1. Вычисление пределов числовых последовательностей

Рассмотренные нами вопросы о числовых последовательностях содержат основные понятия и некоторые сведения о структуре множества числовых последовательностей. Кроме того, на множестве последовательностей для двух заданных последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ определены арифметические операции следующим образом:

сумма $\{x_n\}+\{y_n\}=\{x_n+y_n\}$;

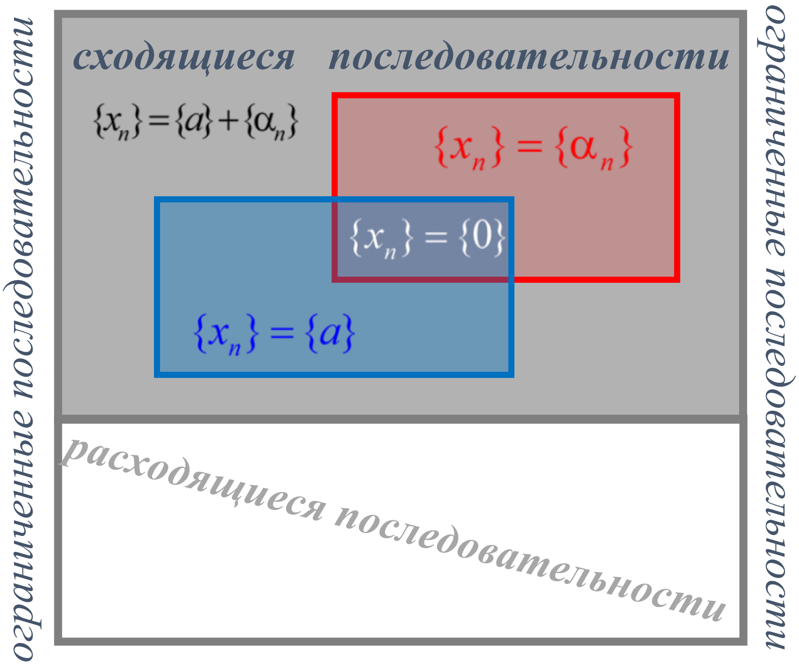
разность $\{x_n\} - \{y_n\}=\{x_n - y_n\}$;

произведение $\{x_n\}\cdot\{y_n\}=\{x_n \cdot y_n\}$;

частное $\dfrac{\{x_n\}}{\{y_n\}}=\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$, где $\forall n \in N \;\; y_n \neq 0$.

И теперь возникает практическая задача: как вычислить предел последовательности, которая потребует знания специальных свойств последовательностей, обеспечивающих возможности вычисления.

Обратимся к диаграмме, которая иллюстрирует структуру ограниченных последовательностей



1. Диаграмма должна напомнить нам необходимый признак сходимости: ***всякая сходящаяся последовательность ограничена***. А это значит, что иногда перед вычислением предела бывает полезна проверить ограниченность последовательности.
2. Диаграмма показывает, что все сходящиеся последовательности строятся из постоянных и бесконечно малых последовательностей. Следовательно, нужно знать свойства множеств постоянных, бесконечно малых и сходящихся последовательностей.

Постоянные последовательности

В прошлой теме было доказано, что

если $\{x_n\}$ – постоянная последовательность ($x_n=a$), то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Этого факта достаточно, для нахождения пределов, полученных в результате выполнения арифметических операций над постоянными последовательностями.

Бесконечно малые последовательности

Теорема 1. Если $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ и $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$, то $\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = 0$.

Сумма конечного числа БМП есть последовательность бесконечно малая.

Теорема 2. Если $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ и $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$, то $\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = 0$.

Произведение конечного числа БМП есть последовательность бесконечно малая.

Теорема 3. Если $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ и $|y_n| \le M$ для $\forall n \in N$, то $\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = 0$.

Произведение БМП на ограниченную последовательность есть бесконечно малая последовательность.

Теорема 4. Если $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ и для $\forall n \in N$ $x_n \neq 0$, то $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \infty$.

Если $\{x_n\}$ – БМП и для $\forall n \in N$ $x_n \neq 0$, то обратная к ней последовательность есть ББП.

Перечислим наиболее часто встречающиеся БМП:

$\left\{\frac{1}{n^q}\right\}$, $q \ge 1$; $\left\{\frac{1}{q^n}\right\}$, $|q| > 1$; $\left\{\frac{1}{\sqrt[q]{n}}\right\}$, $q \in N$; $\left\{\frac{1}{\log_a n}\right\}$, $a > 1$, $n \neq 1$;

$\left\{\frac{1}{n!}\right\}$ $(n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n)$

Пример 1. $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\log_2 2n} - \frac{1}{n^2}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log_2 2n} - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 0,$$

т.к. каждая из последовательностей является бесконечно малой.

Пример 2. $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \cdot \frac{1}{n!}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \cdot \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!} = 0,$$

т.к. каждая из последовательностей является бесконечно малой.

Пример 3. $$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n + 2}{n} = \lim_{n\to\infty}((-1)^n + 2) \cdot \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0,$$

т.к. для $\forall n \in N$ $1 \le (-1)^n + 2 \le 3$, т.е. $x_n = (-1)^n + 2$ – ограниченная последовательность, а $y_n = \frac{1}{n}$ – бесконечно малая.

Замечание. В теореме 1 условие конечности числа слагаемых существенно. Покажем, что существуют последовательности, для которых игнорирование этого условия приводит к ошибке.

Найдем предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+...+n}{n^2}=$

а) Первый способ:

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+...+n}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{3}{n^2}+...+\dfrac{n}{n^2}\right)=0$, так как каждая из дробей является бесконечно малой последовательностью.

б) Второй способ:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+...+n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+n)n}{2n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+n}{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2},$$

Ответы разные. Где ошибка?

Ошибка совершена в первом способе: выражение в скобке представляет собой не конечную, а бесконечную при $n\to\infty$ сумму бесконечно малых последовательностей. И это уже не ноль, а вполне ощутимая величина – 1\2.

Сходящиеся последовательности

Теорема 1. Следующие два утверждения эквивалентны:

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a \Leftrightarrow x_n=a+\alpha_n,\ \text{где}\ \lim_{n\to\infty}\alpha_n=0.$$

Всякая сходящаяся последовательность представима в виде суммы своего предела и БМП

Теорема 2. Если $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, то $\exists\, M>0$, что $\forall n$: $|x_n|\le M$

Всякая сходящаяся последовательность ограничена.

Теорема 3. (*об арифметических операциях над сходящимися последовательностями*)

Пусть существуют $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ и $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$. Тогда существуют пределы суммы $\{x_n+y_n\}$, разности $\{x_n-y_n\}$, произведения $\{x_n\cdot y_n\}$, частного $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$, причем справедливы равенства:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=a+b;$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=a\cdot b;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{a}{b},\ \forall n:\ |y_n|\ne 0\ \text{и}\ a\ne 0.$$

Теорему можно доказать, используя Теорему 1 и свойства БМП. Сделайте это самостоятельно для случая $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=a\cdot b$

Теорема 4. (*о предельном переходе в неравенстве*)

Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, и, начиная хотя бы с некоторого номера, члены последовательности удовлетворяют неравенству $x_n \ge b$ ($x_n \le b$), то этому же неравенству удовлетворяет и предел $a \ge b$ ($a \le b$).

Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, и для $\forall n > n_0$: $x_n \ge b$ ($x_n \le b$), то $a \ge b$ ($a \le b$)

Теорема 5. (*о трех последовательностях*)

Если две последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ имеют общий предел a и, начиная хотя бы с некоторого номера члены третьей последовательности удовлетворяют неравенству $x_n \le z_n \le y_n$, то и $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ и для $\forall n > n_0$: $x_n \le z_n \le y_n$, то и $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$

Пример 1. Имеет ли предел последовательность $x_n = \dfrac{n^2+1}{n}$?

Покажем, что последовательность не ограничена сверху.

а) берем $\forall M > 0$.

б) Составляем неравенство $x_n > M$: $\dfrac{n^2+1}{n} > M$.

в) Находим n:

Для $\forall n \in N$ $\dfrac{n^2+1}{n} = n + \dfrac{1}{n} > n > M$. Следовательно, условие неограниченности сверху выполняется для $\forall n \in [M]$. Но тогда последовательность не является сходящейся (искать ее предел не имеет смысла).

Пример 2. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n+24}{n+1}$?

Применение теоремы о пределе дроби не возможно, так как числитель и знаменатель – бесконечно большие последовательности, но в силу того, что дробь неправильная (степень n числителя равна степени n знаменателя), можно из нее выделить целую часть

$$\begin{array}{r|l} 5n+24 & n+1 \\ \cline{2-2} -\;5n+5 & 5 \\ \cline{1-1} 19 & \end{array}$$

и представить неправильную дробь в виде суммы целой части и правильной рациональной дроби:

$$\frac{5n+24}{n+1} = 5 + \frac{19}{n+1}$$

Получили представление $\forall n \in N: x_n = 5 + \alpha_n$, где $\alpha_n = \dfrac{19}{n+1}$ – бесконечно малая последовательность. В силу теоремы 1

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n+24}{n+1} = 5$$

Пример 3. Дано: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 4$. Применяя теоремы о пределах, найдите а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n \cdot y_n - \frac{1}{2}\cdot y_n}{x_n + 1}$, б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+2}\cdot y_{n+1} - \frac{1}{2}\cdot y_{n+2}}{x_{n+1}+1}$.

а) Применяем последовательно теоремы о пределе частного, произведения, суммы и разности сходящихся последовательностей и учитывая, что предел постоянной последовательности равен этой постоянной, получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n\cdot y_n - \frac{1}{2}\cdot y_n}{x_n+1} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n\cdot y_n - \frac{1}{2}\cdot y_n\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+1)} = = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n) - \lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{2}\cdot y_n)}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} 1} =$$

$$\frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n - \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\lim\limits_{n\to\infty} y_n}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} 1} =$$

$$= \frac{2\cdot 4 - \frac{1}{2}\cdot 4}{2+1} = \frac{6}{3} = 2$$

б) Заметим, что здесь присутствуют те же самые последовательности, в которых отброшены один или два первых члена. Это обстоятельство не влияет ни на существование предела, ни на его значение. В самом деле: по определению предела последовательности имеем

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \ \exists N(\varepsilon)\ \ \forall n > N(\varepsilon): |x_n - a| < \varepsilon$$

Так как для $\forall p > N \quad n + p > n > N(\varepsilon)$, то неравенство $|x_{n+p} - a| < \varepsilon$ выполняется и подавно. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+p} = a$. Это означает, что отбрасывание любого конечного числа (p) первых членов последовательности не влияет на ее сходимость.

Справедливо и обратное утверждение.

Приписывание к последовательности любого конечного числа первых членов не влияет на ее сходимость.

Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+2} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2,$

$\lim\limits_{n\to\infty} y_{n+2} = \lim\limits_{n\to\infty} y_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 4$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+2}\cdot y_{n+1}-\dfrac{1}{2}\cdot y_{n+2}}{x_{n+1}+1}=2$.

Пример 4. Доказать, что : $x_n=\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{n}}$ – бесконечно малая.

Для $\forall n\in N$ имеем $1<\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{n}}<1+\dfrac{1}{n}$. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}1=1$, то и $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{n}}=1$ (по теореме о трех последовательностях).

Бесконечно большие последовательности

Теорема 1. Если $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$ и для $\forall n$ $x_n\neq 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x_n}=0$.

Если $\{x_n\}$ – ББП и для $\forall n\in N$ $x_n\neq 0$, то обратная к ней последовательность $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ есть БМП.

Теорема 2. Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ – бесконечно большие последовательности и $\forall n$: $x_n\cdot y_n>0$, тогда $\{x_n+y_n\}$ – ББП.

Сумма бесконечно больших последовательностей одного знака есть последовательность бесконечно большая того же знака.

Теорема 3. Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ – бесконечно большие последовательности, тогда $\{x_n\cdot y_n\}$ – ББП.

Произведение бесконечно больших последовательностей есть последовательность бесконечно большая.

Теорема 4. Пусть $\{x_n\}$– бесконечно большая последовательность, а $\{y_n\}$ – ограниченная, отделимая от нуля. Тогда $\{x_n\cdot y_n\}$ – ББП.

Произведение бесконечно большой последовательности на ограниченную, отделимую от нуля, есть последовательность бесконечно большая.

Замечание. Последовательность $\{x_n\}$ называют ***отделимой от нуля***, если существуют число $K>0$ и номер N такие, что $|x_n|>K$, $\forall n>N$.

Теорема 5. Пусть $\{x_n\}$– бесконечно большая последовательность, а $\{y_n\}$ – неограниченная последовательность ($\forall n$: $|y_n|>\varepsilon$).
Тогда $\{x_n\cdot y_n\}$ – ББП.

Произведение бесконечно большой последовательности на неограниченную, есть последовательность бесконечно большая.

Перечислим наиболее часто встречающиеся ББП:

а) $\{x_n\} = \left\{n^q\right\},\ q \geq 1$;

б) $\{x_n\} = \left\{\sqrt[q]{n}\right\},\ q \in N$;

в) $\{x_n\} = \left\{q^n\right\},\ |q| > 1$;

г) $\{x_n\} = \left\{n!\right\}\ (n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n)$;

д) $\{x_n\} = \left\{\log_a n\right\},\ a > 1$;

Пример. Найдите пределы:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(2^n + \sqrt{n}) = \infty$ (сумма бесконечно больших одного знака).

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \log_{\frac{1}{2}} n \cdot (1-n^2) = \infty$ (произведение бесконечно больших).

3) $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot \sin n = \infty$ (произведение ограниченной, отделимой от нуля, на бесконечно большую последовательность).

4) $\lim\limits_{n\to\infty} (n\cos n\pi)\cdot((-1)^{n+1}100n) = -\infty$ минус (произведение бесконечно большой последовательности на последовательность $\{y_n\}$, такую, что ($\forall n$: $|y_n| \geq 100$).

5) $\lim\limits_{n\to\infty} (n + \sin n) = \infty$ (сумма бесконечно большой положительного знака и ограниченной снизу последовательности: $\forall n:\ \sin n \geq -1$).

Арифметические неопределенности

При выполнении арифметических операций над бесконечно малыми и бесконечно большими последовательностями могут возникнуть следующие выражения:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \left\{\frac{0}{0}\right\}; \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\};$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \left\{\infty - \infty\right\}; \qquad \lim_{n\to\infty} x_n\cdot y_n = \left\{0\cdot\infty\right\},$$

не предусмотренные в вышеперечисленных теоремах о пределах. Они называются ***арифметическими неопределенностями***.

Первое, что при этом следует сделать – это применить такие тождественные преобразования выражения под знаком предела, которые придадут ему форму уже доступную для применения имеющихся способов вычисления пределов.

Неопределенность $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$

Приведем некоторые примеры.

Пример 1. Укажите предел отношения двух многочленов степеней m и k:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_m(n)}{Q_k(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_0n^m+a_1n^{m-1}+a_2n^{m-2}+\ldots+a_mn^0}{b_0n^k+b_1n^{k-1}+b_2n^{k-2}+\ldots+b_kn^0}$$

Если $n\to\infty$, то в числителе и в знаменателе дроби получаются алгебраические суммы бесконечно больших последовательностей. Вынесем в числителе и в знаменателе старшие степени n за скобку, получим:

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^m\left(a_0+\frac{a_1}{n}+\frac{a_2}{n^2}+\ldots+\frac{a_m}{n^m}\right)}{n^k\left(b_0+\frac{b_1}{n}+\frac{b_2}{n^2}+\ldots+\frac{b_k}{n^k}\right)}=\frac{\infty}{\infty}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}n^{m-k}\frac{a_0+\frac{a_1}{n}+\frac{a_2}{n^2}+\ldots+\frac{a_m}{n^m}}{b_0+\frac{b_1}{n}+\frac{b_2}{n^2}+\ldots+\frac{b_k}{n^k}}$$

Здесь a_0 и b_0 – постоянные, остальные слагаемые числителя и знаменателя представляют конечные суммы бесконечно малых последовательностей, поэтому

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{P_m(n)}{Q_k(n)}=\frac{a_0}{b_0}\lim_{n\to\infty}n^{m-k}=\begin{cases}0, & m<k;\\ \frac{a_0}{b_0}, & m=k;\\ \infty, & m>k,\end{cases}}$$

где знак ∞ зависит от знаков a_0 и b_0. Делаем вывод:

значение предела определяется отношением старших степеней многочленов числителя и знаменателя. Эти степени по сравнению с остальными имеют наибольшую скорость стремления к бесконечности.

Применим такие же соображения к отысканию следующих пределов:

Пример 2. Найдите $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-\sqrt{n^3+1}}{\sqrt[3]{n^6+2}-n}$.

Как и в предыдущем примере, числитель и знаменатель дроби представляют разности бесконечно больших последовательностей, среди которых встречаются алгебраические иррациональные функции $(\sqrt{n^3+1},\sqrt[3]{n^6+2})$. Вынесем в числителе и знаменателе старшие степени n за скобку, получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-\sqrt{n^3+1}}{\sqrt[3]{n^6+2}-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-\sqrt{n^3\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}}{\sqrt[3]{n^6\left(1+\frac{2}{n^6}\right)}-n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n^{3/2}\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}}{n^2\sqrt[3]{1+\frac{2}{n^6}}-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(1-\frac{1}{n^{1/2}}\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}\right)}{n^2\left(\sqrt[3]{1+\frac{2}{n^6}}-\frac{1}{n}\right)}=\frac{\infty}{\infty}$$

здесь $\frac{1}{n^{1/2}},\frac{1}{n^3},\frac{2}{n^6},\frac{1}{n}$ – бесконечно малые.

Для нахождения $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}$ применим теорему о «трех последовательностях». Для $\forall n\in N$ имеем $1<\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}<1+\sqrt{\frac{1}{n^3}}$. Переходя к пределу в неравенстве, получаем $1<\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}<1$, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}=1$. Аналогично $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{1+\frac{2}{n^6}}=1$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-\sqrt{n^3+1}}{\sqrt[3]{n^6+2}-n}=1.$$

Пример 3. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n-2^n}{3^{n-1}+2^n}$.

И здесь числитель и знаменатель дроби есть разность и сумма бесконечно больших последовательностей. В числителе и знаменателе выбираем ту бесконечно большую величину, которая быстрее стремится к бесконечности, и вынесем ее за скобки. Получаем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-2^n}{3^{n-1}+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}{3^{n-1}\left(1+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}=\frac{\infty}{\infty}.$$

Здесь $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ – бесконечно малая величина, поэтому (Изменила!), $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)=1$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)=1$. С учетом этого, получаем:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-2^n}{3^{n-1}+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{3^{n-1}}=3.$$

Пример 4. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!+(2n+2)!}{(2n+3)!-(2n+2)!}$.

Имея ввиду, что по определению $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$, находим

$(2n+1)! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n+1)$

$(2n+2)! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n+1)\cdot (2n+2) = (2n+1)!\cdot (2n+2)$

$(2n+3)! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n+1)\cdot (2n+2)\cdot (2n+3) = (2n+1)!\cdot (2n+2)\cdot (2n+3)$ послед чего заключаем, что числитель и знаменатель – сумма и разность бесконечно больших величин. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!+(2n+2)!}{(2n+3)!-(2n+2)!}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!+(2n+1)!\cdot(2n+2)}{(2n+1)!\cdot(2n+2)\cdot(2n+3)-(2n+1)!\cdot(2n+2)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{(2n+1)!}(1+2n+2)}{\cancel{(2n+1)!}\cdot(2n+2)\cdot(2n+3-1)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{(2n+2)^2}=\frac{\infty}{\infty}$$

Как и в первом примере, выносим старшие степени n в числителе и знаменателе за скобку, получаем:

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{(2n+2)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(2+\frac{3}{n}\right)}{n^2\left(2+\frac{2}{n}\right)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\left(2+\frac{3}{n}\right)}{\left(2+\frac{2}{n}\right)^2}=0\cdot1=0.$$

Пример 5. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-\cos n}{n+\sin n}$.

Учитывая тот факт, что $n\to+\infty$ и $\forall n\in N$: $\cos n\geq -1$ $\sin n\geq -1$, т.е. ограничены снизу, имеем $\lim\limits_{n\to\infty}(n-\cos n)=\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty}(n+\sin n)=\infty$.

Тогда действует как и ранее

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-\cos n}{n+\sin n}=\frac{\infty}{\infty}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1-\frac{\cos n}{n}\right)}{n\left(1+\frac{\sin n}{n}\right)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}1-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cos n}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}}=$$

$$= \frac{1 - \lim\limits_{n\to\infty} \overbrace{\frac{1}{n}}^{\text{бм.}} \cdot \overbrace{\cos n}^{\text{огр.}}}{1 + \lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{бм.}} \cdot \underbrace{\sin n}_{\text{огр.}}} = \frac{1-0}{1+0} = 1.$$

Пример 6. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-2+3-4+...+(2n-1)-2n}{\sqrt{n^2+1}}$.

Сгруппируем в числителе все слагаемые со знаком «+» и со знаком «–». Получим неопределенность вида

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-2+3-4+...+(2n-1)-2n}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{\infty-\infty}{\infty}$$

Преобразуем числитель дроби:

$$(1-2)+(3-4)+...+((2n-1)-2n) = -1\cdot n$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-1\cdot n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-1\cdot n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = -1.$$

Здесь $\forall n:\ 1 < \sqrt{1+\frac{1}{n^2}} < 1+\frac{1}{n^2}$ и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n^2}} = 1$.

Тест

Неопределенность $\{\infty-\infty\}$

В тех случаях, когда указанная неопределенность возникает при нахождении предела алгебраической суммы бесконечно больших последовательностей, достаточно вынести за скобку бесконечно большую последовательность, имеющую наибольшую скорость роста, и проанализировать результат.

Пример 1. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty}(2^n-3^n)$.

$$\lim_{n\to\infty}(2^n-3^n) = \lim_{n\to\infty} 3^n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1\right) = -\infty.$$

Пример 2. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^2+n} - \sqrt{n^3})$.

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^2+n} - \sqrt{n^3}) = \infty - \infty = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)} - \sqrt{n^3}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(n^{2/3}\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{n}\right)} - n^{3/2}\right) = \lim_{n\to\infty} n^{3/2}\left(\frac{1}{n^{5/6}}\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{n}\right)} - 1\right) = -\infty.$$

Здесь $\left\{\dfrac{1}{n^{5/6}}\right\}$ – бесконечно малая последовательность, $\left\{\sqrt[3]{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}\right\}$ – сходящаяся к единице, а $\left\{n^{2/3}\right\}$ – бесконечно большая последовательность положительного знака.

Общей рекомендацией раскрытия неопределенности вида $\{\infty-\infty\}$ является сведение ее с помощью тождественных преобразований к ранее рассмотренной неопределенности $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 1. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} 5n(\sqrt{n^2+2}-n)$.

Выражение в скобках представляет неопределенность $(\infty-\infty)$. Для того, чтобы для данного выражения получить тождественную дробь, умножим и разделим его на сопряженное выражение. Получим:

$$\lim_{n\to\infty} 5n(\sqrt{n^2+2}-n)=\lim_{n\to\infty}\frac{5n(\sqrt{n^2+2}-n)(\sqrt{n^2+2}+n)}{\sqrt{n^2+2}+n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5n(n^2+2-n^2)}{\sqrt{n^2+2}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{10n}{\sqrt{n^2+2}+n}=\frac{\infty}{\infty}$$

Далее действуем по известной схеме

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{10n}{\sqrt{n^2\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{10\cancel{n}}{\cancel{n}\sqrt{\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)}+1}=5.$$

Здесь $\forall n:\ 1<\sqrt{1+\dfrac{2}{n^2}}<1+\dfrac{2}{n^2}$ и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\dfrac{2}{n^2}}=1$.

Пример 2. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^3+n^2+1}-\sqrt[3]{n^3-n^2+1})$.

Имеем неопределенность вида $(\infty-\infty)$. По аналогии с предыдущим примером умножим и разделим данное выражение $(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})$ на неполный квадрат суммы $(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})$, что позволит устранить иррациональности в числителе дроби $\dfrac{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}{1}$. Получим:

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^3+n^2+1}-\sqrt[3]{n^3-n^2+1})=.$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{n^3+n^2+1}-\sqrt[3]{n^3-n^2+1}\right)\left(\sqrt[3]{(n^3+n^2+1)^2}+\sqrt[3]{(n^3+n^2+1)(n^3-n^2+1)}+\sqrt[3]{(n^3-n^2+1)^2}\right)}{\sqrt[3]{(n^3+n^2+1)^2}+\sqrt[3]{(n^3+n^2+1)(n^3-n^2+1)}+\sqrt[3]{(n^3-n^2+1)^2}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+n^2+1-n^3+n^2-1}{\sqrt[3]{(n^3+n^2+1)^2}+\sqrt[3]{(n^3+n^2+1)(n^3-n^2+1)}+\sqrt[3]{(n^3-n^2+1)^2}}=.$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{\sqrt[3]{n^6(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})^2}+\sqrt[3]{n^6(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})}+\sqrt[3]{n^6(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})^2}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2\sqrt[3]{(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})^2}+\sqrt[3]{(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})}+\sqrt[3]{(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})^2}}=\frac{2}{3}$$

Здесь $\forall n:\ 1<\sqrt[3]{1\pm\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}<1\pm\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}$, поэтому, по теореме о трех последовательностях $\left\{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right\}$ и $\left\{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right\}$ – стремятся к единице.