УТВЕРЖДАЮ
Проректор-директор
Института кибернетики

________________ М.А. Сонькин

«___»____________2010 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

НАПРАВЛЕНИЕ ООП **230400 Информационные системы и технологии**

ПРОФИЛИ ПОДГОТОВКИ **Геоинформационные системы, Информационные системы в бизнесе**

КВАЛИФИКАЦИЯ (СТЕПЕНЬ)	**бакалавр**
БАЗОВЫЙ УЧЕБНЫЙ ПЛАН ПРИЕМА	**2010 г**.
КУРС **1** СЕМЕСТР **1**	
КОЛИЧЕСТВО КРЕДИТОВ	**5 кредитов ECTS**
ПРЕРЕКВИЗИТЫ	**–**
КОРЕКВИЗИТЫ	**МЕЦ.Б.2.1, МЕЦ.В.1, МЕЦ.Б.3**

ВИДЫ УЧЕБНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ И ВРЕМЕННОЙ РЕСУРС:

Лекции	**34 часа**
Практические занятия	**52 часа**
АУДИТОРНЫЕ ЗАНЯТИЯ	**86 часов**
САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА	**86 часов**
ИТОГО	**172 часа**
ФОРМА ОБУЧЕНИЯ	**очная**
ВИД ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ	**зачет,** **экзамен**
ОБЕСПЕЧИВАЮЩЕЕ ПОДРАЗДЕЛЕНИЕ	**кафедра ВМ**

ЗАВЕДУЮЩИЙ КАФЕДРОЙ ВМ ________________ **Арефьев К.П**

РУКОВОДИТЕЛЬ ООП ________________ **Дмитриева Е.А.**

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ ________________ **Подскребко Э.Н.**

2010г.

1. ЦЕЛИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Целями преподавания дисциплины являются:

- формирование представления о месте и роли математики в современной науке, технике и производстве;
- воспитание математической культуры;
- развитие логического мышления и способности оперирования с абстрактными объектами, овладение техникой математических рассуждений и доказательств;
- формирование первичных навыков научного исследования и самостоятельной работы;
- освоение логических основ курса и подготовка к их использованию при изучении других математических, естественнонаучных и специальных дисциплин, а также в профессиональной деятельности.

Поставленные цели полностью соответствуют целям (Ц1–Ц5) ООП.

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ООП

Дисциплина «Линейная алгебра и аналитическая геометрия» (МЕЦ.Б.2.2) является базовой математического и естественно-научного цикла (Б.2.1).

Для её успешного усвоения необходимы математические **знания** и **умения** на уровне среднего образования, а именно: свободно оперировать с простыми дробями, целыми и дробными степенями, с формулами сокращенного умножения; строить основные элементарные функции, находить область определения; знать прогрессии, оперировать с логарифмами, с обратными функциями. **Владеть** навыками работы с вещественными числами, алгебраическими, тригонометрическими, логарифмическими и показательными функциями.

Пререквизитов данная дисциплина не имеет, поскольку является первой обязательной дисциплиной образовательной программы.

Кореквизиты: «Математический анализ» (МЕЦ.Б.2.1), «Математическая логика и теория алгоритмов» (МЕЦ.В.1), «Физика» (МЕЦ.Б.3).

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Основным планируемым результатом является:

применение базовых и специальных естественно-научных и математических знаний в области информатики и вычислительной техники, достаточные для комплексной инженерной деятельности (Р1).

В результате освоения дисциплины студент должен:

знать:

- основы линейной алгебры и аналитической геометрии (З.1.2);

уметь

- применять методы линейной алгебры и аналитической геометрии для решения практических задач (У.1.2).

владеть:

- методами линейной алгебры и аналитической геометрии (В.1.2).

В процессе освоения дисциплины у студентов развиваются следующие **общекультурные и профессиональные компетенции:**

1. Универсальные (общекультурные):

- владеет культурой мышления, способен к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей её достижения (ОК-1 ФГОС);
- использует основные законы естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применяет методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования (ОК-10).

2. Профессиональные:

- разрабатывать модели компонентов информационных систем, включая модели баз данных (ПК-4 ФГОС);
- разрабатывать компоненты программных комплексов и баз данных, использовать современные инструментальные средства и технологии программирования (ПК-5 ФГОС);
- обосновывать принимаемые проектные решения, осуществлять постановку и выполнять эксперименты по проверке их корректности и эффективности (ПК-6 ФГОС).

4. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

4.1 Аннотированное содержание разделов дисциплины:

Раздел 1. Элементы линейной алгебры

Матрицы. Матрицы частного вида. Линейные операции над матрицами и их свойства. Умножение матриц. Транспонирование матриц.

Определители. Свойства определителей. Миноры, алгебраические дополнения. Вычисление определителей.

Обратная матрица. Теорема об обратной матрице. Решение матричных уравнений.

Ранг матрицы. Вычисление ранга матриц методом элементарных преобразований. Теорема о базисном миноре. Критерий равенства нулю определителя.

Системы линейных уравнений. Основные понятия и определения. Критерии совместности и единственности решения. Матричный способ решения. Метод Крамера.

Метод Гаусса решения произвольной системы линейных уравнений.

Системы линейных однородных уравнений. Критерий существования нетривиальных решений. Свойства решений систем линейных однородных уравнений. Фундаментальная система решений. Структура общего решения.

Раздел 2. Векторная алгебра

Основные понятия векторной алгебры. Линейные операции над векторами, их свойства.

Линейная зависимость и независимость векторов. Базис системы векторов. Теорема о разложении вектора по базису. Координаты вектора.

Системы координат. Декартова прямоугольная система координат. Проекция вектора на ось, свойства проекций. Направляющие косинусы вектора, свойство направляющих косинусов. Линейные операции над векторами, заданными в координатной форме. Критерий коллинеарности векторов. Задача о делении отрезка в заданном отношении.

Скалярное произведение векторов. Критерий ортогональности векторов. Вычисление скалярного произведения векторов через их координаты.

Векторное произведение векторов. Вычисление векторного произведения векторов через их координаты. Геометрический смысл векторного произведения.

Смешанное произведение векторов. Вычисление смешанного произведения векторов через их координаты. Геометрический смысл смешанного произведения. Критерий компланарности трёх векторов.

Раздел 3. Элементы теории линейных пространств и линейных операторов

Аксиоматическое определение линейного пространства. Примеры линейных пространств.

Линейная зависимость и независимость векторов. Размерность и базис линейного пространства. Теорема о разложении вектора по базису. Координаты вектора. Преобразование базиса. Преобразование координат вектора при преобразовании базиса.

Линейные подпространства. Критерий подпространства.

Линейные операторы. Матрица линейного оператора конечномерного линейного пространства. Связь координат вектора и координат его образа. Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к новому базису.

Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Характеристический многочлен линейного оператора. Теорема об инвариантности характеристического многочлена. Характеристические корни линейного оператора.

Диагонализируемость линейного оператора. Критерий диагонализируемости линейного оператора.

Раздел 4. Аналитическая геометрия

Понятие линий и поверхностей. Прямая на плоскости. Различные формы записи уравнений прямой на плоскости. Взаимное расположение прямых на плоскости.

Плоскость в пространстве. Различные формы записи уравнений плоскости. Взаимное расположение плоскостей.

Прямая в пространстве. Приведение общего уравнения прямой в пространстве к каноническому виду. Взаимное расположение прямых в пространстве. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве.

Кривые второго порядка: окружность, эллипс, гипербола и парабола; их геометрические свойства, уравнения и построение.

Приведение общего уравнения кривой второго порядка к каноническому виду. Построение кривых.

Поверхности второго порядка, их канонические уравнения. Исследование геометрического вида поверхностей второго порядка методом параллельных сечений. Построение поверхностей второго порядка.

Практические занятия

1. Входное тестирование.
2. Матрицы и действия над ними.
3. Определители.
4. Вычисление определителей с помощью теоремы Лапласа.

5. Обратная матрица. Системы линейных уравнений. Матричный способ решения. Метод Крамера.
6. Исследование систем линейных уравнений на совместность. Метод Гаусса.
7. Системы линейных однородных уравнений. Фундаментальная система решений.
8. Контрольная работа.
9. Коллоквиум по теоретическому материалу.
10. Простейшие задачи векторной алгебры. Линейные операции на множестве векторов.
11. Скалярное произведение векторов.
12. Векторное и смешанное произведения векторов.
13. Контрольная работа.
14. Контрольная работа по теоретическому материалу. Линейные пространства и подпространства.
15. Линейная зависимость и независимость векторов.
16. Базис и размерность линейного пространства.
17. Линейные операторы. Матрица линейного оператора и ее преобразование при переходе к новому базису.
18. Собственные числа и собственные векторы линейного оператора. Диагонализируемость линейного оператора.
19. Контрольная работа.
20. Прямая на плоскости.
21. Прямая на плоскости.
22. Плоскость в пространстве.
23. Прямая в пространстве. Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве.
24. Кривые второго порядка: приведение общего уравнения кривой второго порядка к каноническому виду, построение кривых.
25. Контрольная работа по теоретическому материалу. Поверхности второго порядка.
26. Контрольная работа.

4.2 Структура дисциплины по разделам и формам организации обучения приведена в таблице 1.

Таблица 1

Структура дисциплины по разделам и формам организации обучения

Название раздела/темы	Аудиторная работа (час)		СРС (час)	Контр.Р.	Итого
	Лекции	Пр. зан.			
1. Элементы линейной алгебры	8	18	20		46
2. Векторная алгебра	6	8	16		30
3. Элементы теории линейных пространств и линейных операторов	8	12	20		40
4. Аналитическая геометрия	12	14	30		56
Итого	34	52	86		172

4.3 Распределение компетенций по разделам дисциплины приведено в таблице 2.

Таблица 2.

Распределение по разделам дисциплины планируемых результатов обучения

№	Формируемые компетенции	Разделы дисциплины			
		1	2	3	4
1.	З.1.1.	+	+	+	+
2.	У.1.1.	+	+	+	+
3.	В.1.1.	+	+	+	+

5. ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

В таблице 3 приведено описание используемых образовательных технологий.

Таблица 3

Методы и формы организации обучения (ФОО)

ФОО / Методы	Лекц.	Пр. зан.	СРС
IT-методы	+	+	+
Дискуссия	+	+	
Работа в команде	+	+	+
Обучение на основе опыта		+	+
Опережающая самостоятельная работа		+	+
Поисковый метод		+	+
Исследовательский метод		+	+
Индивидуальное обучение		+	

6. ОРГАНИЗАЦИЯ И УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

6.1. Самостоятельную работу студентов (СРС) можно разделить на текущую и творческую.

Текущая СРС – работа с лекционным материалом, подготовка к практическим занятиям; опережающая самостоятельная работа; выполнение домашних заданий; изучение тем, вынесенных на самостоятельную проработку; подготовка к контрольным работам, зачету и экзамену.

Творческая проблемно-ориентированная самостоятельная работа (ТСР) – участие в математических олимпиадах.

6.2. Содержание самостоятельной работы студентов по дисциплине.

В процессе изучения дисциплины студенты должны самостоятельно овладеть следующими темами:

1. Вывод канонических уравнений кривых второго порядка;
2. Исследование поверхностей второго порядка методом параллельных сечений.

После каждого практического занятия студентам предлагается самостоятельно выполнить домашнее задание. Кроме этого, по каждому из четырёх разделов дисциплины студентам выдаётся индивидуальное домашнее задание.

6.3. Контроль самостоятельной работы

Оценка результатов самостоятельной работы организуется как единство двух форм: самоконтроль и контроль со стороны преподавателя.

Самоконтроль проводится с использованием списка задач, предлагаемых для подготовки к экзамену.

Контроль со стороны преподавателя заключается в том, что он

- следит за своевременным и правильным выполнением домашних заданий и индивидуальных домашних заданий
- проверяет усвоение самостоятельно изученного теоретического материала с помощью проведения контрольных работ.

6.4.Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов

Для самостоятельной работы студентов предлагаются сетевые образовательные ресурсы, представленные в корпоративном портале ТПУ (на сайте кафедры ВМ, персональных сайтах преподавателей), а также различные методические разработки и специальная учебная литература, имеющиеся в научно-технической библиотеке ТПУ.

7. СРЕДСТВА (ФОС) ТЕКУЩЕЙ И ИТОГОВОЙ ОЦЕНКИ КАЧЕСТВА ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Текущий и итоговый контроль оценки качества освоения дисциплины осуществляется на основе рейтинг-плана, в котором в соответствии с учебным и календарным планами указаны все формы отчетности.

Для организации текущего контроля полученных студентами знаний по данной дисциплине

- проверяется правильность выполнения домашних заданий и индивидуальных домашних заданий;
- по каждому разделу дисциплины проводятся контрольные работы по теоретическому и практическому материалу, причём количество вариантов каждой из контрольных работ превышает количество студентов в группе, что позволяет студентам работать индивидуально.

Для получения итоговой оценки качества освоения дисциплины проводится зачёт и экзамен. При сдаче зачёта проверяется знание студентами практического материала. В экзаменационных билетах предлагается ответить на два теоретических вопроса и решить три практические задачи.

Образцы домашних заданий, индивидуальных домашних заданий, заданий контрольных работ и экзаменационных билетов приведены в приложении 1.

8. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Основная литература.

1. Шерстнёва А.И., Янущик О.В., Пахомова Е.Г., Имас О.Н. Лекции по высшей алгебре. Учебное пособие. – Томск: Издательство Томского политехнического университета, 2010. – 88 с.

2. Шерстнёва А.И., Янущик О.В. Линейные пространства. Линейные операторы. Учебное пособие. – Томск: Издательство Томского политехнического университета, 2010. – 92 с.

3. Апатенок Р.Ф., Маркина А.М., Попова Н.В, Хейнман В.Б. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – Минск: Высшая школа, 1986. – 272 с.

4. Апатенок Р.Ф., Маркина А.М., Хейнман В.Б. Сборник задач по линейной алгебре и аналитической геометрии. – Минск: Высшая школа, 1990. – 286 с.

5. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Физматлит, 2008. – 312 с.

6. Икрамов Х.Д. Задачник по линейной алгебре. – СПб.: Лань, 2006.

7. Ильин В.А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра. – М.: Физматлит, 2007. – 280 с.

8. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Ч.2: Линейная алгебра. – М.: Физматлит, 2004. – 368 с.

9. Сборник задач по алгебре / Под ред. А. И. Кострикина. – М.: Физико-математическая литература, 2001. – 464 с.

10. Фаддеев Д. К. Лекции по алгебре. – СПб.: Лань, 2005. – 416 с.

11. Фаддеев, Д. К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре. – СПб.: Лань, 2008. – 288 с.

12. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. – М.: Физматлит, 2006. — 240 с.

13. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. – М.: Физматлит, 2009. — 224 с.

Дополнительная литература.

1. Арефьев К.П., Ивлев Е.Т., Тарбокова Т.В. Системы линейных уравнений. Учебное пособие. - Томск: изд. ТПУ, 1996.

2. Арефьев К.П., Ивлев Е.Т., Тарбокова Т.В. Векторная алгебра и аналитическая геометрия. Учебное пособие. - Томск: изд. ТПУ, 1996.

3. Арефьев К.П., Ефремова О.Н., Нагорнова А.И., Столярова Г.П., Харлова А.Н. Высшая математика. Ч.I: Учебное пособие. - Томск: изд. ТПУ, 2010.

4. Арефьев К.П., Нагорнова А.И., Столярова Г.П., Харлова А.Н. Высшая математика. Ч.I: Руководство к решению задач. Учебное пособие. - Томск: изд. ТПУ, 2009.

5. Арефьев К.П., Барышева В.К., Ивлев Е.Т., Пилипенко В.А. Элементы многомерной аналитической геометрии. Учебное пособие. - Томск: изд. ТПУ, 1999.

6. Кан Е.Х. Расчетные задания по теме «Линейная алгебра и аналитическая геометрия». - Томск: Ротапринт ТПИ, 1981.

7. Дячук Р.П. Методические указания и контрольные задания по теме «Векторная алгебра». - Томск.: Ротапринт ТПИ, 1989.

8. Барышева В.К., Пахомова Е.Г. Руководство к решению задач по аналитической геометрии (внутрикафедральное издание).

Internet-ресурсы:

1. Корпоративный портал ТПУ, персональный сайт А.И. Шерстнёвой http://portal.tpu.ru/SHARED/s/SHERSTNEVA.

2. Корпоративный портал ТПУ, персональный Internet-сайт Е.Г.Пахомовой, http://portal.tpu.ru/SHARED/p/PEG.

3. Корпоративный портал ТПУ, персональный Internet-сайт О.Н. Имас, http://portal.tpu.ru/SHARED/o/ONM.

4. Математический интернет-журнал «Exponenta», http://www.exponenta.ru

5. Математический интернет-портал «Вся математика», http://www.allmath.ru

6. Интернет-сайт Центра образовательных коммуникаций и тестирования профессионального образования, http://www.ctve.ru

7. Интернет-тест по математике, http://www.mathtest.ru

8. Учебники по математике (формат DJVU) , http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics.htm

10. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Лекционные занятия проводятся в специализированных аудиториях, оснащённых мультимедийной техникой.

Программа составлена на основе Стандарта ООП ТПУ в соответствии с требованиями ФГОС по направлению 230400 «Информационные системы и технологии».

Программа одобрена на заседании кафедры высшей математики,

протокол № __ от «__» ____________ 2010 г.

Авторы – доцент кафедры высшей математики Подскребко Эльвира Николаевна
доцент кафедры высшей математики Шерстнёва Анна Игоревна

Рецензент –

Приложение 1

ЗАДАНИЯ РУБЕЖНОГО КОНТРОЛЯ

Контрольная работа по теме «Основы линейной алгебры»

ВАРИАНТ 1

1. Найти произведение матриц: $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 4 & 0\\ 3 & 5 & -1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 3 & -4\\ 2 & -5\end{pmatrix}$.

2. Доказать, что система имеет единственное решение и найти его матричным методом:

$$\begin{cases}3x + 2y - z = 1\\ x + y - z = 4\\ 2x - y + 3z = -2\end{cases}$$

3. Доказать, что система имеет единственное решение и найти неизвестное x_1 по формулам Крамера:

$$\begin{cases}2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 4\\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1\\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0\\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 2\end{cases}$$

4. Доказать, что система имеет нетривиальные решения и найти фундаментальную систему решений:

$$\begin{cases}-3x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 7x_4 + 4x_5 = 0\\ -x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 0\\ 3x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 7x_4 - 5x_5 = 0\\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0\end{cases}$$

ВАРИАНТ 2

1. Найти произведение матриц: $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & -4 & -5 & 3\\ 2 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$.

2. Доказать, что система имеет единственное решение и найти его матричным методом:

$$\begin{cases}3x + 2y + z = 5\\ -x - y + 2z = 1\\ 4x + 3y + z = 6\end{cases}$$

3. Доказать, что система имеет единственное решение и найти неизвестное x_2 по формулам Крамера:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 = -5 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2 \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 6 \end{cases}$$

4. Доказать, что система имеет нетривиальные решения и найти фундаментальную систему решений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - x_3 + 5x_4 - 4x_5 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ -3x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 0 \\ -x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

ВАРИАНТ 3

1. Найти произведение матриц: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -2 \\ 3 & -3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 12 & -3 \\ 2 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$.

2. Доказать, что система имеет единственное решение и найти его матричным методом:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ 2x + 2y + 3z = -2 \\ x - 2y + z = 2 \end{cases}$$

3. Доказать, что система имеет единственное решение и найти неизвестное x_3 по формулам Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ -3x_1 + 7x_2 - x_3 + 4x_4 = -3 \\ 5x_1 - 9x_2 + 2x_3 + 7x_4 = 3 \\ 4x_1 - 6x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

4. Доказать, что система имеет нетривиальные решения и найти фундаментальную систему решений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 - 4x_5 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \\ - x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

ВАРИАНТ 4

1. Найти произведение матриц: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 3 & -5 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Доказать, что система имеет единственное решение и найти его матричным методом:

$$\begin{cases} 3x - 4y + 2z = 1 \\ 4x - 2y + z = 3 \\ 5x - y + 3z = 2 \end{cases}$$

3. Доказать, что система имеет единственное решение и найти неизвестное x_4 по формулам Крамера:

$$\begin{cases} 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 8 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

4. Доказать, что система имеет нетривиальные решения и найти фундаментальную систему решений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 - 5x_5 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

Контрольная работа по теме «Векторная алгебра.»

Вариант 1

1. Доказать, что векторы $\overline{\mathbf{p}} = \{0;1;2\}$, $\overline{\mathbf{q}} = \{1;0;1\}$, $\overline{\mathbf{r}} = \{-1;2;4\}$ образуют базис и найти координаты вектора $\overline{\mathbf{a}} = \{-2;4;7\}$ в этом базисе.
2. Найти координаты точек A и B, если известно, что точки $C(-15;12)$ и $D(-12;10)$ делят отрезок AB на три равные части.
3. Вершины пирамиды $ABCD$ имеют следующие координаты:

$$A(-4;2;2),\ B(2;-1;-1),\ C(2;0;-2),\ D(0;-3;0).$$

Найти: 1) Угол между векторами $\overline{AD}$ и $\overline{BD}$ (в градусах).
2) Высоту треугольника BCD, опущенную из вершины C.
3) Объем пирамиды $ABCD$.

Вариант 2

1. Доказать, что векторы $\overline{\mathbf{p}} = \{1;3;0\}$, $\overline{\mathbf{q}} = \{2;-1;1\}$, $\overline{\mathbf{r}} = \{0;-1;2\}$ образуют базис и найти координаты вектора $\overline{\mathbf{a}} = \{6;12;-1\}$ в этом базисе.
2. Найти координаты точек A и B, если известно, что точки $C(-2;-8)$ и $D(2;0)$ делят отрезок AB в отношении 3 : 2 : 1.
3. Вершины пирамиды $ABCD$ имеют следующие координаты:

$$A(-3;3;3),\ B(3;0;0),\ C(3;1;-1),\ D(1;-2;1).$$

Найти: 1) $\text{Пр}_{\overline{BD}}\overline{CB}$.

2) Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{AD}$ и $\overline{BC}$.

3) Высоту пирамиды $ABCD$, опущенную из вершины A.

Вариант 3

1. Доказать, что векторы $\overline{\mathbf{p}}=\{2;1;-1\}$, $\overline{\mathbf{q}}=\{0;3;2\}$, $\overline{\mathbf{r}}=\{1;-1;1\}$ образуют базис и найти координаты вектора $\overline{\mathbf{a}}=\{-1;4;6\}$ в этом базисе.
2. Найти координаты точек A и B, если известно, что точки $C(10;7)$ и $D(4;3)$ делят отрезок AB в отношении 2 : 2 : 1.
3. Вершины пирамиды $ABCD$ имеют следующие координаты:

$$A(-2;4;4),\ B(4;1;1),\ C(4;2;0),\ D(2;-1;2).$$

Найти: 1) Угол между векторами $\overline{BD}$ и $\overline{CB}$ (в градусах).

2) Площадь параллелограмма, построенного на $\overline{BC}$ и $\overline{CD}$.

3) Объем пирамиды, построенной на $\overline{AB}$, $2\overline{BC}$ и $\overline{CD}$.

Вариант 4

1. Доказать, что векторы $\overline{\mathbf{p}}=\{4;1;1\}$, $\overline{\mathbf{q}}=\{2;0;-3\}$, $\overline{\mathbf{r}}=\{-1;2;1\}$ образуют базис и найти координаты вектора $\overline{\mathbf{a}}=\{-9;5;5\}$ в этом базисе.
2. Найти координаты точек A и B, если известно, что точки $C(-6;21)$ и $D(-2;11)$ делят отрезок AB в отношении 1 : 2 : 1.
3. Вершины пирамиды $ABCD$ имеют следующие координаты:

$$A(-1;5;5),\ B(5;2;2),\ C(5;3;1),\ D(3;0;3).$$

Найти: 1) $\text{Пр}_{\overline{AB}}\overline{BC}$.

2) Площадь параллелограмма, построенного на $2\overline{BC}$ и $\overline{DC}$.

3) Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{BC}$, $1/3\overline{AB}$ и $0{,}5\overline{DB}$.

Контрольная работа по теме «Элементы теории линейных пространств и линейных операторов».

Вариант 1

1. Относительно базиса $e_1=\{1,0,0\}$, $e_2=\{0,1,0\}$, $e_3=\{0,0,1\}$ даны четыре вектора: $f_1=\{3,2,-4\}$, $f_2=\{4,1,-2\}$, $f_3=\{5,2,-3\}$, $x=\{9,5,-8\}$.

а) Доказать, что f_1, f_2, f_3 можно принять за новый базис.

б) Записать матрицу перехода от базиса e_i к базису f_i, и наоборот, от базиса f_i

к базису e_i. Сделать проверку.

в) Найти координаты вектора x в базисе f_i.

2. Исследовать на линейную зависимость систему векторов:

$$\mathrm{e}^{\mathbf{x}},\ \ \mathbf{x}\,\mathrm{e}^{\mathbf{x}},\ \ \mathbf{x}^2\,\mathrm{e}^{\mathbf{x}} \text{ на } \left(-\infty,\ +\infty\right).$$

3. Оператор φ пространства $\mathbb{R}^3$ задан своим действием на вектор $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)$:

$$\varphi\mathbf{x}=(4x_1-5x_2+2x_3,\ 5x_1-7x_2+3x_3,\ 6x_1-9x_2+4x_3).$$

а) Найти матрицу оператора в стандартном базисе пространства $\mathbb{R}^3$.

б) Определить, является ли оператор диагонализируемым. Если да – то указать его диагональную матрицу и базис из собственных векторов.

ВАРИАНТ 2

1. Относительно базиса $e_1=\{1,0,0\}$, $e_2=\{0,1,0\}$, $e_3=\{0,0,1\}$ даны четыре вектора:

$$f_1=\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right\},\ f_2=\{0,1,0\},\ f_3=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right\},\ \ x=\left\{-\sqrt{2},-2,\sqrt{2}\right\}.$$

а) Доказать, что f_1,f_2,f_3 образуют ортонормированный новый базис.

б) Записать матрицу перехода от базиса e_i к базису f_i, и наоборот, от базиса f_i к базису e_i.

в) Найти координаты вектора x в базисе f_i.

2. Исследовать на линейную зависимость систему векторов:

$$1,\ x,\ x^2 \text{ на } \left(-\infty,\ +\infty\right).$$

3. Оператор φ пространства $\mathbb{R}^3$ задан своим действием на произвольный вектор $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)$: $\varphi\mathbf{x}=(4x_1-2x_2+2x_3,\ \ 2x_2+2x_3,\ \ x_2+x_3)$.

а) Найти матрицу этого оператора в стандартном базисе пространства $\mathbb{R}^3$.

б) Определить, является ли оператор диагонализируемым. Если да – то указать его диагональную матрицу и базис из собственных векторов.

Вариант 3

1. а) Найти максимальное число линейно независимых векторов в системе $x_1=\{2,-1,3,4\}$, $x_2=\{1,5,1,3\}$, $x_3=\{-1,0,2,5\}$, $x_4=\{0,-6,4,6\}$, $x_5=\{1,6,-2,1\}$.

б) На основании полученных линейно независимых векторов построить новый ортонормированный базис.

в) Выбрать их в качестве базисных e_1,e_2,e_3,e_4 и записать матрицу перехода от базиса e_i к базису e_2,e_3,e_1,e_4.

2. Исследовать на линейную зависимость систему векторов:

$$1,\ \sin x,\ \cos x \text{ на } \left(-\infty,\ +\infty\right).$$

3. Оператор φ пространства $\mathbb{R}^3$ задан своим действием на произвольный вектор $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)$: $\varphi\mathbf{x}=(4x_1+5x_2-7x_3,\ \ -2x_2+4x_3,\ \ 3x_2+2x_3)$.

а) Найти матрицу этого оператора в стандартном базисе пространства $\mathbb{R}^3$.
б) Определить, является ли оператор диагонализируемым. Если да – то указать его диагональную матрицу и базис из собственных векторов.

Вариант 4

1. а) Найти максимальное число линейно независимых векторов в системе $x_1 = \{-1,2,0,7\}$, $x_2 = \{1,3,-1,0\}$, $x_3 = \{4,1,2,5\}$, $x_4 = \{4,6,1,12\}$, $x_5 = \{7,14,2,31\}$.
   б) На основании полученных линейно независимых векторов построить новый ортонормированный базис.
   в) Выбрать их в качестве базисных e_1, e_2, e_3 и записать матрицу перехода от базиса e_i к базису e_2, e_3, e_1.
2. Исследовать на линейную зависимость систему векторов:
   $1,\ x,\ e^x$ на $(-\infty,\ +\infty)$.
3. Оператор φ пространства $\mathbb{R}^3$ задан своим действием на произвольный вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$: $\varphi\mathbf{x} = (2x_1 + 3x_3,\ 10x_1 - 3x_2 - 6x_3,\ -x_1 - 2x_3)$.
   а) Найти матрицу этого оператора в стандартном базисе пространства $\mathbb{R}^3$.
   б) Определить, является ли оператор диагонализируемым. Если да – то указать его диагональную матрицу и базис из собственных векторов.

Контрольная работа по теме «Аналитическая геометрия»

ВАРИАНТ 1

1. Составить уравнение прямой, перпендикулярной $5x - 5y - 6 = 0$ и проходящей через точку пересечения прямых $2x - 5y - 7 = 0$ и $3x + 7y + 4 = 0$.
2. Записать уравнение прямой проходящей через точки $A(-3;2)$ и $B(-2;-5)$ и найти расстояние от точки $C(4;3)$ до этой прямой.
3. Записать уравнение плоскости, проходящей через две параллельные (доказать) прямые
$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{-2} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y + z - 2 = 0 \\ 2x - 3y - 7 = 0 \end{cases}.$$
4. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(4;-1;1)$ перпендикулярно вектору $\overline{N} = \{-1;2;-2\}$. Найти острый угол, который эта плоскость образует с плоскостью $x + z - 6 = 0$.
5. Прямая проходит через точку $M_0(3,7,2)$ параллельно вектору $\bar{l} = \{5;8;1\}$. Записать уравнение прямой и указать, при каком значении C прямая будет параллельна плоскости $2x - y + Cz - 2 = 0$.
6. Записать уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(-4;3;-3)$ и $M_2(2;-6;9)$. Доказать, что она пересекается с прямой $\dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z-7}{2}$.
   Найти точку пересечения и угол между ними.

Построить кривые

7. $x^2+9y^2-2x-54y+73=0$

8. $x^2-2x+4y+5=0$

ВАРИАНТ 2

1. Найти проекцию точки $P(-6, 4)$ на прямую, проходящую через две точки $M_1(3, 3)$ и $M_2(8, 7)$.
2. Записать уравнение прямой, отсекающей на оси Ox отрезок $a=2$ и составляющей с осью Ox угол $120°$. Найти тупой угол, который эта прямая образует с прямой $y=\frac{x}{\sqrt{3}}+1$.
3. Записать уравнение плоскости, проходящей через две пересекающиеся (доказать) прямые

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-5}{4} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x=3t+7 \\ y=2t+2 \\ z=-2t+1 \end{cases}.$$

4. Найти расстояние от точки $P(5;-3;3)$ до плоскости, проходящей через три точки $M_1(4;3;-1)$, $M_2(2;0;-3)$ и $M_3(-2;1;0)$.
5. Записать уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(12;9;1)$ и $M_2(4;3;-1)$. Доказать, что она перпендикулярна плоскости $4x+3y+z-2=0$.
6. Доказать, что прямые $\begin{cases} x=2t+1 \\ y=3t-2 \\ z=-6t+1 \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x+y-4z+2=0 \\ 4x-y-5z+4=0 \end{cases}$ скрещиваются. Найти расстояние между ними

Построить кривые

7. $9x^2-4y^2+18x+8y-31=0$

8. $y^2+6y-2x+3=0$

ВАРИАНТ 3

1. Точки $A(3, 2)$, $B(5, -2)$ и $C(1, 0)$ являются вершинами треугольника. Найти уравнение перпендикуляра, опущенного из вершины C на медиану, проведенную из вершины A.
2. Найти площадь квадрата, две стороны которого лежат на прямых $3x-4y-10=0$, $6x-8y+5=0$.
3. Записать уравнение плоскости, проходящей через линию пресечения плоскостей $3x-y+2z+9=0$, $x+z-3=0$ параллельно оси Oy.

4. Записать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1;0;-1)$, $M_2(-1;-12;2)$ и $M_3(2;-1;1)$. Найти угол, который эта плоскость образует с плоскостью $x+9y-3z+2=0$.
5. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(7;4;5)$ параллельно вектору $\bar{l}=\{5;1;4\}$. Доказать, что она пересекается с плоскостью $3x-y+2z-5=0$. Найти их точку пересечения и угол между ними.
6. Записать уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(-7;5;9)$ и $M_2(-1;3;17)$. Доказать, что она параллельна прямой $\begin{cases} 2x+2y-z-10=0 \\ x-y-z-22=0 \end{cases}$ и найти расстояние между ними.

Построить кривые

7. $x^2+y^2-2x-4y+1=0$
8. $x^2+2x-4y+5=0$

ВАРИАНТ 4

1. Даны вершины треугольника $A(1, 2)$, $B(-3, -2)$, $C(3, -2)$. Найти точку пересечения биссектрисы, проведенной из вершины B, и медианы, проведенной из вершины A.
2. Написать уравнения прямых, проходящих через точку $A(-1;1)$ под углом $45°$ к прямой $2x+3y-6=0$.
3. Найти точку Q, симметричную точке $P(3;-4;-6)$ относительно плоскости $x-y-4z-13=0$.
4. Записать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(-6;1;-5)$, $M_2(7;-2;-1)$, $M_3(10;-7;1)$ Доказать, что она будет параллельна плоскости $x-y-4z-7=0$ и найти расстояние между ними.
5. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(-2;1;-3)$ параллельно вектору $\bar{l}=\{3;-4;4\}$ и доказать, что она лежит в плоскости $4x-3y-6z-7=0$.
6. Записать уравнение прямой, проходящей через точки $A(1;0;-2)$ и $B(-4;2;-3)$ и доказать, что она скрещивается с прямой $\begin{cases} x-2y+3z+1=0 \\ 2x-z+5=0 \end{cases}$.

   Найти угол между ними.

Построить кривые

7. $x^2-9y^2-36y-72=0$
8. $y^2+2x+6y+11=0$

ПРИМЕРЫ ЗАДАНИЙ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ (ИДЗ)

Задания по теме «Основы линейной алгебры»

1. Дан определитель $D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 6 \\ 4 & 1 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

   а) Вычислить определитель, разложив его по элементам второй строки.

   б) Составить определитель Δ, заменив второй столбец определителя D линейной комбинацией 1-го и 3-го столбцов с коэффициентами $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$. Может ли $D = \Delta$?

   в) Вычислить определитель D, получив предварительно нули в какой-либо строке или столбце.

   г) Непосредственным вычислением убедиться, что определитель изменит знак, если поменять местами какие-либо две строки или столбца.

2. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ -3x_1 + 4x_3 + x_4 = -6 \\ x_1 + x_2 + 3x_4 = 3 \end{cases}$

   а) Доказать, что эта система имеет единственное решение.

   б) Неизвестное x_4 найти по формулам Крамера.

   в) Остальные неизвестные найти методом исключений неизвестных (методом Гаусса).

3. а) Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & -4 & 4 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$

   б) Доказать, что система уравнений $\begin{cases} -2x_1 + x_3 = -3 \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -3 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$

   имеет единственное решение и найти его матричным методом.

4. Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = -3 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 - 3x_5 = -3 \\ -x_1 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

   а) Доказать, что эта система совместна.

   б) Найти ее общее решение.

   в) Найти какое-либо ее частное решение.

5. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 0 \\ 14x_1 - 3x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$

а) Доказать, что эта система имеет ненулевые решения.
б) Найти ее общее решение.
в) Найти фундаментальную систему решений.

Задания по теме «Векторная алгебра»

1. Найти длину вектора $\bar{\mathbf{a}} = 3\bar{\mathbf{e}}_1 - 2\bar{\mathbf{e}}_2$, где $|\bar{\mathbf{e}}_1| = 1$, а $|\bar{\mathbf{e}}_2| = 2$ и векторы $\bar{\mathbf{e}}_1$ и $\bar{\mathbf{e}}_2$ образуют угол 30^0.
2. В плоскости XOY найти единичный вектор $\bar{\mathbf{s}}$, перпендикулярный вектору $\bar{\mathbf{a}} = \{2,1,-1\}$ и образующий острый угол с осью Ox.
3. Дан треугольник с вершинами в точках $A(1, -1, 2)$, $B(2, 1, -1)$, $C(-1, 1, 3)$. Найти его площадь и высоту, опущенную из вершины B.
4. Проверить, лежат ли четыре точки в одной плоскости: $A(1, -1, 2)$, $B(3, 4, 5)$, $C(2, -1, 1)$, $D(2, 1, 3)$.

Задания по теме
«Элементы теории линейных пространств и линейных операторов»

1. Доказать, что векторы $\bar{\mathbf{e}}_1 = \{1,2,-1\}$, $\bar{\mathbf{e}}_2 = \{2,1,1\}$, $\bar{\mathbf{e}}_3 = \{1,2,3\}$ образуют базис, и найти разложение в этом базисе вектора $\bar{\mathbf{a}} = \{-1,3,2\}$.
2. Относительно базиса $\bar{e}_1 = \{1;0;0\}$, $\bar{e}_2 = \{0;1;0\}$, $\bar{e}_3 = \{0;0;1\}$ заданы векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{x}$: $\bar{a}_1 = \{1;1;1\}$, $\bar{a}_2 = \{1;1;2\}$, $\bar{a}_3 = \{1;2;3\}$, $\bar{x} = \{6;9;14\}$.

   а) доказать, что векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ образуют базис пространства R_3;

   б) записать матрицу A перехода от базиса $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ к базису $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ и матрицу B перехода от базиса $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ к базису $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$;

   в) найти координаты вектора $\bar{x}$ в базисе $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$;

   г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора в базисах $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ и $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$.
3. Найти собственные векторы и собственные значения матрицы:

   а) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, б) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Задания по теме «Аналитическая геометрия»

1. Найти угловой коэффициент k прямой, проходящей через точки $M_1(1, 8)$ и $M_2(-1, 4)$; записать уравнение прямой в параметрическом виде.
2. Составить уравнения сторон и медиан треугольника с вершинами $A(3, 2)$, $B(5, -2)$, $C(1, 0)$.
3. Даны вершины треугольника $A(-10, -13)$, $B(-2, 3)$, $C(2, 1)$. Вычислить длину перпендикуляра, опущенного из вершины B на медиану, проведенную из вершины C.
4. Построить плоскости:
   а) $2x+3y+z-1=0$, б) $2x+y-4z=0$,
   в) $4x-3y+6=0$, г) $3y+z=0$.
5. Составить уравнение плоскости, которая проходит через ось Oy и точку $M(1, 4, -3)$.
6. Найти уравнение проекции прямой $\dfrac{x-1}{9}=\dfrac{y+1}{-4}=\dfrac{z}{-7}$ на плоскость $2x-y-3z+6=0$.
7. Точка $A(1, -3, 0)$ – вершина куба, одна из граней которого лежит на плоскости $3x+2y-6z+17=0$. Вычислить объем куба.
8. Установить, что три плоскости $2x-4y+5z-21=0$, $x-3z+18=0$, $6x+y+z-30=0$ имеют общую точку и вычислить ее координаты.
9. Расстояние между директрисами эллипса в 2 раза больше расстояния между его фокусами. Определить эксцентриситет эллипса. Построить эллипс.
10. Уравнения линий привести к каноническому виду. Построить линии:
    а) $x^2+y^2-2x-4y+1=0$, б) $4x^2+9y^2-18y-27=0$,
    в) $9x^2-4y^2-18x-16y-43=0$, г) $y^2+6y-2x+3=0$.
11. Изобразить линии:
    а) $y=\sqrt{1-x^2}$, б) $y=-\dfrac{3}{4}\sqrt{x^2-16}$,
    в) $x=3+\sqrt{-6(y-2)}$, г) $\rho=\dfrac{18}{4-5\cos\varphi}$.
12. Построить тело, ограниченное поверхностями:
    а) $z-a=-(x^2+y^2)$, $x^2+y^2=z^2$ б) $z=x^2-y^2$, $z=0$, $z=3$.