РАЗДЕЛ V

Интегральное исчисление функций одной переменной

Введение

«Ни для кого не секрет, что математику учат, решая задачи, а не наблюдая, как их решают другие».
М.Рид, В. Саймон, Методы современной физики, т. 1

С понятием «интеграл» в той или иной мере связана вся математика и естествознание. Операция интегрирования применяется при измерениях

– *площади* плоской фигуры и поверхности;

– *объема* и *массы* тела;

– *статических моментов* и *моментов инерции* плоской фигуры, материальной кривой и пространственного тела;

– при определении *центра тяжести*;

– при отыскании *силы*, *работы*, *электрического заряда*, *пути по известной скорости* и *скорости по ускорению*;

– при вычислении *вероятности случайного события* и *числовых характеристик случайных величин*;

– при решении дифференциальных уравнений, описывающих *зависимости между изменениями физических величин*

и во многих других, важных для приложений задачах.

Необходимым условием решения ряда прикладных задач является овладение методами отыскания неопределенного и определенного интегралов и грамотное применение их свойств.

Для дифференцирования функций достаточно механического следования правилам, а интегрирование функций требует проявления специфической изобретательности, которая может быть достигнута только практикой, выполнением упражнений и задач.

В данном разделе предлагается 16 вариантов, в каждом из которых 11 заданий (8 заданий в тестовой форме и 3 задачи), проверяющих знание основных понятий и умение реализовать решение типовых задач. Все примеры снабжены ответами.

Рассмотрим пояснение к нескольким задачам.

Задача 1. Запишите интегральную сумму Римана для функции $y = \ln(x+1)$ на промежутке [0, 3], n = 4. Приведите геометрическую иллюстрацию.

Решение. Вспомним определение интегральной суммы для функции $y = f(x)$ на $[a, b]$:

1. Разбиваем интервал интегрирования на n $(k = \overline{0,n})$ частей точками $x_0 = a, x_1, x_2, \ldots x_n = b$.

Это разбиение произвольное, выбрать точки x_k можно бесчисленным множеством способов.

2. На каждом частичном промежутке $[x_{k-1}, x_k]$ выбираем произвольную точку $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Заметим, что этот выбор можно сделать тоже бесчисленным множеством способов.

3. Составляем сумму $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k$, где $\Delta x_k - x_{k-1}$. Это и есть интегральная сумма для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, для заданного значения n.

Реализуем этот алгоритм для $y = \ln(x + 1)$ на $[0, 3]$ и $n = 4$.

1)

Пусть $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 1{,}5$, $x_3 = 2{,}5$, $x_4 = 3$. (Выбор произвольный!).

2) Пусть на $[0, 1]$ $\xi_1 = 0{,}5$;

на $\left[1, \frac{3}{2}\right]$ $\xi_2 = 1$;

на $\left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right]$ $\xi_3 = 2$;

на $\left[\frac{5}{2}, 3\right]$ $\xi_4 = 3$.

3) Найдем $f(\xi_1) = \ln(0{,}5 + 1) = \ln(1{,}5)$, $\Delta x_1 = x_1 - x_0 = 1$;

$f(\xi_2) = \ln(1 + 1) = \ln 2$, $\Delta x_2 = x_2 - x_1 = 0{,}5$;

$f(\xi_3) = \ln(2 + 1) = \ln 3$, $\Delta x_3 = x_3 - x_1 = 1$;

$f(\xi_4) = \ln(3 + 1) = \ln 4$, $\Delta x_4 = 0{,}5$.

4) Записываем интегральную сумму

$$\sum_{k=1}^{4} f(\xi_k)\Delta x_k = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + f(\xi_3)\Delta x_3 + f(\xi_4)\Delta x_4 =$$

$$= 1\cdot\ln\frac{3}{2} + 0{,}5\cdot\ln 2 + 1\cdot\ln 3 + 0{,}5\cdot\ln 4.$$

5) Приведём геометрическую иллюстрацию.

Для этого:

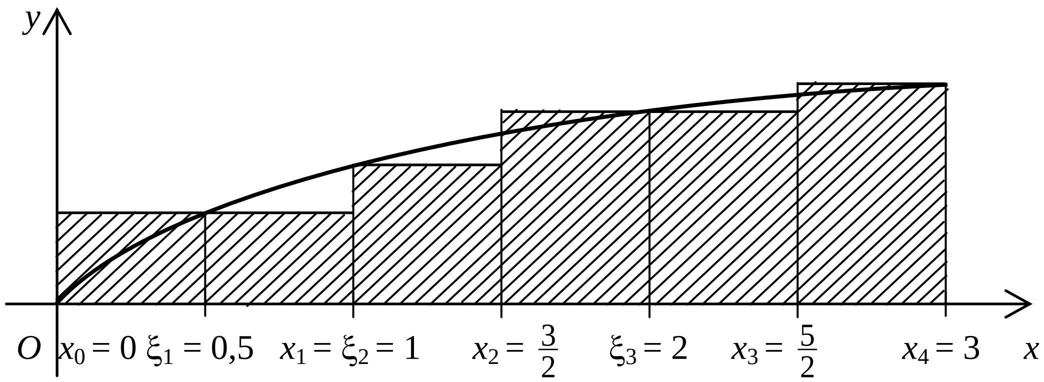
а) построим график функции $y = \ln(1 + x)$ на $[0, 3]$;

б) на отрезке $[0, 3]$ отметим точки x_0, x_1, x_2, x_3, x_4;

в) в каждой точке ξ_k построим $f(\xi_k)$;

г) произведению $f(\xi_k)\Delta x_k$ соответствует площадь прямоугольника с высотой $f(\xi_k)$ и основанием $[x_{k-1}, x_k]$;

д) сумма площадей всех четырех прямоугольников и будет равна записанной интегральной сумме.



З а м е ч а н и е . В вариантах задание формулируется проще: нужно из предложенных 4-х альтернативных ответов выбрать тот, который соответствует разобранным пунктам а, б, в, г.

Задача 2. Можно ли, не вычисляя интеграла $\int_0^2 \frac{x^2}{x-3}dx$, определить его знак?

Решение. Есть теорема: ”Пусть $f(x) \geq 0$, ($f(x) \leq 0$), на $[a, b]$, $a < b$ и интегрируема на этом интервале. Тогда $\int_a^b f(x)dx \geq 0$, $\left(\int_a^b f(x)dx \leq 0\right)$.

Если $f(x)$ – непрерывная функция на $[a, b]$, то неравенство для интеграла строгое, т. е. $\int_a^b f(x)dx > 0$, $\left(\int_a^b f(x)dx < 0\right)$.“

Исследуем знак подынтегральной функции $f(x) = \frac{x^2}{x-3}$ для $x \in [0, 2]$: $x^2 \geq 0$ для $\forall x$, $x - 3 < 0$ для $0 \leq x \leq 2$. Следовательно, $\frac{x^2}{x-3} \leq 0$ для $x \in [0, 2]$. Применяя теорему, утверждаем, что $\int_0^2 \frac{x^2}{x-3}dx < 0$.

Задача А7 из каждого варианта проверяет понимание логической структуры теоремы.

Решим аналогичную задачу.

Задача 3. Теорема о среднем значении для непрерывной функции формулируется так: ”Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда существует точка $c \in [a, b]$ такая, что $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$.“

Постройте диаграмму взаимного расположения следующих множеств:

A – множество непрерывных функций на $[a, b]$;

B – множество функций, для которых существует точка c такая, что $\int\limits_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$.

Решение. На основании теоремы о среднем утверждаем, что $A \subset B$.

Осталось исследовать, верна ли обратная теорема к теореме о среднем, т.е. что истинно: $A = B$ или $A \neq B$?

Приведем контрпример к обратному утверждению:

$f(x) = \begin{cases} -3x, & x \in [-1, 0); \\ x+1, & x \in [0, 2]. \end{cases}$ Функция имеет разрыв (скачок) в точке $x = 0$.

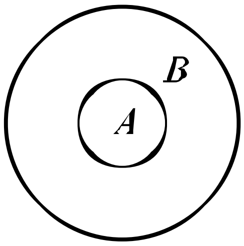
$f(c) = \dfrac{\int\limits_{-1}^{2} f(x)dx}{3} = \dfrac{5{,}5}{3} = \dfrac{11}{6}$. Найдём c:

$$\int\limits_{-1}^{2} f dx = \int\limits_{-1}^{0} (-3)dx + \int\limits_{0}^{2} (x+1)dx = 5{,}5, \quad b-a = 3;$$

$$x+1 = \frac{11}{6} \Leftrightarrow x = \frac{5}{6} \in [0, 2]; \qquad -3x = \frac{11}{6} \Leftrightarrow x = -\frac{11}{18} \in [-1, 0].$$

$\int\limits_{1}^{2} f(x)dx = f(c)\cdot(2+1)$ в двух точках: $c_1 = \dfrac{5}{6}$ и $c_2 = -\dfrac{11}{18}$.

Вывод: $A \subset B$, $A \neq B$.



З а м е ч а н и е: К этой же задаче вопрос можно было сформулировать по-другому: Заполните пропуск в высказывании: ”Непрерывность функции $f(x)$ на $[a, b]$ есть … условие для того, чтобы существовала точка $c \in [a, b]$ такая, что $\int\limits_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$.“

а) необходимое; б) достаточное; в) необходимое и достаточное.

Ответ: достаточное.

Таблица 5

Кодификатор раздела
«Интегральное исчисление функций одной переменной»

Код			Содержание	Проверяемое умение
раздел	тема	вопрос		
5			Интегральное исчисление функций одной переменной	
	5.1		Понятие неопределенного интеграла	
		5.1.1	Определение первообразной и неопределенного интеграла.	Уметь проверить для конкретных функций, является ли одна из них первообразной для второй.
		5.1.2	Свойства неопределенного интеграла. Таблица интегралов. Непосредственное интегрирование.	Уметь обосновать каждую формулу таблицы интегралов. Уметь понять структуру подынтегрального выражения, увидеть, к какому табличному интегралу можно привести данный, уметь провести тождественные преобразования подынтегрального выражения с выделением дифференциала новой переменной интегрирования.
	5.2		Основные методы интегрирования	
		5.2.1	Метод замены переменной в неопределенном интеграле.	Уметь разыскать выгодную подстановку в простейших случаях.
		5.2.2	Интегрирование по частям в неопределенном интеграле $\int u dv = uv - \int v du$	Уметь разбить подынтегральное выражение $f(x)dx$ на два множителя u и dv, учитывая: 1. dx всегда должно быть частью dv; 2. Уметь интегрировать dv, за v взять одну из первообразных 3. $\int v du$ должен быть проще, чем $\int u dv$

Таблица 5. Продолжение

	5.3		Некоторые классы интегрируемых функций	
		5.3.1	Многочлены. Теорема Безу. Основная теорема алгебры. Разложение многочлена с действительными коэффициентами на линейные и квадратичные множители.	Уметь узнать многочлен, определить его степень и разложить на линейные и квадратичные множители.
		5.3.2	Интегрирование простых (элементарных) рациональных дробей.	Уметь найти $\int \frac{dx}{(x-a)}$, $\int \frac{dx}{(x-a)^k}, \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)}$
		5.3.3	Теорема о разложении правильной рациональной дроби на элементарные. Интегрирование рациональных дробей.	Освоить алгоритм интегрирования рациональной дроби: 1. Определить, рациональная дробь правильная или неправильная. В случае неправильной дроби уметь выделить целую часть. 2. Уметь представить правильную рациональную дробь в виде суммы простых дробей. 3. Уметь найти неопределенные коэффициенты разложения. 4. Уметь применить свойство линейности для отыскания интеграла от рациональной дроби.
		5.3.4	Интегрирование некоторых тригонометрических функций.	Уметь применить универсальную подстановку, формулы понижения степени, уметь различить, какие из подстановок или тригонометрических преобразований применимы к конкретной функции и уметь выбрать наилучший способ.

Таблица 5. Продолжение

		5.3.5	Интегрирование некоторых иррациональных функций.	Уметь узнать алгебраическую иррациональную функцию и уметь подбирать подстановки, позволяющие рационализировать подынтегральное выражение.
	5.4		Понятие определенного интеграла	
		5.4.1	Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Вычисление площади криволинейной трапеции, работы переменной силы, пути при неравномерном движении, массы неоднородного стержня.	Уметь сформулировать, что определяет подынтегральная функция, если определенный интеграл равен площади, пути, массе, работе и т.д.
		5.4.2	Определение интегральной суммы Римана. Понятие определенного интеграла, его геометрический и физический смысл.	Уметь записать интегральную сумму Римана, если известна функция $f(x)$, промежуток, где она задана $[a, b]$ и число n частей, на которые разбит промежуток.
	5.5		Свойства определенного интеграла	
		5.5.1	Необходимое условие интегрируемости функции. Классы интегрируемых по Риману функций. Интегрируемость непрерывной функции, ограниченной функции с конечным числом точек разрыва.	Уметь записывать условное суждение с помощью терминов «необходимое условие», «достаточное условие», «необходимое и достаточное условие». Уметь исследовать конкретные функции на интегрируемость по Риману.

Таблица 5. Продолжение

		5.5.2	Линейность и аддитивность определенного интеграла. Теоремы об интегрировании неравенств и об оценке интеграла. Теорема о среднем.	Уметь применить теоремы об оценке, о среднем, об интегрировании неравенств для конкретных функций и интервалов.
	5.6		Формула Ньютона-Лейбница, ее применение для вычисления определенных интегралов.	
		5.6.1	Основная теорема дифференциального и интегрального исчисления о связи определенного и неопределенного интегралов.	Уметь доказать теорему. Уметь применить ее при вычислении интегралов.
		5.6.2	Формула Ньютона-Лейбница. Метод подстановки и метод интегрирования по частям в определенном интеграле.	Уметь вычислить определенный интеграл с помощью формулы Ньютона-Лейбница. Уметь применять основные методы интегрирования.
	5.7		Геометрические и механические приложения определенного интеграла.	
		5.7.1	Вычисление площадей плоских фигур в декартовых и полярных координатах.	Зная уравнения границ плоской фигуры, уметь правильно выбрать систему координат для отыскания площади фигуры, записать подынтегральное выражение, найти пределы интегрирования и вычислить интеграл.

Таблица 5. Окончание

		5.7.2	Определение и вычисление длины дуги плоской кривой.	Уметь записать формулу для вычисления длины кривой в декартовой и полярной системах координат и провести необходимые вычисления.
		5.7.3	Вычисление объемов тел по площади поперечного сечения и объемов тел вращения.	Уметь применять формулы для вычисления объемов и проводить вычисления интегралов.
		5.7.4	Общая схема применения определенного интеграла к решению прикладных задач.	Уметь записывать с помощью определенного интеграла формулы для вычисления площадей, длин дуг, объемов, работы переменной силы, пути при неравномерном движении, массы неоднородного стержня, заряда при переменной силе тока и др. и видеть общую закономерность этих формул.
	5.8		Несобственные интегралы	
		5.8.1	Несобственные интегралы с бесконечными пределами. Определение, свойства. Признаки сходимости интегралов от неотрицательных функций. Абсолютная и условная сходимость интеграла с бесконечными пределами.	Уметь вычислить несобственный интеграл на основании определения. Уметь исследовать сходимость интеграла, применяя признаки сходимости и эталонные интегралы.
		5.8.2	Несобственные интегралы от неограниченных функций. Теорема сравнения. Абсолютная и условная сходимость.	Уметь вычислить несобственный интеграл на основании определения. Уметь применить для исследования сходимости теорему сравнения.