия квазимаксимальной степени устойчивости. В случае интервальной неопределенности параметров системы приведем ее характеристический полином (1) к виду

$$A(s) = [a_n]s^n + [a_{n-1}]s^{n-1} + \ldots + [a_0],$$

$$\underline{a_i}(\bar{k}) \le a_i(\bar{k}) \le \overline{a_i}(\bar{k}), \; i=\overline{0,n}.$$

На основании (2), (3) с учетом интервальности коэффициентов полинома (1) запишем достаточные условия робастной устойчивости системы [4]:

$$\frac{\overline{a_{i-1}}\ \overline{a_{i+2}}}{\left(\underline{a_i}\ \underline{a_{i+1}}\right)}<0{,}465,\ i=\overline{1,n-2}.$$

Очевидно, что при наличии в системе интервальных параметров для проектировщика представляет интерес не столько обеспечение робастной устойчивости САУ, сколько получение в ней определенного робастного качества. Поэтому для синтеза робастного регулятора, обеспечивающего в интервальной системе квазимаксимальную степень устойчивости, применим интервальный анализ к условиям (6). Очевидно, что данные условия должны выполняться при любых значениях интервальных параметров системы из известных интервалов. Поэтому в $\lambda_i\left(\bar{k},\eta\right)$ необходимо задавать такие значения интервальных коэффициентов, при которых $\lambda_i\left(\bar{k},\eta\right)$ принимают максимальные значения. Относительно $f_l\left(\bar{k},\eta\right)$ и $g\left(\bar{k},\eta\right)$ заметим, что в них следует подставлять те значения интервальных коэффициентов, которые доставляют минимум этим выражениям. Таким образом, условия (6) примут вид

$$\begin{cases}\dfrac{\overline{a_{i-1}(\bar{k})}\,\overline{a_{i+2}(\bar{k})}}{\left[\underline{a_i(\bar{k})}-a_{i+1}(\bar{k})(n-i-1)\eta\right]\left[a_{i+1}(\bar{k})-\overline{a_{i+2}(\bar{k})}(n-i-2)\eta\right]}=\lambda^*,\ i=\overline{1,n-2};\\ \dfrac{\overline{a_{j-1}(\bar{k})}\,\overline{a_{j+2}(\bar{k})}}{\left[\underline{a_j(\bar{k})}-a_{j+1}(\bar{k})(n-j-1)\eta\right]\left[a_{j+1}(\bar{k})-\overline{a_{j+2}(\bar{k})}(n-j-2)\eta\right]}<\lambda^*,\ j=\overline{1,n-2},\ j\neq i;\\ \underline{a_l(\bar{k})}-\overline{a_{l+1}(\bar{k})}(n-l-1)\eta\geq 0,\quad l=\overline{1,n-1};\\ \underline{a_0(\bar{k})}-\overline{a_1(\bar{k})}\eta+\dfrac{2\underline{a_2(\bar{k})}\eta^2}{3}\geq 0.\end{cases}\qquad(7)$$

Относительно коэффициентов $a_{i+1}(\bar{k})$ и $a_{j+1}(\bar{k})$ установлено, что они для выполнения указанных выше требований к функциям $\lambda_i\left(\bar{k},\eta\right)$ и $f_l\left(\bar{k},\eta\right)$ могут принимать как минимальные, так и максимальные значения. Поэтому следует решать систему (7), подставляя в выражения $\lambda_i\left(\bar{k},\eta\right)=\lambda^*$, $\lambda_j\left(\bar{k},\eta\right)<\lambda^*$ и $f_l\left(\bar{k},\eta\right)$ оба предела указанных коэффициентов.

Таким образом, для определения настроек регулятора необходимо сформировать и решить систему (7) для следующих полиномов, определяющих вершины его параметрического многогранника:

$$D_1(s)=\overline{a_0}+\underline{a_1}s+\underline{a_2}s^2+\overline{a_3}s^3+\overline{a_4}s^4+\underline{a_5}s^5+\underline{a_6}s^6+\ldots,$$

$$D_2(s)=\overline{a_0}+\underline{a_1}s+\overline{a_2}s^2+\overline{a_3}s^3+\underline{a_4}s^4+\overline{a_5}s^5+\overline{a_6}s^6+\ldots,$$

$$D_3(s)=\overline{a_0}+\overline{a_1}s+\underline{a_2}s^2+\underline{a_3}s^3+\overline{a_4}s^4+\overline{a_5}s^5+\underline{a_6}s^6+\ldots,$$

$$D_4(s)=\overline{a_0}+\overline{a_1}s+\underline{a_2}s^2+\overline{a_3}s^3+\overline{a_4}s^4+\underline{a_5}s^5+\overline{a_6}s^6+\ldots,$$

$$D_5(s)=\underline{a_0}+\overline{a_1}s+\overline{a_2}s^2+\underline{a_3}s^3+\underline{a_4}s^4+\overline{a_5}s^5+\overline{a_6}s^6+\ldots,$$

$$D_6(s)=\underline{a_0}+\overline{a_1}s+\overline{a_2}s^2+\underline{a_3}s^3+\overline{a_4}s^4+\overline{a_5}s^5+\underline{a_6}s^6+\ldots,$$

$$D_7(s)=\underline{a_0}+\underline{a_1}s+\overline{a_2}s^2+\overline{a_3}s^3+\underline{a_4}s^4+\underline{a_5}s^5+\overline{a_6}s^6+\ldots.$$

Заметим, что $D_1(s), D_3(s), D_5(s), D_7(s)$ являются полиномами Харитонова. Для проверки $g\left(\bar{k},\eta\right)\geq 0$ следует дополнительно рассмотреть полином

$$D_8(s)=\underline{a_0}+\overline{a_1}s+\underline{a_2}s^2+\overline{a_3}s^3+\underline{a_4}s^4+\overline{a_5}s^5+\underline{a_6}s^6+\ldots.$$

Очевидно, что количество условий в системе (7) зависит от порядка характеристического полинома САУ.

Предложенная процедура максимизации степени устойчивости САУ в определенных вершинах параметрического многогранника ее характеристического полинома апробирована при выборе настроек линейных П, ПИ, и ПИД-регуляторов интервальных систем управления.

Заключение. Проведенные в статье исследования основаны на представлении интервальной САУ как многорежимной системы (режимы работы определяются вершинами параметрического многогранника САУ) и применении к интервальной САУ достаточных условий заданной степени устойчивости стационарных систем. При этом показателем качества интервальной САУ выбрана степень робастной устойчивости, определяющая максимальную длительность переходного процесса САУ в наихудшем ее режиме.

Основным результатом данной статьи является предложенный подход к параметрическому синтезу линейного регулятора, максимизирующего степень робастной устойчивости интервальной САУ и обеспечивающего тем самым уменьшение времени переходного процесса САУ в наихудшем режиме системы. Важным результатом работы является также определение набора вершин параметрического многогранника интервальной САУ, в которых следует синтезировать робастный регулятор по критерию максимальной степени устойчивости или проводить анализ степени робастной устойчивости интервальной системы.

Литература

1. Волков А.Н. Метод синтеза систем автоматического управления с максимальной степенью устойчивости при наличии ограничений / А.Н. Волков, Ю.В. Загашвили // Известия РАН. Сер. Теория и системы управления. – 1997. – № 3. – С. 12–19.

2. Шубладзе А.М. Способы синтеза систем управления максимальной степени устойчивости // Автоматика и телемеханика. – 1980. – № 1. – С. 28–37.

3. Системы автоматического управления объектами с переменными параметрами: Инженерные методы анализа и синтеза / Б.Н. Петров, Н.И. Соколов, А.В. Липатов и др. – М.: Машиностроение, 1986. – 256 с.

4. Воронов В.С. Показатели устойчивости и качества робастных систем управления // Изв. РАН. Сер. Теория и системы управления. – 1995. – № 6. – С. 49–54.

Пушкарев Максим Иванович
Аспирант каф. автоматики и компьютерных систем Института кибернетики НИ ТПУ
Тел.: 8 (382-2) 41-91-06
Эл. почта: pushkarev@tpu.ru

Гайворонский Сергей Анатольевич
Канд. техн. наук, доцент каф. автоматики и компьютерных систем Института кибернетики НИ ТПУ
Тел.: 8 (382-2) 42-05-88
Эл. почта: saga@cc.tpu.edu.ru

Pushkarev M.I., Gaivoronsky S.A.

Robust controller parametric synthesis providing quazimaximal stability degree of interval system

On the practice in real systems the plant parameters, usually, are known not precisely or can change according to unforeknowable rules in specified limits. Such parameters are accepted to call interval parameters, and control systems – interval control systems. An approach to the robust controller synthesis maximizing interval system stability degree is suggested. The approach is based on coefficient estimations of stability indices, allowing interval systems stability degree maximization and estimate its lower bound.

Keywords: robust controller, maximal stability degree, quality indices, coefficient estimations, interval system.