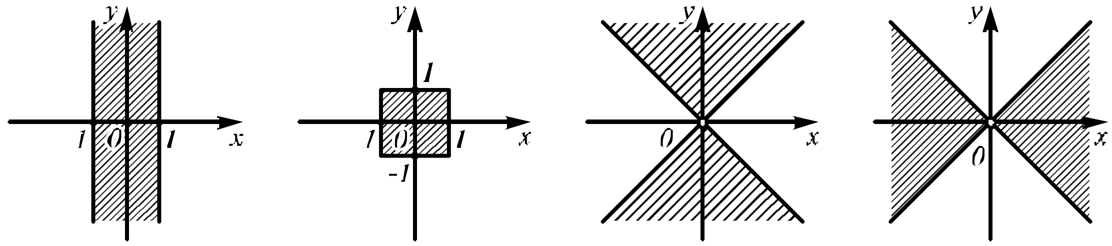
Вариант №1

Часть 1

A1 Найдите область определения функции $z = \arcsin\frac{x}{y}$. Выберите геометрическую иллюстрацию.



1) 2) 3) 4)

A2 Найдите частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z = \mathrm{arctg}\frac{y}{x}$.

1) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x^2}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2}{x^2+y^2}$;

2) $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}$;

3) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}$;

4) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{xy}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xy}{x^2+y^2}$.

A3 Какой угол с положительным направлением оси OX образует касательная к линии пересечения поверхности $s: z = 4 - x^2 - y^2$ с плоскостью $y = 0$ в точке $M_0\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{15}{4}\right)$?

1) 45^0; 2) 30^0; 3) 120^0; 4) 135^0.

A4 Найдите производную $\frac{\partial u}{\partial e}$ от функции $u = x^3y^3z^3$ в точке $M_0(1;1;1)$ в направлении, образующем с осями координат равные острые углы.

1) 9; 2) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$; 3) $3\sqrt{3}$; 4) 1.

A5 Найдите $\frac{\partial z}{\partial y}$ и $\frac{dz}{dy}$, если $z = y^x$, $x = Y(y)$ – дифференцируемая функция

1) $\dfrac{\partial z}{\partial y} = xy^{x-1}, \ \dfrac{dz}{dy} = xy^{x-1} + y^x \ln yY'(y);$

2) $\dfrac{\partial z}{\partial y} = xy^{x-1}, \ \dfrac{dz}{dy} = y^x \ln xY'(y)$

3) $\dfrac{\partial z}{\partial y} = xy^{x-1}, \ \dfrac{dz}{dy} = xy^{x-1} \cdot Y'(y);$

4) $\dfrac{\partial z}{\partial y} = xy^{x-1}, \ \dfrac{dz}{dy} = xy^{x-1} + xy^{x-1}Y'(y).$

A6 Найдите d^2z, если $z = e^{2x+3y}$.

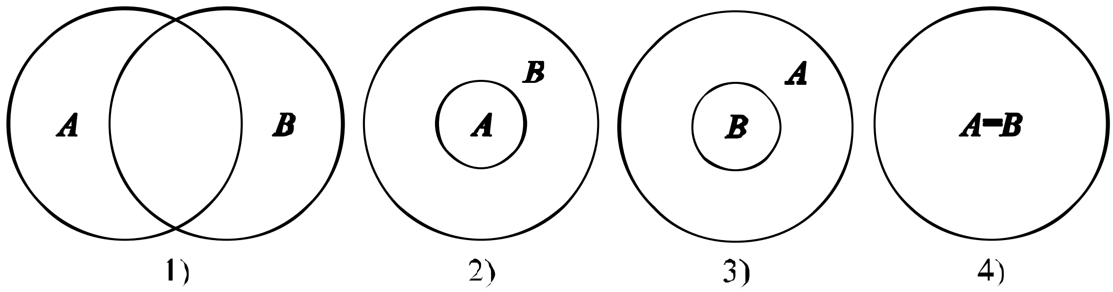
1) $d^2z = e^{2x+3y}(2dx + 3dy)^2;$

2) $d^2z = e^{2x+3y}\left(2dx^2 + 6dxdy + 9dy^2\right);$

3) $d^2z = e^{2x+3y}\left(dx^2 + dy^2\right);$

4) $d^2z = e^{2x+3y}(dx + dy)^2.$

A7 Постройте диаграмму взаимного расположения множеств функций:
A – все функции $z = f(x, y)$, дифференцируемые в точке $M_0(x_0, y_0)$;
B – все функции $z = f(x, y)$, имеющие касательную плоскость в точке $M_0(x_0, y_0)$.



A8 Найдите $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, если $z = z(u, v)$ – дважды дифференцируемая функция , $u = e^{x-y}$, $v = e^{x+y}$.

1) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2} e^{2x-2y} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2} e^{2x+2y};$

2) $\dfrac{d^2 z}{dx^2} = \dfrac{d^2 z}{du^2} e^{2x-2y} + 2\dfrac{d^2 z}{dudv} e^{2x} + \dfrac{d^2 z}{dv^2} e^{2x+2y};$

3) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2} e^{2x-2y} + 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} e^{2x} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2} e^{2x+2y} + \dfrac{\partial z}{\partial u} e^{x-y} + \dfrac{\partial z}{\partial v} e^{x+y};$

4) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(\dfrac{\partial z}{\partial u} e^{x-y} + \dfrac{\partial z}{\partial v} e^{x+y} \right)^2$.

Часть 2

B1 На поверхности $S: \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} + 2z = 3$ найдите точку, в которой нормаль к поверхности параллельна вектору $\bar{e} = \{1; 1; 1\}$.

B2 Найдите точки экстремума функции $z = xy(1 - x - y)$. В качестве ответа укажите число, обратное значению функции в точке максимума.

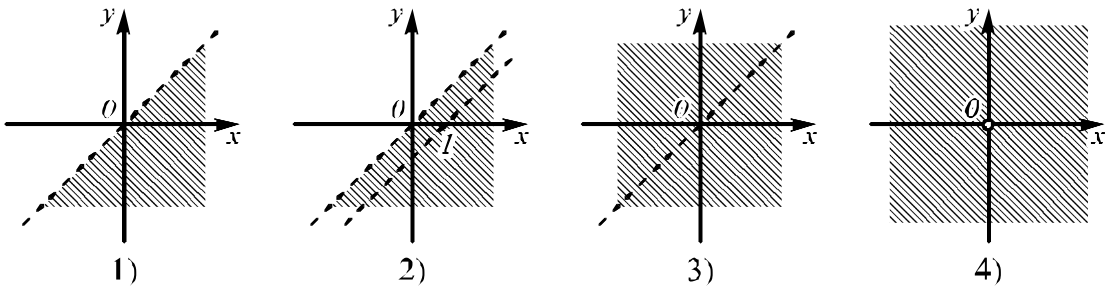
B3 Исследуйте по определению функцию $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ на непрерывность и дифференцируемость в точке $M_0(0; 0)$. В качестве ответа укажите цифры, соответствующие результатам вашего исследования, взятые из следующей таблицы.

M_0 – точка непрерывности	M_0 – точка разрыва	в точке M_0 функция дифференцируема	в точке M_0 функция не дифференцируема
1	2	3	4

Вариант №2

Часть 1

A1 Найдите область определения функции $z = \dfrac{1}{\ln(x - y)}$. Выберите геометрическую иллюстрацию. Есть ли иллюстрация?



1) 2) 3) 4)

A2 Найдите частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функции $z = e^{\frac{x}{y}}$.

1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=e^{\frac{x}{y}},\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=e^{\frac{x}{y}};$ 2) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{y}e^{\frac{x}{y}},\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}};$

3) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{x}{y}e^{\frac{x}{y}},\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}};$ 4) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=xe^{\frac{x}{y}},\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}.$

А3 Температура T точки остывающего стержня является функцией двух переменных – расстояния точки x от начала стержня и момента времени t. Какой физический смысл имеют частные производные $\dfrac{dT}{dx}$ и $\dfrac{dT}{dt}$.

1) $\dfrac{dT}{dx}$ – скорость изменения температуры в зависимости от длины x, $\dfrac{dT}{dt}$ – скорость изменения температуры в зависимости от времени t;

2) $\dfrac{dT}{dx}$ – температура стержня в точке x, $\dfrac{dT}{dt}$ – температура стержня в момент времени t;

3) $\dfrac{dT}{dx}$ – средняя температура стержня в расчете на его длину, $\dfrac{dT}{dt}$ – средняя температура стержня за время t;

4) $\dfrac{dT}{dx}$ – средняя скорость изменения температуры стержня в зависимости от длины x, $\dfrac{dT}{dt}$ – средняя скорость изменения температуры в зависимости от времени t.

А4 Укажите направление $\bar{e}$ наискорейшего изменения поля, определяемого функцией $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ в точке $M_0(16;\ 12;\ 15)$. Чему равна максимальная скорость изменения поля в этой точке?

1) $\bar{e}=\dfrac{1}{3}(\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}),\ \max\dfrac{\partial u}{\partial e}(M_0)=\dfrac{43}{75};$

2) $\bar{e}=-\dfrac{1}{3}(\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}),\ \max\dfrac{\partial u}{\partial e}(M_0)=-\dfrac{43}{75};$

3) $\bar{e}=-\dfrac{1}{25}(16\bar{i}+12\bar{j}+15\bar{k}),\ \max\dfrac{\partial u}{\partial e}(M_0)=-1;$

4) $\bar{e}=\dfrac{1}{25}(16\bar{i}+12\bar{j}+15\bar{k}),\max\dfrac{\partial u}{\partial e}(M_0)=1.$

A5 Найдите $\frac{\partial z}{\partial y}$ и $\frac{dz}{dy}$, если $z = yx^y$, где $x = X(y)$ – дифференцируемая функция.

1) $\frac{\partial z}{\partial y} = x^y(1 + \ln x)$, $\frac{dz}{dy} = x^y(1 + \ln x)$;

2) $\frac{\partial z}{\partial y} = x^y(1 + y\ln x)$, $\frac{dz}{dy} = x^y(1 + y\ln x) + y^2 x^{y-1} X'(y)$;

3) $\frac{\partial z}{\partial y} = y^2 x^{y-1}$, $\frac{dz}{dy} = y^2 x^{y-1} + y^2 x^{y-1} X'(y)$;

4) $\frac{\partial z}{\partial y} = x^y(1 + \ln x)$, $\frac{dz}{dy} = x^y(1 + y\ln x) + yx^y \ln x X'(y)$.

A6 Найдите $d^2 z$, если $z = \sin xy$.

1) $d^2 z = -\sin xy(dx + dy)^2$;

2) $d^2 z = (y\cos xydx + xcocxydy)^2$;

3) $d^2 z = -y^2 \sin xydx^2 + 2(\cos xy - xy\sin xy)dxdy - x^2 \sin xydy^2$;

4) $d^2 z = \sin xydx^2 + 2(\cos xy - \sin xy)dxdy - \sin xydy^2$.

A7 Заполните пропуск в высказывании: «Существование касательной плоскости к поверхности $s: z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ есть … условие дифференцируемости функции $z = f(x, y)$ в этой точке».

1) необходимое;
2) достаточное;
3) необходимое и достаточное;
4) существование касательной плоскости к поверхности $s: z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ никак не связано с её дифференцируемостью в этой точке.

A8 Дана дважды дифференцируемая функция $z = z(u, v)$, где $u = x + y$, $v = xy$. Найдите $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

1) $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}(x + y) + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} xy + \frac{\partial z}{\partial v}$;

2) $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} xy$;

3) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}(x+y)+\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}x^2+\dfrac{\partial z}{\partial v}$;

4) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}(x+y)+\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}xy$

Часть 2

В1 На поверхности $S: x^2+2y^2-z^2=8$ найдите точку, расположенную в первом октанте, в которой касательная плоскость параллельна плоскости $P: x+y-z=0$.

В2 Найдите точки экстремума функции $z=x^3-2y^3-3x+6y$. В ответе укажите значение функции в точке максимума.

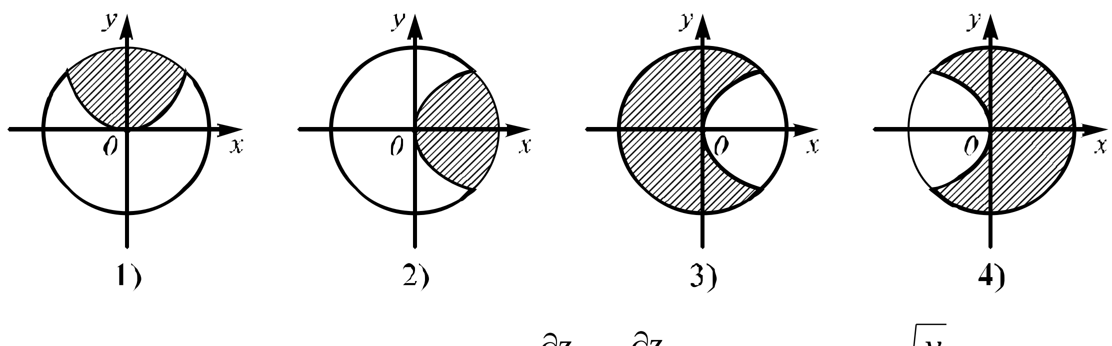
В3 Исследуйте по определению существование частных производных и дифференцируемость функции $z=\sqrt[4]{x^4+y^4}$ в точке $0(0;0)$. В качестве ответа укажите цифры, соответствующие результатам вашего исследования, взятые из следующей таблицы.

$\frac{\partial z}{\partial x}(0;0)$ существует	$\frac{\partial z}{\partial y}(0;0)$ существует	$\frac{\partial z}{\partial x}(0;0)$ не существует	$\frac{\partial z}{\partial y}(0;0)$ не существует	функция дифференцируема	функция не дифференцируема
1	2	3	4	5	6

Вариант №3

Часть 1

А1 Найдите область определения функции $z=\sqrt{4-x^2-y^2}+\sqrt{y^2-x}$. Выберите геометрическую иллюстрацию.



1) 2) 3) 4)

А2 Найдите частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функции $z=\sqrt{\dfrac{y}{x}}$.

1) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}$; 2) $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x^3}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2\sqrt{xy}}$;

3) $\frac{\partial z}{\partial x}=-\sqrt{xy}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2\sqrt{xy}}$; 4) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2\sqrt{yx^3}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2\sqrt{xy}}$.

A3 Сравните скорость изменения функции $z=2x^2+y^2$ в точке $M_0(1,2,6)$ вдоль оси Ox (v_1) со скоростью ее изменения в той же точке вдоль оси $Oy(v_2)$.

1) $v_1>v_2$; 2) $v_1<v_2$; 3) $v_1=v_2$;
4) сравнение невозможно.

A4 Найдите производную скалярного поля $u=z^2+2\operatorname{arctg}(x-y)$ в точке $M_0(1;2;-1)$ по направлению вектора $\bar{e}=\bar{i}+2\bar{j}-2\bar{k}$.

1) 0; 2) 1; 3) $\frac{2}{3}$; 4) $-\frac{2}{3}$.

A5 Найдите $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{dz}{dx}$, если $z=xe^Y$ и $y=Y(x)$ – дифференцируемая функция.

1) $\frac{\partial z}{\partial x}=e^Y$, $\frac{dz}{dx}=e^Y+xe^YY'(x)$; 2) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{dz}{dx}=e^Y$;

3) $\frac{\partial z}{\partial x}=e^Y$, $\frac{dz}{dx}=xe^YY'(x)$; 4) $\frac{\partial z}{\partial x}=e^Y$, $\frac{dz}{dx}=e^Y+xe^Y$.

A6 Найдите d^2z, если $z=\ln(ax+by)$.

1) $d^2z=\left(\frac{a}{ax+by}dx+\frac{b}{ax+by}dy\right)^2$;

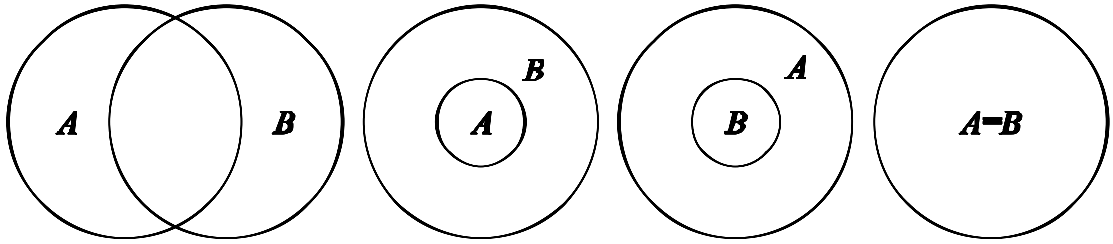
2) $d^2z=-\frac{1}{(ax+by)^2}\left(a^2dx^2+b^2dy^2\right)$;

3) $d^2z=-\frac{1}{(ax+by)^2}(adx+bdy)^2$;

4) $d^2z=-\frac{1}{(ax+by)^2}\left(a^2dx^2+abdxdy+b^2dy^2\right)$.

A7 Постройте диаграмму взаимного расположения множеств функций:

A – множество функций, имеющих непрерывные частные производные в точке $M_0(x_0, y_0)$;
B – множество функций, дифференцируемых в точке $M_0(x_0, y_0)$.



1) 2) 3) 4)

A8 Найдите $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, если $z = z(u, v)$ – дважды дифференцируемая функция и $u = x + y$, $v = x^2 + y^2$.

1) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(\dfrac{\partial z}{\partial u} + 2x\dfrac{\partial z}{\partial v}\right)^2$; 2) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 4y\dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \dfrac{\partial z}{\partial v}$;

3) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 4xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}$; 4) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2(x+y)\dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + 4xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}$.

Часть 2

B1 На поверхности $S: x^2 - 6x + 9y^2 + z^2 = 4z + 3$ найдите точку, расположенную в первом октанте, в которой касательная плоскость параллельна плоскости XOY.

B2 Найдите точки локального экстремума функции $z = y^3 - 2x^3 - 3y + 6x$. В ответе укажите значение функции, найденное в точке максимума.

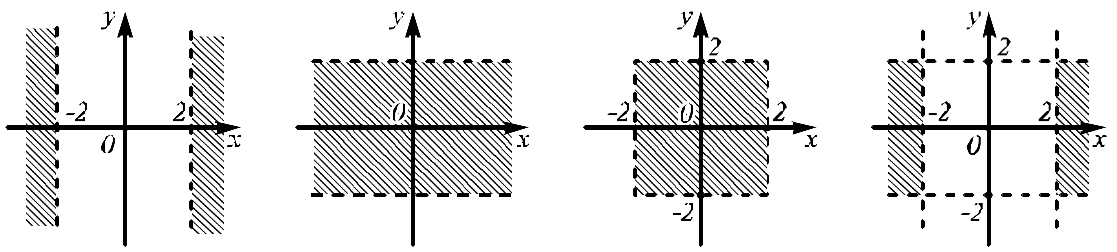
B3 Исследуйте по определению существование частных производных и дифференцируемость функции $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 \neq 0; \\ 0, \quad x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$ в точке $O(0; 0)$. В качестве ответа укажите цифры, соответствующие результатам вашего исследования, взятые из следующей таблицы.

$\dfrac{\partial z}{\partial x}(0;0)$ существует	$\dfrac{\partial z}{\partial y}(0;0)$ существует	$\dfrac{\partial z}{\partial x}(0;0)$ не существует	$\dfrac{\partial z}{\partial y}(0;0)$ не существует	$z = z(x, y)$ дифферен-цируема в точке $O(0, 0)$	$z = z(x, y)$ не дифференцируема в точке $O(0, 0)$
1	2	3	4	5	6

Вариант №4

Часть 1

A1 Найдите область определения функции $z=\lg\left(x^2-4\right)+\lg\left(4-y^2\right)$. Выберите соответствующую геометрическую иллюстрацию.



1) 2) 3) 4)

A2 Найдите частные производные функции $z=\sin\dfrac{y}{x}$.

1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\cos\dfrac{y}{x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\cos\dfrac{y}{x}$;

2) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{y}{x^2}\cos\dfrac{y}{x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{y}{x}$;

3) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y\cos\dfrac{y}{x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{y}{x}$;

4) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{1}{x^2}\cos\dfrac{y}{x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{y}{x}$.

A3 Какой угол с положительным направлением оси OX образует касательная к линии пересечения поверхности $S: z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ с плоскостью ZOX в точке $M_0\left(-\sqrt{3},\,0,\,\dfrac{1}{2}\ln 3\right)$?

1) 30^0; 2) 60^0; 3) 120^0; 4) 150^0.

A4 Найдите производную функции $z=x^2-xy-2y^2$ в точке $M_0(1;2)$ в направлении, составляющем угол 60^0 с осью OX.

1) $-\frac{9\sqrt{3}}{2}$;   2) $-\frac{9}{2}$;   3) $\frac{9\sqrt{3}}{2}$;   4) $\frac{9}{2}$.

A5 Найдите $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{dz}{dx}$, если $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, где $y=\varphi(x)$ – дифференцируемая функция.

1) $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2+y^2}$, $\frac{dz}{dx}=-\frac{y}{x^2+y^2}+\frac{x}{x^2+y^2}$;

2) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{dz}{dx}=\frac{x^2}{x^2+y^2}$;

3) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x^2}{x^2+y^2}$, $\frac{dz}{dx}=\frac{x}{x^2+y^2}\varphi'(x)$;

4) $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2+y^2}$, $\frac{dz}{dx}=-\frac{y}{x^2+y^2}+\frac{x}{x^2+y^2}\varphi'(x)$.

A6 Найдите d^2z, если $z=\sin(3x-2y)$.

1) $d^2z=\cos^2(3x-2y)(3dx-2dy)^2$;
2) $d^2z=-9\sin(3x-2y)dx^2-4\sin(3x-2y)dy^2$;
3) $d^2z=-\sin(3x-2y)(3dx-2dy)^2$;
4) $d^2z=-\sin(3x-2y)\left(9dx^2-6dxdy+4dy^2\right)$.

A7 Заполните пропуск в высказывании: «Существование $\overline{\operatorname{grad} z(M_0)}$ есть … условие дифференцируемости функции $z=z(x,y)$ в точке M_0».

1) необходимое;
2) достаточное;
3) необходимое и достаточное;
4) ни необходимое, ни достаточное.

A8 Найдите $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, если $z=z(u,v)$ – дважды дифференцируемая функция и $u=\sin(x+y)$, $v=\sin(x-y)$.

1) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cos^2(x+y)+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cos^2(x-y)$;

2) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cos^2(x+y)+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cos(x+y)\cos(x-y)+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cos^2(x-y)$;

3) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cos^2(x+y)+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cos(x+y)\cos(x-y)+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cos^2(x-y)-$

$$-\frac{\partial z}{\partial u}\sin(x+y)-\frac{\partial z}{\partial v}\sin(x-y);$$

4) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(\frac{\partial z}{\partial u}\cos(x+y)+\frac{\partial z}{\partial v}\cos(x-y)\right)^2$.

Часть 2

B1 На поверхности $S: z=4-x^2-y^2$ найдите точку, в которой касательная плоскость параллельна плоскости $P: 2x+2y+z=0$.

B2 Найдите точки экстремума функции $z=3x^2y+y^3-12x-15y+3$. В ответе укажите значение функции в точке максимума.

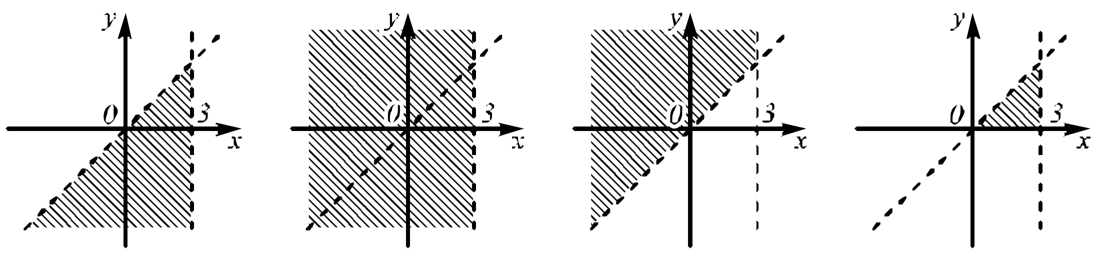
B3 Найдите по определению частные производные функции $z=\sqrt[3]{x^3+y^4}$ в точке $O(0;\ 0)$. Исследуйте дифференцируемость функции в этой точке. В качестве ответа укажите цифры, соответствующие результатам вашего исследования, взятые из следующей таблицы.

$\frac{\partial z}{\partial x}(0;0)$ существует	$\frac{\partial z}{\partial y}(0;0)$ существует	$\frac{\partial z}{\partial x}(0;0)$не существует	$\frac{\partial z}{\partial y}(0;0)$ не существует	функция дифферен-цируема в точке (0;0)	функция не дифференцируема в точке (0;0)
1	2	3	4	5	6

Вариант №5

Часть 1

A1 Найдите область определения функции $z=\frac{\lg(3-x)}{\sqrt{x-y}}$. Выберите соответствующую геометрическую иллюстрацию.



A2 Найдите частные производные функции $z = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$.

1) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y} - \frac{1}{x^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} + \frac{1}{x}$;

2) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y} + y\ln|x|$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x\ln|y| + \frac{1}{x}$;

3) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y} - \frac{y}{x^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{x}$;

4) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x^2}{2y} + y\ln|x|$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x\ln|y| + \frac{y^2}{2x}$.

A3 Сравните скорости v_1 и v_2 изменения функции $z = x^3 + y^2$ в точке $M_0(1;1)$ вдоль оси OX и вдоль оси OY соответственно.

1) $v_1 > v_2$; 2) $v_1 < v_2$; 3) $v_1 = v_2$;
4) сравнение невозможно.

A4 Найдите орт $\overline{a_0}$ и величину $\text{grad}u$ скалярного поля $u = x^2 + y^2 + z^2$ в точке $M_0(2; -2; 1)$.

1) $\overline{a_0} = \{4; -4; 2\}$, $|\text{grad}u(M_0)| = 6$;

2) $\overline{a_0} = \left\{\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right\}$, $|\text{grad}u(M_0)| = 6$;

3) $\overline{a_0} = \{1; 1; 1\}$, $|\text{grad}u(M_0)| = 3$;

4) $\overline{a_0} = \{2; 2; 2\}$, $|\text{grad}u(M_0)| = 2\sqrt{3}$.

A5 Найдите $\frac{\partial z}{\partial y}$ и $\frac{dz}{dy}$, если $z = \text{arctg}\frac{y}{x}$, где $x = \varphi(y)$ – дифференцируемая функция.

1) $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}$, $\frac{dz}{dy} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2}\varphi'(y)$;

2) $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{dz}{dy}=\dfrac{x}{x^2+y^2}$;

3) $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x}{x^2+y^2}$, $\dfrac{dz}{dy}=\dfrac{x}{x^2+y^2}-\dfrac{y}{x^2+y^2}$;

4) $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x}{x^2+y^2}$, $\dfrac{dz}{dy}=-\dfrac{y}{x^2+y^2}\varphi'(y)$.

A6 Найдите d^2z, если $z=\cos(3x-2y)$.

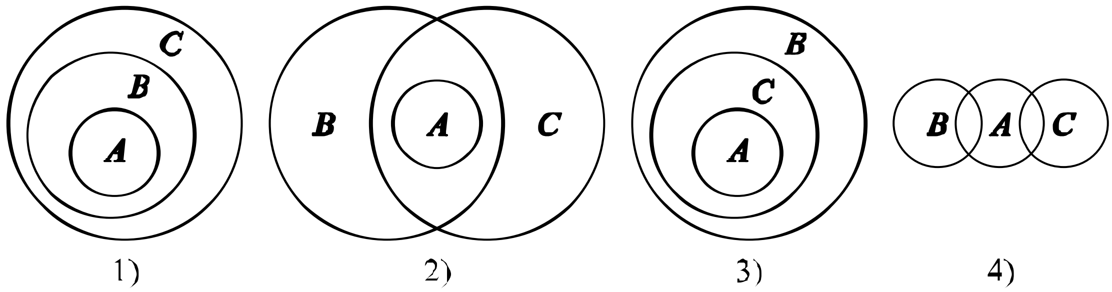
1) $d^2z=-\cos(3x-2y)\left(9dx^2-6dxdy+4dy^2\right)$;

2) $d^2z=-\cos(3x-2y)\left(9dx^2+4dy^2\right)$;

3) $d^2z=\sin^2(3x-2y)(-3dx+2dy)^2$;

4) $d^2z=-\cos(3x-2y)(3dx-2dy)^2$.

A7 Постройте диаграмму взаимного расположения множеств функций:
A – дифференцируемые в точке M_0 функции;
B – функции, имеющие все частные производные в точке M_0;
C – функции, непрерывные в точке M_0.



A8 Найдите $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, если $z=z(u,v)$ – дважды дифференцируемая функция и $u=ax$, $v=by$.

1) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}b^2$; 2) $\dfrac{d^2 z}{dxdy}=\dfrac{d^2 z}{dudv}a^2$;

3) $\dfrac{d^2 z}{dxdy}=\dfrac{d^2 z}{dv^2}b^2$; 4) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}ab$.

Часть 2

B1 На поверхности $S: 2x^2-y^2+z^2+4y-3=0$ найдите точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$, ближайшую к началу координат, в которой нормаль параллельна оси OY.

B2 Найдите точки экстремума функции $z = x^3 + 3xy^2 - 15x + 12y$. В ответе укажите значение функции в точке максимума.

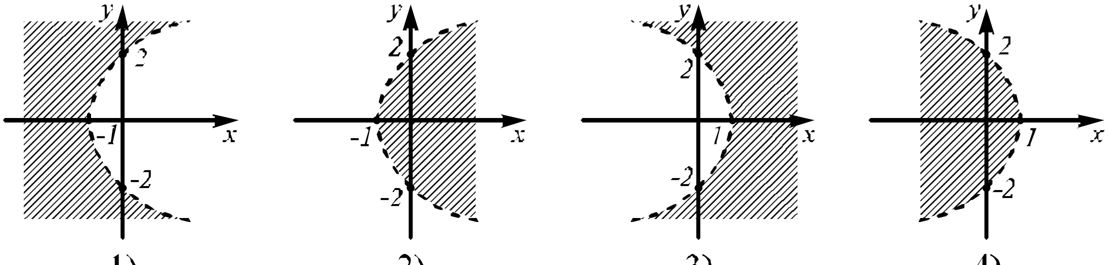
B3 Найдите по определению частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}(0;\,0)$ и $\frac{\partial z}{\partial y}(0;\,0)$ функции $z = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ и исследуйте дифференцируемость в точке $0(0;\,0)$. В качестве ответа укажите цифры, соответствующие результатам вашего исследования, взятые из следующей таблицы.

$\frac{\partial z}{\partial x}(0;0)$ сущест вует	$\frac{\partial z}{\partial y}(0;0)$ сущест вует	$\frac{\partial z}{\partial x}(0;0)$ не существует	$\frac{\partial z}{\partial y}(0;0)$ не существует	функция дифферен- цируема в точке (0;0)	функция не дифферен цируема в точке (0;0)
1	2	3	4	5	6

Вариант №6

Часть 1

A1 Найдите область определения функции $z = \ln\left(4 + 4x - y^2\right)$. Выберите соответствующую геометрическую интерпретацию.



1) 2) 3) 4)

A2 Найдите частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z = e^{-\frac{x}{y}}$.

1) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y} e^{-\frac{x}{y}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{y^2} e^{-\frac{x}{y}}$;

2) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{1}{y} e^{-\frac{x}{y}}, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{x}{y^2} e^{-\frac{x}{y}}$;

3) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{x}{y} e^{-\frac{x}{y}}, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{y^2} e^{-\frac{x}{y}}$;

4) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{1}{y} e^{-\frac{x}{y}}, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x}{y^2} e^{-\frac{x}{y}}$.

A3 Сторона прямоугольника $x = 20$см возрастает со скоростью 5см/с, другая сторона $y = 30$см убывает со скоростью 4см/с. С какой скоростью изменяется площадь прямоугольника?

1) убывает со скоростью $20\text{см}^2/\text{с}$;
2) возрастает со скоростью $20\text{см}^2/\text{с}$;
3) убывает со скоростью $70\text{см}^2/\text{с}$;
4) возрастает со скоростью $70\text{см}^2/\text{с}$.

A4 Найдите производную в точке (3; 1) по направлению к точке (6; 5) от функции $z = x^2 + y^2 + xy$.

1) $\dfrac{21}{5}$; 2) 8; 3) $\dfrac{41}{5}$; 4) $\dfrac{7}{5}$.

A5 Дана функция $z = \arcsin\sqrt{xy}$. Найдите $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{dz}{dx}$, если $y = \sin x$.

1) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{2\sqrt{1-xy}}\sqrt{\dfrac{y}{x}}, \quad \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{1}{2\sqrt{1-xy}}\left(\sqrt{\dfrac{y}{x}} + \cos x\sqrt{\dfrac{x}{y}}\right)$;

2) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{y}{\sqrt{1-xy}}, \quad \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{y\cos x}{\sqrt{1-xy}}$;

3) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{y}{\sqrt{1-xy}}, \quad \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{1}{2\sqrt{1-xy}}\left(\sqrt{\dfrac{y}{x}} + \cos x\sqrt{\dfrac{x}{y}}\right)$;

4) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{2\sqrt{1-xy}}\sqrt{\dfrac{y}{x}}, \quad \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{y\cos x}{\sqrt{1-xy}}$.

A6 Дана функция $z = xy + \sin(x + 2y)$. Найдите $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

1) $-2\sin(x+2y)$; 2) $1 - 2\sin(x+2y)$;
3) $1 + \cos(x+2y)$; 4) $1 - \sin(x+2y)$.

A7 Вставьте пропущенные слово так, чтобы следующее предложение было истинным: «Непрерывность в точке смешанных частных производных второго порядка функции двух переменных $f(x,y)$ является … условием равенства смешанных частных производных $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$».

1) необходимым;
2) достаточным;
3) необходимым и достаточным;
4) ни необходимым, ни достаточным.

A8 Дана функция $z = \sin(x+2y)$, где $x = 2u+3v$, $y = 3u-2v$. Найдите $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$.

1) $-64\sin(x+2y)$; 2) $24\cos(x+2y)$;
3) $12\sin(x+2y)+12\cos(x+2y)$; 4) $-16\sin(x+2y)-8\cos(x+2y)$.

Часть 2

B1 Найдите в первом октанте координаты точки поверхности $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} + 2z^2 = 10$, в которой касательная плоскость параллельна плоскости $x+y+z=1$.

B2 Найдите экстремум функции $z = 3x^2 - 3xy + y^2 + 3x + y$. В качестве ответа укажите $z_{\min}$.

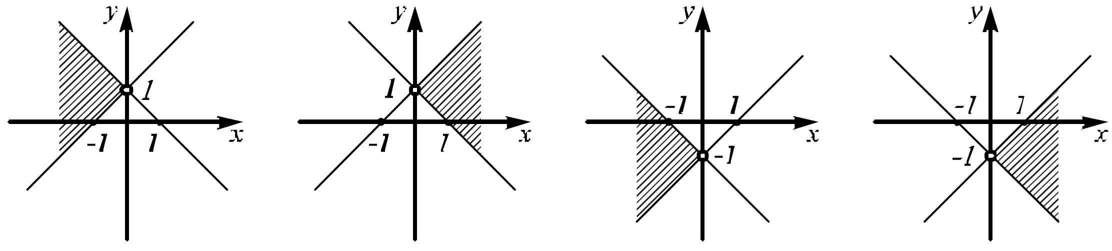
B3 Исследуйте функцию $z(x,y) = \sqrt[3]{xy}$ на непрерывность и дифференцируемость в точке (1; 1). В качестве ответа укажите два числа, соответствующие результатам вашего исследования, взятые из следующей таблицы.

(x_0, y_0) – точка непрерывности	(x_0, y_0) – точка разрыва	в точке (x_0, y_0) функция дифференцируема	в точке (x_0, y_0) функция не дифференцируема
1	2	3	4

Вариант №7

Часть 1

A1 Найдите область определения функции $z=\arcsin\dfrac{y-1}{x}$, где $x<0$.



1) 2) 3) 4)

A2 Найдите $\dfrac{\partial z}{\partial \rho}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial \varphi}$ для функции $z=\rho^2\sin^2\varphi$.

1) $\dfrac{\partial z}{\partial \rho}=2\rho$, $\dfrac{\partial z}{\partial \varphi}=\sin 2\varphi$;

2) $\dfrac{\partial z}{\partial \rho}=2\rho\sin^2\varphi$, $\dfrac{\partial z}{\partial \varphi}=\rho^2\sin 2\varphi$;

3) $\dfrac{\partial z}{\partial \rho}=2\rho\sin^2\varphi$, $\dfrac{\partial z}{\partial \varphi}=-\rho^2\sin 2\varphi$;

4) $\dfrac{\partial z}{\partial \rho}=2\rho$, $\dfrac{\partial z}{\partial \varphi}=\rho^2\sin 2\varphi$.

A3 Один катет прямоугольного треугольника $x=6$см, другой $y=8$см. Сторона x увеличивается со скоростью 0,4см/с, а сторона y уменьшается со скоростью 0,1см/с. С какой скоростью изменяется гипотенуза прямоугольного треугольника?

1) Увеличивается со скоростью 0,2см/с;
2) Уменьшается со скоростью 0,2см/с;
3) Увеличивается со скоростью 0,16см/с;
4) Уменьшается со скоростью 0,16см/с

A4 Найдите орт вектора, в направлении которого скорость изменения функции $z=x^2+4y^2$ в точке (2; 1) наибольшая.

1) $\bar{e}_0=(1;1)$; 2) $\overline{e_0}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}};-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$; 3) $\overline{e_0}=(2;1)$; 4) $\overline{e_0}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}};\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

A5 Дана функция $z=\mathrm{arctg}\dfrac{x}{y}$. Найдите $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ и $\dfrac{dz}{dy}$, если $x=\sin y$.

1) $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{x}{x^2+y^2}$; $\dfrac{dz}{dy}=\dfrac{y\cos y}{x^2+y^2}$;

2) $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{x^2+y^2}$; $\dfrac{dz}{dy}=-\dfrac{x}{x^2+y^2}+\dfrac{y\cos y}{x^2+y^2}$;

3) $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{x}{x^2+y^2}$; $\dfrac{dz}{dy}=\dfrac{1}{x^2+y^2}(y\cos y-x)$.

4) $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{x^2+y^2}$; $\dfrac{dz}{dy}=\dfrac{y\cos y}{x^2+y^2}$.

A6 Дана функция $z=\sqrt{2xy+y^2}$. Найдите $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

1) $\dfrac{xy}{\left(2xy+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$; 2) $\dfrac{y}{\left(2xy+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$; 3) $\dfrac{xy}{\left(2xy+y^2\right)}$; 4) $\dfrac{4xy}{\left(2xy+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$.

A7 Вставьте пропущенные слова так, чтобы следующее предложение было истинным: «Существование в точке всех частных производных первого порядка функции нескольких переменных есть … условие ее дифференцируемости в этой точке».

1) необходимое;
2) достаточное;
3) необходимое и достаточное;
4) ни необходимое, ни достаточное.

A8 Дана функция $z=\cos(x+2y)$, где $x=3u+2v$, $y=2u-3v$. Найдите $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}$.

1) $20\sin(x+2y)$; 2) $-49\cos(x+2y)$;
3) $42\sin(x+2y)$; 4) $-9\cos(x+2y)$.

Часть 2

B1 Найдите координаты точек поверхности $x^2+2y^2+3z^2=6$, в которых касательная плоскость параллельна плоскости $2x+4y-6z=1$. В ответ запишите координаты той точки, для которой $x > 0$. (Например, 4; –6; 5).

B2 Найдите экстремум функции $z=x^2+4xy+5y^2-2x-6y-5$. В ответ запишите $z_{\min}$.

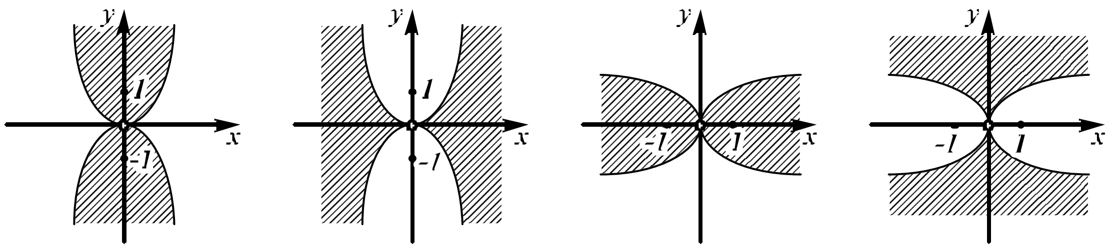
B3 Исследуйте функцию $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ на непрерывность и дифференцируемость в точке (0; 1). В качестве ответа укажите два числа, соответствующие результатам вашего исследования, взятые из следующей таблицы.

(x_0, y_0)– точка непрерывности	(x_0, y_0)– точка разрыва	в точке (x_0, y_0) функция дифференцируема	в точке (x_0, y_0) функция не дифференцируема
1	2	3	4

Вариант №8

Часть 1

A1 Укажите область определения функции $z = \arcsin\left(\dfrac{x}{y^2}\right), y \neq 0$.



1) 2) 3) 4)

A2 Найдите частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функции двух переменных $z = \dfrac{x^2}{y^2} - \dfrac{y}{x}$.

1) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2x}{y^2} + \dfrac{y}{x^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{2x^2}{y^3} - \dfrac{1}{x}$;

2) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x + \dfrac{y}{x^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x^2}{2y} - \dfrac{1}{x}$;

3) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x - y$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x^2}{2y} - \dfrac{1}{x}$;

4) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2x}{y^2} + \dfrac{y}{x^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{2x}{y^3} + \dfrac{1}{x}$.

A3 Высота конуса $H = 20$см, радиус основания $R = 5$см. Как приблизительно изменится объем конуса при увеличении высоты на 0,2см и уменьшении радиуса основания на 0,2см? (Используйте дифференциал функции.)

1) Увеличится на 5π см^3; 2) Уменьшится на $\dfrac{35\pi}{3}$ см^3;

3) Увеличится на 10π см^3; 4) Не изменится.

A4 Найдите косинус угла между градиентами функции $z=\sqrt{x^2+y^2}$ в точках (1; 1) и (3; 4).

1) $\cos\alpha=\frac{7}{10}$; 2) $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{10}$; 3) $\cos\alpha=\frac{7\sqrt{2}}{10}$; 4) $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

A5 Дана функция $z=\ln \operatorname{tg}(xy)$. Найдите $\frac{\partial z}{\partial y}$ и $\frac{dz}{dy}$, если $x=e^y$.

1) $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2x}{\sin(2xy)}$, $\frac{dz}{dy}=\frac{2ye^y}{\sin(2xy)}$;

2) $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2x}{\sin(xy)}$, $\frac{dz}{dy}=\frac{2ye^y}{\cos(xy)}$;

3) $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x}{\operatorname{tg}(xy)}$, $\frac{dz}{dy}=\frac{1}{\operatorname{tg}(xy)}\left(x+ye^y\right)$;

4) $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2x}{\sin(2xy)}$, $\frac{dz}{dy}=\frac{2\left(x+ye^y\right)}{\sin(2xy)}$.

A6 Дана функция $z=\cos(x+\sin y)$. Найдите $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

1) $-\cos(x+\cos y)$; 2) $-\cos y\cdot\cos(x+\sin y)$;
3) $\cos y-\cos(x+\cos y)$; 4) $\cos y-\sin(x+\sin y)$.

A7 Вставьте пропущенные слова так, чтобы следующее предложение было истинным: «Дифференцируемость в точке (x_0, y_0) функции $f(x,y)$ является … условием существования касательной плоскости к графику этой функции в точке $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$».

1) необходимым;
2) достаточным;
3) необходимым и достаточным;
4) ни необходимым, ни достаточным.

A8 Дана функция $z=e^{x+2y}$, где $x=2u+3v$, $y=3u-2v$. Найдите $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$.

1) $12e^{x+2y}$; 2) $48e^{x+2y}$; 3) $64e^{x+2y}$; 4) $8e^{x+2y}$.

Часть 2

B1 Найдите в первом октанте координаты точек поверхности $-x^2 + y^2 + 2z^2 = 2$, в которой касательная плоскость перпендикулярна оси OZ.

B2 Найдите экстремум функции $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$. В ответе запишите $z_{\max}$.

B3 Исследуйте функцию $z = \sqrt[4]{x^4 + y^4}$ на непрерывность и дифференцируемость в точке (0; 0). В качестве ответа укажите два числа, соответствующие результатам вашего исследования, взятые из следующей таблицы.

(x_0, y_0) – точка непрерывности	(x_0, y_0) – точка разрыва	в точке (x_0, y_0) функция дифференцируема	в точке (x_0, y_0) функция не дифференцируема
1	2	3	4