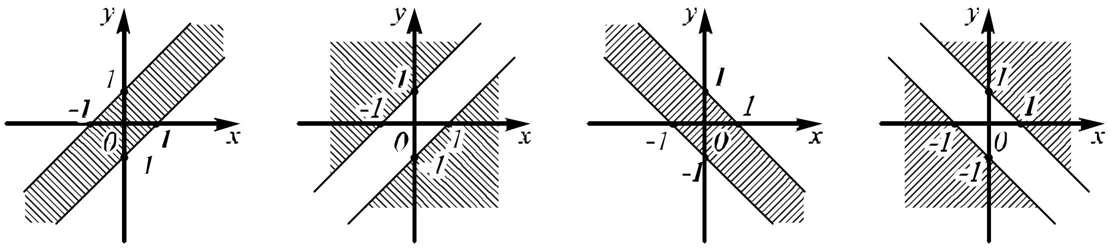
Вариант №9

Часть 1

A1 Найдите область определения функции $z = \arcsin(x+y)$.



1) 2) 3) 4)

A2 Найдите частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial \rho}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial \varphi}$ функции двух переменных $z = \rho^3 e^{\pi\cos\varphi}$.

1) $\dfrac{\partial z}{\partial \rho} = 3\rho^2 e^{\pi\cos\varphi}$, $\dfrac{\partial z}{\partial \varphi} = -\rho^3 \pi \sin\varphi e^{\pi\cos\varphi}$;

2) $\dfrac{\partial z}{\partial \rho} = 3\rho^2 e^{\pi\cos\varphi}$, $\dfrac{\partial z}{\partial \varphi} = \dfrac{\rho^3}{\pi} e^{\pi\sin\varphi}$;

3) $\dfrac{\partial z}{\partial \rho} = 3\rho^2$, $\dfrac{\partial z}{\partial \varphi} = -\rho^3 \pi \sin\varphi e^{\pi\cos\varphi}$;

4) $\dfrac{\partial z}{\partial \rho} = 3\rho^2$, $\dfrac{\partial z}{\partial \varphi} = \rho^3 e^{\pi\sin\varphi}$.

A3 Высота конуса $H = 8$см, радиус основания $R = 6$см. Как приблизительно изменится объем конуса при уменьшении высоты на 0,3см и увеличении радиуса основания на 0,3см? (Используйте дифференциал функции).

1) уменьшится на 5πсм^3; 2) увеличится на $13{,}2\pi$см^3;
3) увеличится на 6πсм^3; 4) уменьшится на 3πсм^3.

A4 Найдите косинус угла между градиентами функции $z = \ln\dfrac{y}{x}$ в точках $A\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{4}\right)$ и $B(1;1)$.

1) $\cos\varphi = \dfrac{5}{\sqrt{10}}$; 2) $\cos\varphi = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$; 3) $\cos\varphi = \dfrac{1}{2}$; 4) $\cos\varphi = \dfrac{1}{4}$.

A5 Дана функция $z=\ln\sin\frac{x}{\sqrt{y}}$. Найдите $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{dz}{dx}$, если $y=e^x$.

1) $\frac{\partial z}{\partial x}=\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)$, $\frac{dz}{dx}=\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)\cdot\frac{e^x}{\sqrt{y}}$;

2) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{y}}\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)$, $\frac{dz}{dx}=\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{y}}-\frac{xe^x}{2\sqrt{y^3}}\right)$;

3) $\frac{\partial z}{\partial x}=\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)$, $\frac{dz}{dx}=\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{y}}-\frac{xe^x}{2\sqrt{y^3}}\right)$;

4) $\frac{\partial z}{\partial x}=\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)$, $\frac{dz}{dx}=\frac{xe^x}{\sqrt{y}}\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)$.

A6 Дана функция $z=\sin(xy)$. Найдите $\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$.

1) $-2x\sin(xy)-x^2y\cos(xy)$; 2) $x\sin(xy)(2+xy)$;
3) $-y\sin(xy)-xy^2\cos(xy)$; 4) $2x\cos(xy)+x^2y\sin(xy)$.

A7 Вставьте пропущенные слова так, чтобы следующее предложение было истинным: «Непрерывность частных производных функции нескольких переменных в точке является … условием ее дифференцируемости в этой точке».

1) необходимым;
2) достаточным;
3) необходимым и достаточным;
4) ни необходимым, ни достаточным.

A8 Дана функция $z=\sin(2x+y)$, где $x=3u+2v$, $y=4u+3v$. Найдите $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$.

1) $120\sin(2x+y)$; 2) $30\cos(2x+y)$;
3) $-20\cos(2x+y)$; 4) $-100\sin(2x+y)$.

Часть 2

B1 Найдите в первом октанте координаты точки поверхности $x^2 + y^2 - z^2 - 4 = 0$, в которой касательная плоскость перпендикулярна вектору $\overline{N} = (1, 1, -1)$.

B2 Найдите экстремум функции $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - 7y$. В качестве ответа укажите $z_{\min}$.

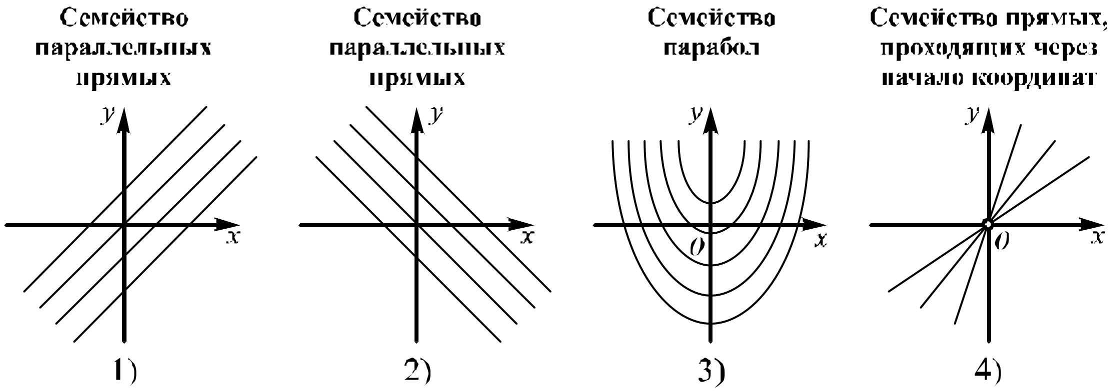
B3 Исследуйте функцию $z = \sqrt[3]{xy}$ на непрерывность и дифференцируемость в точке (0; 0). В качестве ответа укажите два числа, соответствующие результатам вашего исследования, взятые из следующей таблицы.

(x_0, y_0) – точка непрерывности	(x_0, y_0) – точка разрыва	в точке (x_0, y_0) функция дифференцируема	в точке (x_0, y_0) функция не дифференцируема
1	2	3	4

Вариант №10

Часть 1

A1 Найдите линии уровня функции $z = \ln\sqrt{\dfrac{y}{x}}$.



A2 Найдите полный дифференциал функции $z = \ln(x + \ln y)$.

1) $dz = \dfrac{dx}{x + \ln y} + \dfrac{dy}{y(x + \ln y)}$; 2) $dz = \dfrac{\ln y dx}{x + \ln y} + \dfrac{xdy}{y(x + \ln y)}$;

3) $dz = \dfrac{dx}{x + \ln y} + \dfrac{xdy}{y(x + \ln y)}$; 4) $dz = \dfrac{\ln y dx}{x + \ln y} + \dfrac{dy}{y(x + \ln y)}$.

A3 Какой угол образует с положительным направлением оси OY касательная к линии $l:\begin{cases} z=\sqrt{1+x^2+y^2}, \\ x=1 \end{cases}$ в точке $\left(1, 1, \sqrt{3}\right)$?

1) $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$; 2) $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$; 3) $\varphi=0$; 4) $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$.

A4 Найдите производную функции $u=x^2-3yz+5$ в точке $M(1;\ 2;\ -1)$ в направлении, составляющем одинаковые острые углы со всеми координатными осями.

1) $-\dfrac{1}{3}$; 2) $\dfrac{2}{3}$; 3) $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; 4) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

A5 Дана функция $z=e^{2x^2y}$. Найдите $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{dz}{dx}$, если $y=\cos x$.

1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=4xye^{2x^2y}$, $\dfrac{dz}{dx}=e^{2x^2y}\left(4xy-2x^2\sin x\right)$;

2) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=4xye^{2x^2y}$, $\dfrac{dz}{dx}=-2x^2\sin xe^{2x^2y}$;

3) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=4xye^{4xy}$, $\dfrac{dz}{dx}=e^{2x^2y}\left(4xy-2x^2\sin x\right)$;

4) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=e^{4xy}$, $\dfrac{dz}{dx}=-2x^2\sin xe^{2x^2\sin x}$.

A6 Дана функция $z=\sin\left(\dfrac{x}{y}\right)$. Найдите $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

1) $\dfrac{x}{y^3}\sin\left(\dfrac{x}{y}\right)$; 2) $\dfrac{x}{y^3}\sin\left(\dfrac{x}{y}\right)-\dfrac{1}{y^2}\cos\left(\dfrac{x}{y}\right)$;

3) $\dfrac{1}{y^2}\cos\left(\dfrac{x}{y}\right)+\dfrac{1}{y}\sin\left(\dfrac{x}{y}\right)$; 4) $\sin\left(\dfrac{x}{y}\right)\left(\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{y^2}\right)$.

A7 Вставьте пропущенные слова так, чтобы следующее предложение было истинным: «Непрерывность функции нескольких переменных в точке есть … условие для ее дифференцируемости в этой точке».

1) необходимое;
2) достаточное;
3) необходимое и достаточное;
4) ни необходимое, ни достаточное.

A8 Дана функция $z = \cos(2x + y)$, где $x = 5u + 2v$, $y = 2u - 3v$. Найдите $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$.

1) $121\sin(2x + y)$; 2) $36\sin(2x + y)$;
3) $-144\cos(2x + y)$; 4) $12\sin(2x + y)$.

Часть 2

B1 Найдите координаты точек поверхности $2x^2 - 4y^2 + z^2 = 8$, в которых касательная плоскость параллельна плоскости $x + 4y + 2z = 0$. В качестве ответа укажите координаты той точки, для которой $x > 0$.

B2 Найдите экстремум функции $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$. В качестве ответа укажите $z_{\min}$.

B3 Исследуйте функцию $z = \sqrt[3]{x^2 y^2}$ на непрерывность и дифференцируемость в точке (0; 0). В качестве ответа укажите два числа, соответствующие результатам вашего исследования, взятые из следующей таблицы.

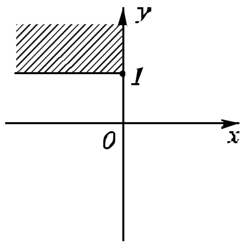
(x_0, y_0) – точка непрерывности	(x_0, y_0) – точка разрыва	в точке (x_0, y_0) функция дифференцируема	в точке (x_0, y_0) функция не дифференцируема
1	2	3	4

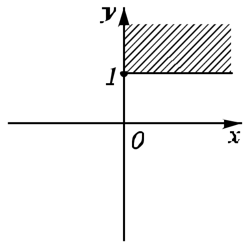
Вариант №11

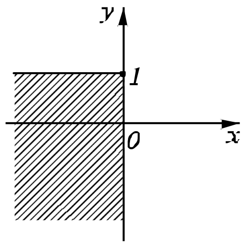
Часть 1

A1 Найдите область определения функции $z = \lg\left(x^2 + 4\right) + \sqrt{y-1} \cdot \sqrt{-x}$. Выберите соответствующую геометрическую иллюстрацию.

$\varnothing$







1) 2) 3) 4)

A2 Найдите $\dfrac{\partial u}{\partial z}$ для функции $u = x + \dfrac{x-y}{y-z}$.

1) $\dfrac{x-y}{(y-z)^2}$; 2) $\dfrac{z-x}{(y-z)^2}$; 3) $-\dfrac{x-y}{(y-z)^2}$; 4) 0.

A3 Через точку $M_0(1;\ 2;\ 6)$ поверхности $z = 3x^2 + y^2$ проведена плоскость, параллельная координатной плоскости XOZ. Определите тангенс угла, образованного касательной в точке M_0 к линии, полученной в сечении, и осью OX.

1) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{4}$; 2) $\operatorname{tg}\alpha = 4$; 3) $\operatorname{tg}\alpha = 6$ 4) $\operatorname{tg}\alpha = 0$

A4 Найдите производную функции $z = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ в точке $P(1;\ 1)$ в направлении биссектрисы первого координатного угла.

1) $\dfrac{1}{2}$; 2) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$; 3) 1; 4) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

A5 $z = f(x, y)$ – дифференцируемая функция. Найдите $\dfrac{dz}{du}$, если $x = \sqrt{u} + v$.

1) $\dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{\partial f}{\partial x} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{u}} + \dfrac{\partial f}{\partial y} v$; 2) $\dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} + v$;

3) $\dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{\partial f}{\partial x} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{u}}$; 4) $\dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} u$.

A6 Дана функция $z = \operatorname{arctg}(2x - t)$. Найдите $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

1) $\dfrac{2}{1+(2x-t)^2}$; 2) $-\dfrac{8(2x-t)}{\left[1+(2x-t)^2\right]^2}$;

3) $\dfrac{4(2x-t)}{\left[1+(2x-t)^2\right]^2}$; 4) $-\dfrac{1}{\left[1+(2x-t)^2\right]^2}$.

A7 Вставьте пропущенные слова в формулировку следующего утверждения: «Непрерывность функции $z = f(x, y)$ в области D … для существования частных производных $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ в этой области».

1) есть необходимое условие;
2) есть достаточное условие;
3) есть необходимое и достаточное условие;
4) не является ни необходимым, ни достаточным условием.

A8 Дана дважды дифференцируемая функция $z = z(u, v)$, где $u = ax + y$, $v = x + by$. Найдите $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

1) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(a\dfrac{\partial z}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\right)^2$;

2) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (ab+1)\dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}$;

3) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = a\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2} + (ab+1)\dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + b\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}$;

4) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = a\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2ab\dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + b\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}$.

Часть 2

B1 В какой точке поверхности $z = x^2 + 2y^2$ касательная плоскость параллельна плоскости $2x + 4y - z = 3$?

B2 Найдите точки экстремума функции $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$. В качестве ответа укажите $z_{\min}$.

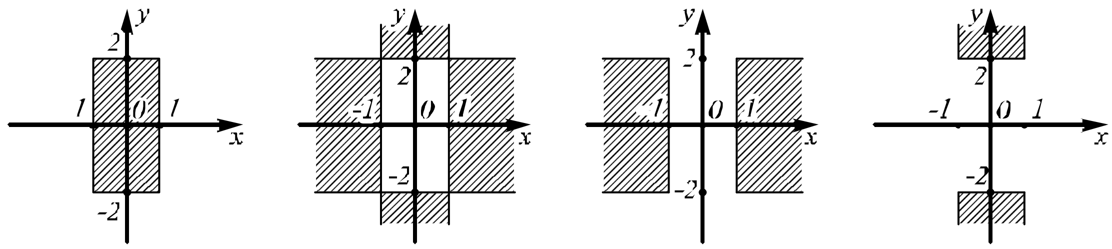
B3 Исследуйте функцию $z = |x-1| + |y|$ на непрерывность и дифференцируемость в точке $M_0(1;0)$. В качестве ответа укажите два числа, соответствующие результатам вашего исследования, взятые из следующей таблицы.

M_0– точка непрерывности	M_0 – точка разрыва	в точке M_0 функция дифференцируема	в точке M_0 функция не дифференцируема
1	2	3	4

Вариант №12

Часть 1

A1 Найдите область определения функции $z = \sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{4 - y^2}$.



1) 2) 3) 4)

A2 Найдите $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ для функции $z = xy + xe^{\frac{y}{x}}$.

1) $x + e^{\frac{y}{x}}$; 2) $y + e^{\frac{y}{x}} - \dfrac{y}{x}e^{\frac{y}{x}}$; 3) $x + e^{\frac{y}{x}} - \dfrac{1}{x^2}e^{\frac{y}{x}}$; 4) $y + e^{\frac{y}{x}}$.

A3 Температура T в данной точке A стержня является функцией абсциссы точки A и времени t: $T = f(x,t)$. Найдите скорость изменения температуры T в зависимости от времени t.

1) $dT = \dfrac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial f}{\partial t}\Delta t$; 2) $f(x, t+\Delta t) - f(x,t)$; 3) $\dfrac{\partial f}{\partial x}$; 4) $\dfrac{\partial f}{\partial t}$.

A4 Найдите линию уровня и $\operatorname{grad} z$ в точке $M_0(3,-4)$ для скалярного поля, определяемого функцией $z = 4 \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$.

1) $x^2 + y^2 = 25$, $\operatorname{grad} z(M_0) = \left\{\frac{12}{5}, -\frac{16}{5}\right\}$;

2) $x^2 + y^2 = \frac{1}{25}$, $\operatorname{grad} z(M_0) = \{12, -16\}$;

3) $x^2 + y^2 = 25$, $\operatorname{grad} z(M_0) = -\frac{4}{5}$;

4) $z = 20$, $\operatorname{grad} z(M_0) = \left\{\frac{12}{25}, -\frac{16}{25}\right\}$.

A5 Найдите $\frac{dz}{dx}$, если $z = x^y$, $y = \varphi(x)$ – дифференцируемая функция.

1) yx^{y-1}; 2) $x^y \ln x$; 3) $yx^{y-1} + x^y \ln x \cdot \varphi'(x)$; 4) $yx^{y-1} + x^y \ln x$

.

A6 Найдите все частные производные второго порядка для функции $u = xy + yz + zx$.

1) Все частные производные второго порядка равны 0;
2) Все частные производные второго порядка равны 1.

3) $$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

4) $$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A7 Вставьте пропущенные слова в формулировку следующего утверждения: «Дифференцируемость функции $z = f(x, y)$ в области D … для непрерывности функции в этой области».

1) есть необходимое условие;

2) есть достаточное условие;

3) есть необходимое и достаточное условие;

4) не является ни необходимым, ни достаточным условием.

A8 Дана дважды дифференцируемая функция $z = z(u, v)$, где $u = x - y$, $v = x + y$. Найдите $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

1) $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$; 2) $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$;

3) $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$; 4) $\frac{\partial^2 z}{\partial x dy} = -\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$.

Часть 2

B1 В какой точке поверхности $z = xy$ касательная плоскость параллельна плоскости $x + 2y - z - 4 = 0$?

B2 Найдите точки экстремума функции $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$. В качестве ответа укажите значение функции в точке максимума.

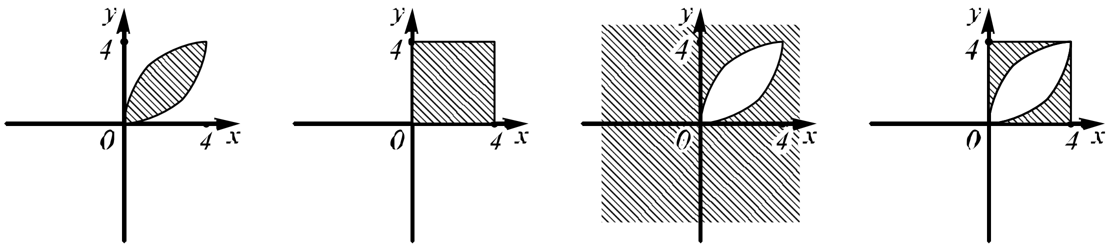
B3 Исследуйте на непрерывность и дифференцируемость в точке $M_0(1;2)$ функцию $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, \text{если } x^2 + y^2 \neq 0; \\ 0, \quad \text{если } x = y = 0. \end{cases}$. В качестве ответа укажите два числа, соответствующие результатам вашего исследования, взятые из следующей таблицы.

M_0 – точка непрерывности	M_0 – точка разрыва	в точке M_0 функция дифференцируема	в точке M_0 функция не дифференцируема
1	2	3	4

Вариант №13

Часть 1

A1 Найдите область определения функции $z = \sqrt{4x - y^2} + \sqrt{4y - x^2}$.



1) 2) 3) 4)

A2 Найдите dz функции $z = \operatorname{arctg}\left(x^2 + y^2\right)$.

1) $dz = \dfrac{1}{x^2 + y^2}\left(2xdx + 2ydy\right)$;

2) $dz = \dfrac{1}{1 + \left(x^2 + y^2\right)^2}\left[(2x + y^2)dx + (x^2 + 2y)dy\right]$;

3) $dz = \dfrac{2}{1 + \left(x^2 + y^2\right)^2}\left(xdx + ydy\right)$;

4) $dz = \dfrac{1}{1 + \left(x^2 + y^2\right)^2}dxdy$.

A3 Найдите тангенс угла, образованного касательной к линии $\begin{cases} z = \dfrac{x^2 + y^2}{4}; \\ x = 2 \end{cases}$

в точке (2; 4; 5) с положительным направлением оси ординат.

1) $\operatorname{tg}\beta = 5$; 2) $\operatorname{tg}\beta = 2$; 3) $\operatorname{tg}\beta = 1$; 4) $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{\pi}{2}$.

A4 Найдите косинус угла между градиентами функции $z = 3x^4 - xy + y^3$ в точках $M_1(0;1)$ и $M_2(1;1)$.

1) $\cos\varphi = -\dfrac{1}{5\sqrt{2}}$; 2) $\cos\varphi = -1$; 3) $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; 4) $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{25}$.

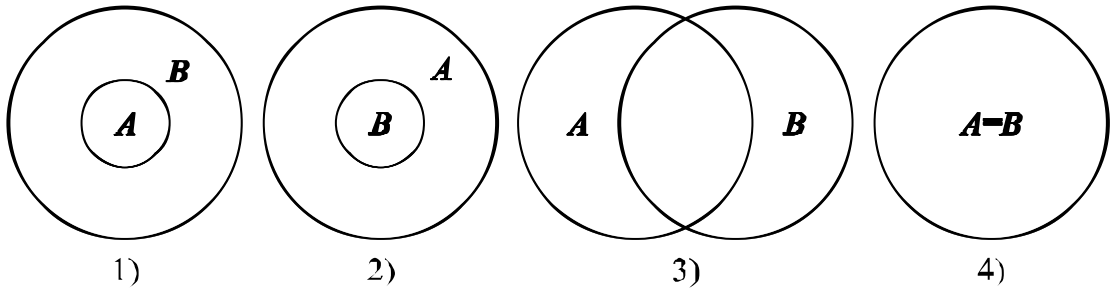
A5 $z = f(u, v)$ – дважды дифференцируемая функция. Найдите $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, если $u = x^2 - y^2,\ v = e^{xy}$.

1) $\dfrac{\partial f}{\partial u} \cdot 2x$; 2) $\dfrac{\partial f}{\partial v} \cdot e^{xy} \cdot y$; 3) $2x + ye^{xy}$; 4) $\dfrac{\partial f}{\partial u} \cdot 2x + \dfrac{\partial f}{\partial v} \cdot y \cdot e^{xy}$.

A6 Найдите $\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}$, если $z = 2\cos^2\left(x - \dfrac{t}{2}\right)$.

1) $2\cos(2x-t)$; 2) $-\cos(2x-t)$; 3) $-\dfrac{1}{2}\cos(2x-t)$; 4) $\sin(2x-t)$.

A7 Постройте диаграмму взаимного расположения множества *A* непрерывных в области *D* функций двух переменных и множества *B*, дифференцируемых в этой области функций.



A8 Дана дважды дифференцируемая функция $z = z(u,v)$, $u = ax + by$, $v = bx + ay$. Найдите $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

1) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = ab\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2} + ab\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}$;

2) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(a\dfrac{\partial z}{\partial u} + b\dfrac{\partial z}{\partial v}\right)^2$;

3) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = ab\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \left(a^2 + b^2\right)\dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + ab\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}$;

4) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = ab\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)$.

Часть 2

B1 В какой точке поверхности $z = x^2 + y^2$ касательная плоскость параллельна плоскости $z = 2x + 2y$?

B2 Найдите точки экстремума функции $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$. В качестве ответа укажите значение функции в точке минимума.

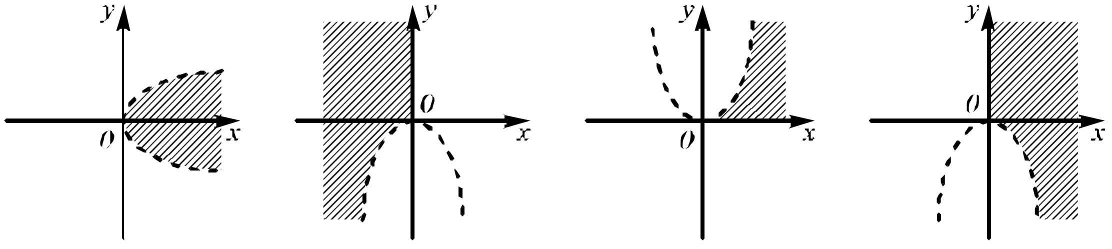
B3 Исследуйте на непрерывность и дифференцируемость в точке $M_0(0;0)$ функцию $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x-y}{x+y}, \text{если } x+y\neq 0;\\ 0, \quad\quad \text{если } x+y=0.\end{cases}$. В качестве ответа укажите два числа, соответствующие результатам вашего исследования, взятые из следующей таблицы.

M_0 – точка непрерывности	M_0 – точка разрыва	в точке M_0 функция дифференцируема	в точке M_0 функция не дифференцируема
1	2	3	4

Вариант №14

Часть 1

A1 Найдите область определения функции $z=\ln\left(x^2+y\right)+\sqrt{x_y}$. Выберите соответствующую геометрическую иллюстрацию.



1) 2) 3) 4)

A2 Найдите dz для функции $z=e^{\frac{x}{y^2}}$.

1) $dz=e^{\frac{x}{y^2}}\left(-\dfrac{2x}{y^3}\right)+e^{\frac{x}{y}}\dfrac{1}{y^2}$; 2) $dz=e^{\frac{x}{y^2}}\dfrac{1}{y^2}dx+e^{\frac{x}{y^2}}\left(-\dfrac{2x}{y^3}\right)dy$;

3) $dz=e^{\frac{x}{y^2}}\left(dx+dy\right)$; 4) $dz=e^{\frac{x}{y^2}}\left(\dfrac{dy}{y^2}-\dfrac{2xdx}{y^3}\right)$.

A3 Объем газа $v=f(p,t)$ является функцией его температуры t и давления p. Найдите скорость расширения газа при постоянном давлении в зависимости от времени t.

1) $\dfrac{\partial f}{\partial t}$; 2) $\dfrac{\partial f}{\partial p}$; 3) $\dfrac{v}{t}$; 4) $f(p,t+\Delta t)-f(p,t)$.

A4 Найдите линию уровня и grad z в точке (–1; 2) для функции $z=x^2y$.

1) $x^2y=\sqrt{5}$, $\operatorname{grad} z(-1,2)=\left\{-\dfrac{4}{\sqrt{5}},\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right\}$;

2) $x^2y=-2$, $\operatorname{grad} z(-1,2)=\{-4,1\}$;

3) $y=\dfrac{2}{x^2}$, $\operatorname{grad} z(-1,2)=\{-4,1\}$;

4) $z=2$, $\operatorname{grad} z(-1,2)=\{4,-1\}$.

A5 Пусть $z=f(u,v)$ – дважды дифференцируемая функция. Найдите $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $u=x^2-y^2$, $v=e^{xy}$.

1) $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-2y\dfrac{\partial f}{\partial u}+xe^{xy}\dfrac{\partial f}{du}$; 2) $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-2y+xe^{xy}$;

3) $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-2y\dfrac{df}{du}$; 4) $\dfrac{\partial z}{\partial y}=xe^{xy}\dfrac{\partial f}{\partial v}$.

A6 Найдите $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, если $z=\ln(x^2+y)$.

1) $\dfrac{2(y-x^2)}{\left(x^2+y\right)^2}$; 2) $-\dfrac{1}{\left(x^2+y\right)^2}$; 3) $\dfrac{2x}{\left(x^2+y\right)^2}$; 4) $-\dfrac{2x}{\left(x^2+y\right)^2}$.

A7 Вставьте пропущенные слова в формулировку следующего утверждения: «Существование частных производных $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ в области D … для дифференцируемости функции $z=f(x,y)$ в этой области».

1) есть необходимое условие;
2) есть достаточное условие;
3) есть необходимое и достаточное условие;
4) не является ни необходимым, ни достаточным условием.

A8 Дана дважды дифференцируемая функция $z=z(u,v)$, где $u=px+qy$, $v=qx-py$. Найдите $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

1) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(p\dfrac{\partial z}{\partial u} + q\dfrac{\partial z}{\partial v} \right)^2$;

2) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = pq\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \left(q^2 - p^2\right)\dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - pq\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}$;

3) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\ pq\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2} \right)$; 4) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2pq\dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}$.

Часть 2

B1 В какой точке поверхности $e^z - z + xy = 3$ касательная плоскость параллельна плоскости $x + 2y = 0$? В качестве ответа укажите координаты той точки, для которой $x > 0$.

B2 Найдите точки экстремума функции $z = x^2 + xy + y^2 - 3x + 6y$. В качестве ответа укажите значение функции в точке минимума.

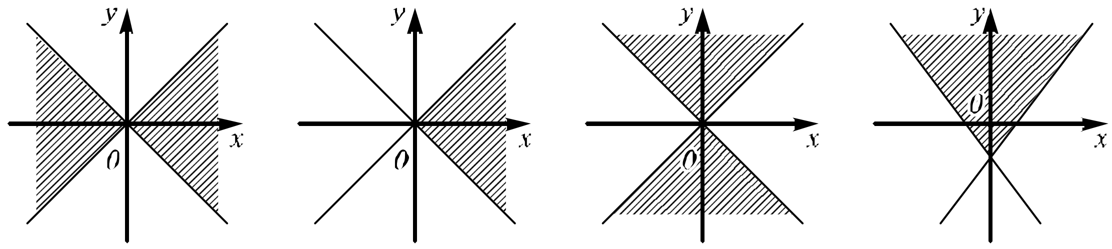
B3 Исследуйте на непрерывность и дифференцируемость в точке $M_0(0;1)$ функцию $z = x + y^2 + \ln\left(x + y^2\right)$. В качестве ответа укажите два числа, соответствующие результатам вашего исследования, взятые из следующей таблицы.

M_0 – точка непрерывности	M_0 – точка разрыва	в точке M_0 функция дифференцируема	в точке M_0 функция не дифференцируема
1	2	3	4

Вариант №15

Часть 1

A1 Найдите область определения функции $z = \sqrt{2x + y} - \sqrt{2x - y}$. Выберите соответствующую геометрическую иллюстрацию.



1) 2) 3) 4)

A2 Найдите $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ для функции $z = x^y$.

1) $\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x$; 2) $\frac{\partial z}{\partial x} = x^y \ln x$, $\frac{\partial z}{\partial y} = yx^{y-1}$;

3) $\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = yx^{y-1} \ln x$; 4) $\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1} \ln x$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x^y$.

A3 Какой угол образует с положительным направлением оси ординат касательная к линии $\begin{cases} z = \sqrt{1 + x^2 + y^2}; \\ x = 1 \end{cases}$ в точке $\left(1, 1, \sqrt{3}\right)$?

1) $\frac{2}{3}\pi$; 2) $\frac{\pi}{3}$; 3) $\frac{\pi}{6}$; 4) $\frac{\pi}{2}$.

A4 Найдите косинус угла между градиентами функции $u = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$ в точках $M_1(-3; 1; 0)$ и $M_2(1; 2; 2)$.

1) $\cos\varphi = \frac{8}{9}$; 2) $\cos\varphi = 80$; 3) $\cos\varphi = -\frac{32}{8100}$; 4) $\cos\varphi = -\frac{8}{9}$.

A5 Найдите $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{dz}{dx}$, если $z = \ln\left(e^x + e^y\right)$, где $y = x^3$.

1) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{e^x}{e^x + e^y}$, $\frac{dz}{dx} = \frac{e^x + 3e^{x^3} x^2}{e^x + e^{x^3}}$;

2) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{e^y}{e^x + e^y}$, $\frac{dz}{dx} = \frac{e^x + 3e^{x^3} x^2}{e^x + e^{x^3}}$;

3) $\frac{\partial z}{\partial x} = e^x$, $\frac{dz}{dx} = e^x + 3x^2 e^{x^3}$;

4) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{e^x}{e^x + e^y}$, $\frac{dz}{dx} = \frac{e^x}{e^x + e^{x^3}}$.

A6 Найдите $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$, если $z = \sin(xy)$.

1) $-x^2 y\cos(xy)$; 2) $-2x\sin(xy) - x^2 y\cos(xy)$;
3) $\cos(xy) - xy\sin(xy)$; 4) $-x^2\sin(xy)$.

A7 Вставьте пропущенные слова так, чтобы следующее предложение было истинным: «Существование непрерывных частных производных $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в области D … для дифференцируемости функции $z = f(x, y)$ в этой области».

1) есть необходимое условие;
2) есть достаточное условие;
3) есть необходимое и достаточное условия;
4) не является ни необходимым , ни достаточным условием.

A8 Найдите $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$, если $z = x^4 + y^4$, где $x = 2u + 3v$, $y = u - v$.

1) $10x^2 + 20y^2$;2) $12x^2 + 108y^2$; 3) $108x^2 + 12y^2$; 4) $x^2 - y^2$.

Часть 2

B1 В какой точке поверхности $z = 2x^2 - 4y^2$ касательная плоскость параллельна плоскости $8x - 8y - z + 4 = 0$?

B2 Найдите точки экстремума функции $z = x^2 + y^2 + 2x + 4y$. В качестве ответа укажите значение функции в точке минимума.

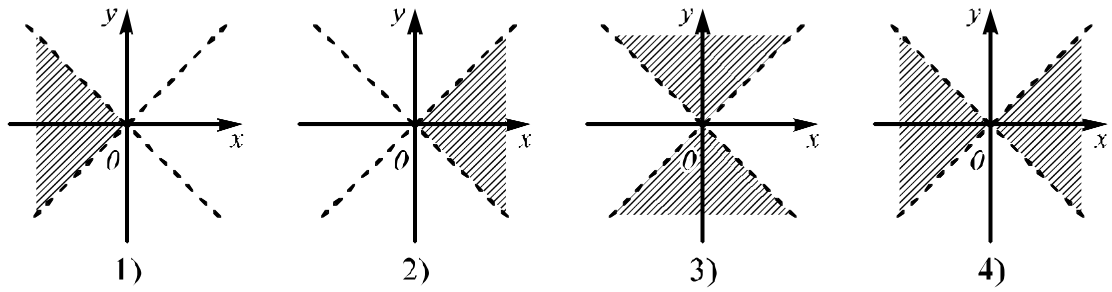
B3 Исследуйте на непрерывность и дифференцируемость в точке $M_0(0;0)$ функцию $z = |x| + |y|$. В качестве ответа укажите два числа, соответствующие результатам вашего исследования, взятые из следующей таблицы.

M_0 – точка непрерывности	M_0 – точка разрыва	в точке M_0 функция дифференцируема	в точке M_0 функция не дифференцируема
1	2	3	4

Вариант №16

Часть 1

A1 Найдите область определения функции $z=\ln\left(x^2-y^2\right)$. Выберите соответствующую геометрическую иллюстрацию.



A2 Найдите $\frac{\partial z}{\partial x}$ для функции $z=\sqrt{x}\sin\frac{y}{x}$.

1) $\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin\frac{y}{x}-\sqrt{x}\cos\frac{y}{x}\cdot\frac{y}{x^2}$; 2) $\frac{\sqrt{x}}{x}\cos\frac{y}{x}$;

3) $\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}$; 4) $-\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}$.

A3 Найдите локальную скорость изменения функции $z=x^3+xy+y^2$ относительно переменной x.

1) $x+2y$; 2) $3x^2+y$; 3) $\left(3x^2+y\right)\Delta x$; 4) $(x+2y)\Delta y$.

A4 Найдите производную от функции $z=x^2y^2-xy^3-3y-1$ в точке $M_1(2;1)$ в направлении вектора $\overline{M_1M_2}$, где $M_2(0;0)$.

1) 3; 2) $\sqrt{5}$; 3) $-\sqrt{5}$; 4) –1;

A5 Найдите $\frac{dz}{dt}$, если $z=\mathrm{tg}\left(3t+2x^2\right)$, $x=\frac{1}{t}$.

1) $\frac{1}{\cos^2\left(3t+\frac{2}{t^2}\right)}\cdot\left(3-\frac{4}{t^3}\right)$; 2) $\frac{3}{\cos^2\left(3t+2x^2\right)}$;

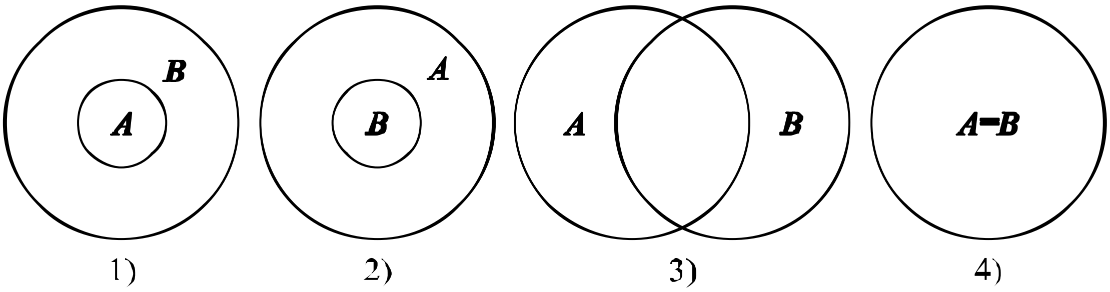
3) $-\dfrac{4}{t^3\cos^2\left(3t+\dfrac{2}{t^2}\right)}$; 4) $\dfrac{1}{1+\left(3t+\dfrac{2}{t^2}\right)^2}\cdot\left(3-\dfrac{4}{t^3}\right)$.

A6 Найдите d^2z, если $z=2x^2-3xy-y^2$.

1) $4dx-2dy$; 2) $4dx^2-6dxdy-2dy^2$;

3) $4dx^2-2dy^2$; 4) $(4x-3y)dx+(-3x-2y)dy$.

A7 Постройте диаграмму взаимного расположения множеств функций:
A – множество функций $z=f(x,y)$, непрерывных в точке (0,0);
B – множество функций $z=f(x,y)$, для которых существуют $\dfrac{\partial z}{\partial x}(0,0)$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}(0,0)$.



A8 Дана функция $z=x^2y^2$, где $x=3u+2v$, $y=u-3v$. Найдите $\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}$.

1) $8x^2+18y^2-24xy$; 2) $8x^2-18y^2+10xy$;

3) $18x^2+8y^2-24xy$; 4) $18x^2+8y^2-48xy$.

Часть 2

B1 В какой точке поверхности $z=x^3-3xy+y^3$ касательная плоскость параллельна плоскости $z=4$? В качестве ответа укажите координаты той точки, для которой $x>0$, в виде (a,b,c).

B2 Найдите точки экстремума функции $z=3x+6y-x^2-xy-y^2$. В качестве ответа запишите значение функции в точке максимума.

В3 Исследуйте на непрерывность и дифференцируемость в точке $M_0(0;0)$ функцию $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{если } x^2+y^2\neq 0;\\ 0, & \text{если } x=y=0.\end{cases}$ В качестве ответа укажите два числа, соответствующие результатам вашего исследования, взятые из следующей таблицы.

M_0 – точка непрерывности	M_0 – точка разрыва	в точке M_0 функция дифференцируема	в точке M_0 функция не дифференцируема
1	2	3	4

Ответы

Вариант	**А1**	**А2**	**А3**	**А4**	**А5**	**А6**	**А7**	**А8**	**В1**	**В2**	**В3**
1	3	2	4	3	1	1	2	3	(4, –9, 4)	27	1, 4
2	2	2	1	4	2	3	1	1	(4, 2, 4)	6	3, 4, 6
3	3	2	3	2	1	3	2	4	(3, 0, 6)	6	1, 2, 6
4	4	2	4	1	4	3	1	3	(1, 1, 2)	31	1, 2, 5
5	1	3	1	2	1	4	2	4	(0, 1, 0)	28	1, 2, 6
6	2	4	4	3	1	2	2	1	(8, –4, 1)	–7	1, 3
7	1	2	3	4	3	1	1	2	(1, 1, –1)	–7	1, 4
8	4	1	2	3	4	2	2	3	(0, 0, 1)	13	1, 4
9	3	1	3	2	2	1	2	4	(2, 2, 2)	–13	1, 4
10	4	1	2	3	1	2	1	3	(2, –4, 8)	–9	1, 3
11	2	1	3	4	3	2	4	3	(1, 1, 3)	–1	1, 4
12	3	2	4	1	3	4	2	3	(2, 1, 2)	12	1, 3
13	1	3	2	1	4	2	2	3	(1, 1, 2)	0	2, 4
14	4	2	1	3	1	4	1	2	(2, 1, 0)	–21	1, 3
15	2	1	3	4	1	2	2	3	(2, 1, 4)	–5	1, 4
16	4	1	2	3	1	2	3	4	(1, 1, –1)	9	2, 4