ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Э.Н. Подскребко, Н.Ф. Пестова

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Издание третье, переработанное

Рекомендовано Сибирским региональным учебно-методическим
центром высшего профессионального образования
для межвузовского использования в качестве
учебного пособия для студентов
инженерно-технических специальностей

Издательство Томского политехнического университета
2008

ББК 22.161.1я73
УДК 517.518.84:517.2 (075.8)
П446

Подскребко Э.Н.

П446 Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных: учеб. пособие / Э.Н. Подскребко, Н.Ф. Пестова. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2008. – 132 с.

Учебное пособие предназначено для студентов технических вузов, изучающих раздел "Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных". В пособии приведены определения, формулировки теорем, решения типовых примеров, набор упражнений для самостоятельной работы.

Особенностью учебного пособия является формирование с помощью специально подобранных тестов навыков сознательного изучения математического материала: понятий, свойств, алгоритмов, структуры.

УДК 517.518.84:517.2 (075.8)

Рекомендовано к печати Редакционно-издательским советом Томского политехнического университета

Рецензенты

Доктор физико-математических наук,
заведующий кафедрой общей математики ТГУ
С.В. Панько

Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры общей математики ТГУ
В.И. Кан

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МЕТРИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА И НЕКОТОРЫЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ В НЁМ

1.1. Понятие метрического пространства

Известно, насколько плодотворна идея расстояния в эвклидовой геометрии. С понятием расстояния между точками связаны такие её факты как теорема Пифагора, подобие фигур, измерение площадей, объёмов и т.д.

Оказывается, что и множество объектов произвольной природы можно изучать с точки зрения взаимного расположения его элементов, если ввести в нём понятие расстояния (метрики).

Определение 1.1. *Множество X называется метрическим пространством, если любым двум его элементам x и y поставлено в соответствие действительное число* $\rho(x,y)$ (*метрика*) *так, что выполняются следующие аксиомы:*

1) $\rho(x,y)\geq 0$, *причём* $\rho(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$ (*аксиома неотрицательности и тождественности*);

2) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$ (*аксиома симметрии*);

3) $\rho(x,y)\leq \rho(x,z)+\rho(z,y)$ (*аксиома треугольника*).

Рассмотрим некоторые примеры метрических пространств.

Пример 1.1. Множество действительных чисел $\boldsymbol{R}$ образует метрическое пространство с метрикой $\rho(x,y)=|x-y|$.

Проверим выполнение аксиом метрического пространства. В самом деле, $\forall x, y \in \boldsymbol{R}$ $\rho(x, y) = |x - y| \geq 0$. Пусть $\rho(x,y)=|x-y|=0$, тогда $x = y$. Обратно, пусть $x=y$, тогда $\rho(x,y)=|x-y|=0$.

Очевидно, что $\rho(x,y)=|x-y|=|y-x|=\rho(y,x)$.

Наконец, выполняется и аксиома треугольника

$$\rho(x,y)=|x-y|=|(x-z)+(z-y)| \leq |x-z|+|z-y|=\rho(x,z)+\rho(z,y).$$

Пример 1.2. Множество точек плоскости можно метризовать, если расстояние между точками $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$ ввести по формуле

$$\rho(M_1,M_2)=\max\{|x_1-x_2|,\ |y_1-y_2|\}.$$

Во-первых, выполняется первая аксиома метрического пространства. Для $\forall M_1(x_1,y_1), M_2(x_2,y_2)$ $\max\{|x_1-x_2|,\ |y_1-y_2|\}\geq 0$.

Пусть для определённости

$$\max\{|x_1 - x_2|,\ |y_1 - y_2|\} = |x_1 - x_2| .$$

Тогда, если $\rho(M_1, M_2) = 0$, то $|x_1 - x_2| = 0$, откуда $x_1 = x_2$, следовательно, и $y_1 = y_2$, а значит $M_1 = M_2$. Пусть теперь $M_1 = M_2$, тогда $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ и $\rho(M_1, M_2) = \max\{|x_1 - x_2|,\ |y_1 - y_2|\} = 0$.

Во-вторых, очевидно, что $\rho(M_1, M_2) = \rho(M_2, M_1)$.

В-третьих, выполняется и третья аксиома метрического пространства. Пусть, например,

$$\rho(M_1, M_2) = \max\{|x_1 - x_2|,\ |y_1 - y_2|\} = |y_1 - y_2| .$$

Тогда

$$\rho(M_1, M_2) = |y_1 - y_2| = |(y_1 - y_3) + (y_3 - y_2)| \le$$
$$\le |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2| \le \max\{|x_1 - x_3|, |y_1 - y_3|\} +$$
$$+ \max\{|x_3 - x_2|,\ |y_3 - y_2|\} = \rho(M_1, M_3) + \rho(M_3, M_2).$$

Множество *X*, состоящее из упорядоченных наборов *n* чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, можно метризовать различными способами. Рассмотрим наиболее часто встречающиеся.

Если $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in X$, то приняты следующие обозначения:

1. $X = \boldsymbol{R}^n$, если $\rho(M_0, M) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \left(x_i - x_i^0\right)^2}$.

2. $X = \boldsymbol{R}_0^n$, если $\rho(M_0, M) = \max\limits_{1 \le i \le n} \left|x_i - x_i^0\right|$.

3. $X = \boldsymbol{R}_1^n$, если $\rho(M_0, M) = \sum\limits_{i=1}^{n} \left|x_i - x_i^0\right|$.

Пример 1.3. Множество функций, непрерывных на $[a, b]$, можно метризовать, если расстояние ввести по формуле

$$\rho(x, y) = \max_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)| .$$

В самом деле, для $\forall x(t), y(t)$, непрерывных на $[a, b]$, $|(x(t) - y(t))|$ есть непрерывная функция, которая по теореме Вейерштрасса достигает на этом отрезке своего наибольшего значения. Следовательно, $\max\limits_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)|$ существует и неотрицателен.

Пусть $\rho(x,y)=\max\limits_{t\in[a,b]}|x(t)-y(t)|=0$, тогда $x(t)=y(t)\ \ \forall\ t\in[a,b]$. Если же $x(t)=y(t)$ на $[a,\ b]$, то $\rho(x,y)=\max\limits_{t\in[a,b]}|x(t)-y(t)|=0$.

Очевидно, что выполняется и вторая аксиома, т. к.

$$\rho(x,y)=\max_{t\in[a,b]}|x(t)-y(t)|=\max_{t\in[a,b]}|y(t)-x(t)|=\rho(y,x).$$

Проверим выполнение третьей аксиомы метрического пространства.

Пусть $\max\limits_{t\in[a,b]}|x(t)-y(t)|=|x(t_0)-y(t_0)|$, где $t_0\in[a,b]$, что справедливо в силу теоремы Вейерштрасса для непрерывной функции на замкнутом ограниченном множестве. Тогда

$$\rho(x,y)=|x(t_0)-y(t_0)|=|x(t_0)-z(t_0)+z(t_0)-y(t_0)|\le|x(t_0)-z(t_0)|+$$
$$+|z(t_0)-y(t_0)|\le\max_{t\in[a,b]}|x(t)-z(t)|+\max_{t\in[a,b]}|z(t)-y(t)|=\rho(x,z)+\rho(z,y).$$

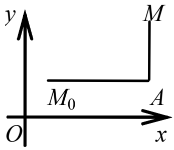
Задание 1.1

1. Пусть $M_0(x_0,y_0)$ и $M(x,y)$ – точки плоскости. Какой геометрический смысл имеет расстояние

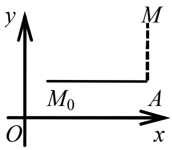
$$\rho(M_0,M)=\rho_0(M_0,M)=|x-x_0|+|y-y_0|\,?$$

Альтернативы для выбора ответа 1 – 4, где:

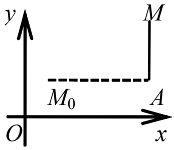
1) $\rho(M_0,M)=M_0A+AM$



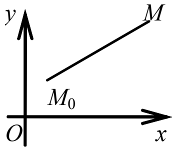
2) $\rho(M_0,M)=M_0A$



3) $\rho(M_0,M)=AM$



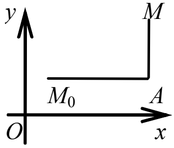
4) $\rho(M_0,M)=M_0M$



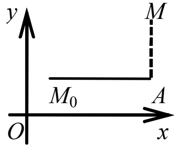
2. Пусть $M_0(x_0,y_0)$ и $M(x,y)$ – точки плоскости. Какой геометрический смысл имеет расстояние $\rho(M_0,M)=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$?

Альтернативы для выбора ответа 1 – 4, где:

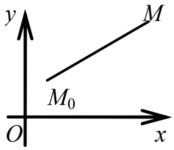
1) $\rho(M_0, M) = M_0A + AM$



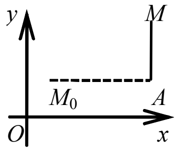
2) $\rho(M_0, M) = M_0A$



3) $\rho(M_0, M) = M_0M$



4) $\rho(M_0, M) = AM$

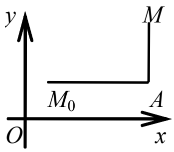


3. Пусть $M_0(x_0, y_0)$ и $M(x, y)$ – точки плоскости.
Какой геометрический смысл имеет расстояние

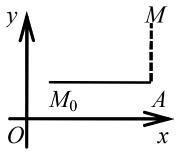
$$\rho(M_0, M) = \rho_0(M_0, M) = \max\{|x - x_0|, |y - y_0|\}?$$

Альтернативы для выбора ответа 1 – 4, где:

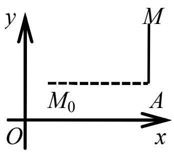
1) $\rho(M_0, M) = M_0A + AM$



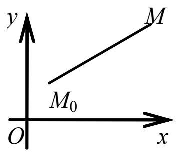
2) $\rho(M_0, M) = M_0A$



3) $\rho(M_0, M) = AM$



4) $\rho(M_0, M) = M_0M$



4. Найдите $\rho(M_0, M)$, если

$$\rho(M_0, M) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \text{ и } M_0(1, -1, 3),\ M(6,\ 11,\ 3).$$

5. Найдите $\rho(M_0, M)$, если

$$\rho(M_0, M) = \rho_0(M_0, M) = \max\{|x - x_0|,\ |y - y_0|, |z - z_0|\}$$

и $M_0(1, -1, 3)$, $M(6,\ 11,\ 3)$.

6. Найдите $\rho(M_0, M)$, если

$$\rho(M_0, M) = \rho_1(M_0, M) = |x - x_0| + |y - y_0| + |z - z_0|,$$

где $M_0(1,-1,3)$, $M(6,\ 11,\ 3)$.

7. Пусть X – любое множество. Можно ли его метризовать, введя метрику по формуле

$$\rho(x,y)=\begin{cases}0, \text{ если } x=y,\\ 1, \text{ если } x\neq y?\end{cases}$$

Альтернативы для выбора ответа:

1) да; 2) нет; 3) не всегда.

1.2. Окрестность точки в метрическом пространстве

Определение 1.2.1. ε-*окрестностью точки* M_0 *в метрическом пространстве X называется множество всех точек* $M \in X$, *расстояние которых до точки* M_0 *меньше некоторого положительного* ε.

Принято следующее обозначение ε-окрестности точки M_0:

$$U(M_0,\varepsilon)=\{M:\ \rho(M_0,M)<\varepsilon\}.$$

Пример 1.2.1. Построить ε-окрестность функции $x_0(t)=\cos t$ на отрезке $[0,\ \pi]$ в пространстве $C_{[0,\pi]}$, если ε = 1.

В соответствии с определением ε-окрестности точки и с учётом расстояния в пространстве $C_{[a,b]}$ имеем:

$$U(x_0(t),\ \varepsilon)=\left\{x(t):\max_{t\in[0,\pi]}|x_0(t)-x(t)|<\varepsilon\right\},$$

или

$$U(\cos t,\ 1)=\left\{x(t):\max_{t\in[0,\pi]}|\cos t-x(t)|<1\right\}.$$

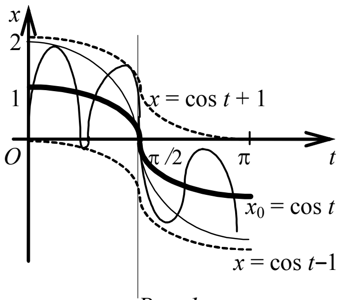


Рис. 1

Ясно, что указанная окрестность точки $x_0(t)=\cos t$ на отрезке $[0,\ \pi]$ представляет множество всех непрерывных на этом отрезке функций $x(t)$, не выходящих из полосы $(\cos t-1,\ \cos t+1)$, (рис. 1).

Задание 1.2

1. Какими из следующих неравенств можно описать множество точек, принадлежащих ε-окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$, если $\varepsilon = 2$, $x_0 = 4$, $y_0 = 3$ в пространствах:

1.1. $\boldsymbol{R}^2$. **1.2.** $\boldsymbol{R}_0^2$. **1.3.** $\boldsymbol{R}_1^2$.

Альтернативы для выбора ответов 1 – 4, где:

1) $|x-4+y-3|<2$;

2) 2) $\sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2}<2$;

3) $\max\{|x-4|,|y-3|\}<2$;

4) $|x-4|+|y-3|<2$.

2. Задайте неравенством ε-окрестность точки M_0 (0, 0, 0, 0) для $\varepsilon = 1$ в каждом из пространств:

2.1. $\boldsymbol{R}^4$. **2.2.** $\boldsymbol{R}_0^4$. **2.3.** $\boldsymbol{R}_1^4$.

Альтернативы для выбора ответов 1 – 4, где:

1) $|x+y+z+t|<1$;

2) 2) $\max\{|x|,\ |y|,\ |z|,\ |t|\}<1$;

3) $|x|+|y|+|z|+|t|<1$;

4) $\sqrt{x^2+y^2+z^2+t^2}<1$.

3. Задайте в виде неравенства ε-окрестность точки M_0 (4, 3, −1), если $\varepsilon = 4$ в каждом из пространств:

3.1. $\boldsymbol{R}^3$. **3.2.** $\boldsymbol{R}_0^3$. **3.3.** $\boldsymbol{R}_1^3$.

Альтернативы для выбора ответов 1 – 4, где:

1) $|x-4|+|y-3|+|z+1|<4$;

2) 2) $\sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2+(z+1)^2}<4$;

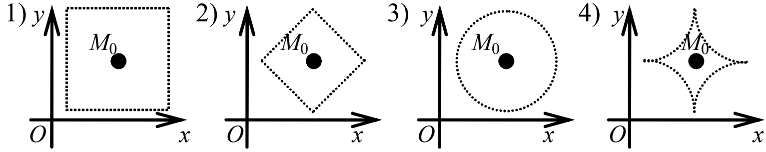
3) $|x-4+y-3+z+1|<4$;

4) $\max\{|x-4|,|y-3|,|z+1|\}<4$.

4. Постройте окрестность точки $M_0(x_0, y_0)$ в каждом из следующих пространств:

4.1. $\boldsymbol{R}^2$. **4.2.** $\boldsymbol{R}_0^2$. **4.3.** $\boldsymbol{R}_1^2$.

Альтернативы для выбора ответов 1 – 4, где:



5. Пусть Q – множество рациональных чисел и $x_0 \in Q$. Существует ли окрестность точки x_0 в $\boldsymbol{R}$, целиком принадлежащая Q?

Альтернативы для выбора ответов 1 – 4, где:

1) существует;

2) не существует;

3) существует не для любой точки.

1.3. Точки внутренние, граничные, предельные

Пусть множество $\{M\} \subset X$.

Определение 1.3.1. *Точка M_0 называется предельной точкой множества $\{M\}$, если в любой её окрестности содержится хотя бы одна точка из $\{M\}$, отличная от M_0.*

Пример 1.3.1. Пусть $\{M\} = \{x_n\} = \left\{\dfrac{(-1)^n}{n}\right\} \subset \boldsymbol{R}$.

Точка $x_0 = 0$ является предельной точкой множества $\{x_n\}$, т. к. в любой ε-окрестности точки $x_0 = 0$: $U(0, \varepsilon) = \{x_n : |x_n - 0| < \varepsilon\}$ содержится бесчисленное множество точек из $\{x_n\}$. В самом деле, для $\forall \varepsilon > 0$ имеем $\left|\dfrac{(-1)^n}{n} - 0\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \dfrac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \dfrac{1}{\varepsilon}$ и все элементы x_n с номером $n \geq \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, где $\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$ есть целая часть числа $\dfrac{1}{\varepsilon}$, содержатся в ε-окрестности точки $x_0 = 0$.

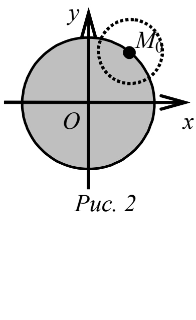


Рис. 2

Определение 1.3.2. *Точка M_0 называется граничной точкой множества $\{M\}$, если в любой её окрестности содержатся как точки, принадлежащие $\{M\}$, так и точки, не принадлежащие $\{M\}$,* (рис.2).

Определение 1.3.3. *Множество всех граничных точек множества $\{M\}$ называется его границей.*

Пример 1.3.2. Пусть $\{M\} = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 4\}$. Всякая точка $M(x, y)$, координаты которой удовлетворяют соотношению $x^2 + y^2 = 4$, является граничной для множества $\{M\}$, так как в любой её окрестности содержатся как точки, принадлежащие $\{M\}$ ($x^2 + y^2 \le 4$), так и точки, не принадлежащие $\{M\}$ ($x^2 + y^2 > 4$).

Очевидно, что множество граничных точек Г определяется равенством

$$\Gamma = \{(x, y):\ x^2 + y^2 = 4\}.$$

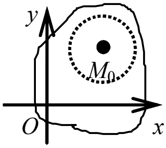


Рис. 3

Определение 1.3.4. *Точка M_0 называется внутренней точкой множества $\{M\}$, если она принадлежит ему вместе с некоторой окрестностью* (рис. 3).

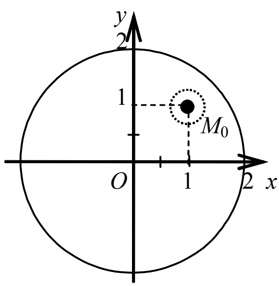


Рис. 4

Пример 1.3.3. Точка $M_0(1, 1)$ является внутренней точкой множества

$$\{M\} = \{(x, y):\ x^2 + y^2 \le 4\},$$

т. к. существует, например, окрестность $U\left(M_0, \frac{1}{2}\right)$, целиком принадлежащая $\{M\}$, (рис. 4).

Задание 1.3

1. Можно ли определение граничной точки сформулировать следующим образом: “Точка M_0 называется граничной точкой множества *D,* если существует окрестность точки M_0, которая содержит как точки, принадлежащие *D*, так и точки, не принадлежащие *D*”? (Да, нет).

2. Является ли точка $x_0 = \sqrt{2}$ граничной точкой множества рациональных чисел *Q*? (Да, нет).

3. Найдите границу множества $\boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R}$.

Альтернативы для выбора ответа 1 – 4, где:

1) граница множества Q состоит из всех рациональных чисел;

2) граница множества Q состоит из всех иррациональных чисел;

3) множество Q не имеет границы.

4) граница множества Q совпадает со множеством всех вещественных чисел.

4. Является ли любая точка плоскости, обе координаты которой рациональны, предельной для множества точек плоскости с рациональными координатами? (Да, нет).

5. Является ли любая точка плоскости, обе координаты которой иррациональны, предельной для множества точек плоскости с рациональными координатами? (Да, нет).

6. Укажите границу множества

$$D = \{(x, y) : y \geq x^2 + 1, x^2 + y^2 < 25\}.$$

Альтернативы для выбора ответа 1 – 3, где:

1) $y = x^2 + 1$;

2) $y = x^2 + 1$ и $x^2 + y^2 = 25$;

3) множество не имеет границы.

7. Является ли граничной любая точка $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$ для $\boldsymbol{R}^2$? (Да, нет).

8. Является ли внутренней любая точка $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$ для $\boldsymbol{R}^2$? (Да, нет).

9. Какая зависимость существует между множествами Г-граничных и P-предельных точек множества?

Альтернативы для выбора ответа 1 – 4, где:

1) $\Gamma = P$;

2) $\Gamma \subset P$;

3) $P \subset \Gamma$;

4) правильный ответ не указан.

10. Какая зависимость существует между множеством внутренних B и предельных P точек множества?

Альтернативы для выбора ответа 1 – 5, где:

1) $B \subset P$;

2) $P \subset B$;

3) $B \cap P = \varnothing$;

4) $B = P$;

5) правильный ответ не указан.

1.4. Открытые и замкнутые множества в метрическом пространстве

Пусть X – метрическое пространство и $\{M\}$ – его подмножество.

Определение 1.4.1. *Множество $\{M\}$ называется открытым, если все его точки – внутренние.*

Определение 1.4.2. *Множество $\{M\}$ называется замкнутым, если оно содержит все свои граничные точки.*

Пример 1.4.1. Показать, что множество

$$\{M\} = \{(x, y):\ x^2 + y^2 < 25\}$$

является открытым.

По определению открытого множества следует показать, что для $\forall M_0 \in \{M\}$ существует некоторая её окрестность, целиком принадлежащая $\{M\}$. Пусть $M_0 \in \{M\}$ и пусть $\rho(0, M_0) = a < 5$, (рис.5). В качестве ε возьмём величину $\frac{5-a}{2}$. Тогда любая точка M из ε-окрестности точки M_0 удовлетворяет неравенству $\rho(M, M_0) < \varepsilon$. Каждая точка M этой окрестности принадлежит множеству $\{M\}$, т. к.

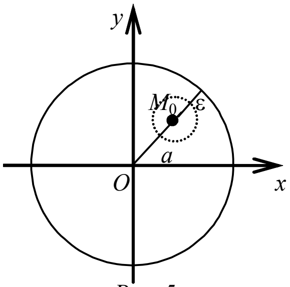


Рис. 5

$$\rho(M,0) \le \rho(M, M_0) + \rho(M_0, 0) = \frac{5-a}{2} + a < 5.$$

Следовательно, любая точка $M_0 \in M$ принадлежит этому множеству вместе с некоторой окрестностью, что наглядно демонстрируется геометрически.

Пример 1.4.2. Показать, что множество

$$\{M\} = \{(x, y): x^2 + y^2 \le 25\}$$

замкнуто.

Во-первых, следует показать, что границей множества $\{M\}$ является множество $\Gamma = \{(x, y): x^2 + y^2 = 25\}$. Во-вторых, что $\Gamma \subset \{M\}$. В первом случае надо показать, что в любой окрестности точки $M_0 \in \Gamma$ есть как точки, принадлежащие $\{M\}$, так и не принадлежащие $\{M\}$.

Примером точки, принадлежащей ε-окрестности точки M_0 является сама точка $M_0(x_0, y_0)$, (см. рис. 6). Для выбора точки $M(x, y)$ из ε-окрестности точки M_0 составим параметрические уравнения прямой OM_0:

$$\begin{cases} x = x_0 + x_0 t, \\ y = y_0 + y_0 t. \end{cases}$$

Точка $M_0 \in OM_0$ и отвечает значению параметра $t = 0$. Значениям параметра $0 < t < \varepsilon$ будут отвечать точки прямой, расположенные вне окружности Г. Положим для определённости $t = \frac{\varepsilon}{2R}$, тогда получим точку $M\left(x_0 + x_0 \frac{\varepsilon}{2R}, y_0 + y_0 \frac{\varepsilon}{2R}\right)$. Точка M принадлежит ε-окрестности точки M_0, т. к.

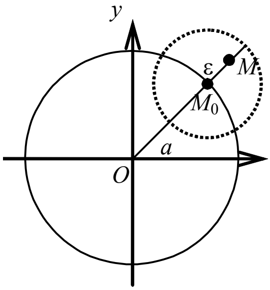


Рис. 6

$$\rho(M_0, M) = \sqrt{\left(x_0 \frac{\varepsilon}{2R}\right)^2 + \left(y_0 \frac{\varepsilon}{2R}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(x_0^2 + y_0^2\right)\frac{\varepsilon^2}{4R^2}} = \sqrt{\frac{\cancel{R}^2 \cdot \varepsilon^2}{4 \cdot \cancel{R}^2}} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon .$$

Но точка M не принадлежит кругу $\{M\}$, т. к.

$$\rho(M, O) = \sqrt{\left(x_0 + x_0 \frac{\varepsilon}{2R}\right)^2 + \left(y_0 + y_0 \frac{\varepsilon}{2R}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + \left(x_0^2 + y_0^2\right)\frac{\varepsilon}{R} + \left(x_0^2 + y_0^2\right)\frac{\varepsilon^2}{4R^2}} =$$

$$\sqrt{R^2 + \varepsilon R + \frac{\varepsilon^2}{4}} = \sqrt{\left(R + \frac{\varepsilon}{4}\right)^2} = R + \frac{\varepsilon}{4} > R .$$

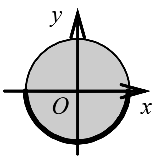


Рис. 7

Пример 1.4.3. Множество

$$D = \left\{(x, y) : -\sqrt{25 - x^2} \le y < \sqrt{25 - x^2}\right\}$$

(рис. 7) не является ни открытым, ни замкнутым. Доказательство, как и в примерах 1.4.2. и 1.4.1.

Задание 1.4

Является ли множество D открытым в $\boldsymbol{R}^2$, замкнутым в $\boldsymbol{R}^2$?
Альтернативы для выбора ответа 1 – 4, где:
1) D – открытое множество;
2) D – замкнутое множество;
3) множество D не является ни открытым, ни замкнутым;
4) множество D и открытое, и замкнутое.

1. $D = \left\{(x, y): \quad 4 \le (x - 3)^2 + (y - 4)^2 \le 25\right\}$.

2. $D = A \bigcap B$,

где $A = \{(x, y) : x + y > 5\}$, $B = \{(x, y) : \quad x^2 + y^2 < 100\}$.

3. $D = \{(x, y) : \quad x^2 + y^2 < 4,\ x + y > 1\}$**.**

4. $D = A \bigcap B \bigcap C$ **,**

где $A = \{(x, y) : \quad x > 0\}$, $B = \{(x, y) : \quad y > 0\}$, $C = \{(x, y) : \quad x^2 + y^2 > 25\}$.

5. $D = A \bigcap B$ **,**

где $A = \{(x, y) : \ x + y \geq 0\}$, $B = \{(x, y) : \quad x^2 + y^2 \leq 4\}$.

6. $D = A \bigcap B$ **,**

где $A = \{(x, y) : \quad y \geq x^2 + 1\}$, $B = \{(x, y) : \quad x^2 + y^2 < 49\}$.

7. $D = A \bigcap B$ **,**

где $A = \{(x, y) : \quad y \geq x^2 - 4\}$, $B = \{(x, y) : \ y < -x^2 + 4\}$.

8. D – множество точек плоскости $\boldsymbol{R}^2$ с рациональными координатами.

1.5. Понятие области

Определение 1.5.1. *Множество* $\{M\} \subset X$ *называется связным, если любые две точки этого множества можно соединить непрерывной кривой, целиком принадлежащей множеству* $\{M\}$, (рис. 8).

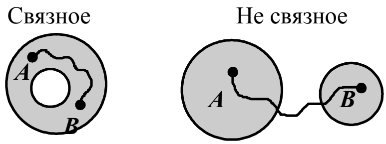


Рис. 8

Определение 1.5.2. *Открытое связное множество называется областью.*

Определение 1.5.3. *Замкнутой областью называется объединение области и её границы.*

Пример 1.5.1. Множество $D = \{(x, y) : \quad |x| + |y| < 1\}$ есть область, (см. рис. 9), что наглядно иллюстрируется геометрически.

Пример 1.5.2. Множество $A = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\}$ есть замкнутая область, т. к. $e = D \bigcup \partial$, где $\Gamma = \{(x, y) : \quad |x| + |y| = 1\}$ – граница множества A.

Пример 1.5.3. Множество $C = B \setminus A$, где

$B = \{(x, y):\ \max\{|x|,\ |y|\} < 1\}$, $A = \{(x, y):\ |x| + |y| > 1\}$, (рис. 10), не является областью, т. к. это множество не является связным.

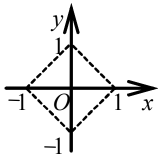


Рис. 9

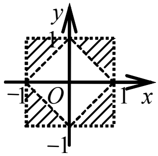


Рис. 10

Задание 1.5

В следующих тестах установите, является ли множество $D \subset \boldsymbol{R}^2$ областью. (Да, нет).

1. $D = \{(x, y): 4 < x^2 + y^2 < 25\}$.

2. $D = A \cap B$,

где $A = \{(x, y): 4 < x^2 + y^2 < 10\}$, $B = \{(x, y):\ x \in \boldsymbol{R}^2,\ y \in (-1,1)\}$.

3. $D = A \cup B$,

где $A = \{(x, y): x^2 + y^2 < 9\}$, $B = \{(x, y): x \in \boldsymbol{R}^2,\ (x-3)^2 + y^2 < 4\}$.

4. $D = A \cap B$, где $A = \{(x, y): 1 < x^2 + y^2 < 5\}$, $B = \{(x, y): |x| < 1\}$.

5. $D = A \cup B$,

где $A = \{(x, y): x^2 + y^2 < 1\}$, $B = \{(x, y): x = 2,\ y = 3\}$.

6. $D = \{(x, y): 0 < x^2 + y^2 < 4\}$.

7. $D = \{(x, y): x^2 + y^2 = 4\}$.

8. D – множество точек плоскости $\boldsymbol{R}^2$ с рациональными координатами.

1.6. Последовательность точек в $\boldsymbol{R}^n$

Определение 1.6.1. *Если каждому числу* $k \in \boldsymbol{N}$ *поставлена в соответствие точка* $M_k\left(x_1^k, x_2^k, x_3^k, \ldots, x_n^k\right) \in \boldsymbol{R}^n$ *то говорят, что на* $\boldsymbol{R}^n$ *задана последовательность точек* $\{M_k\}$*. Например,*

$M_1(1,1,\ldots,1)$, $M_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2^n}\right)$, $M_3\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \ldots, \frac{1}{3^n}\right)$, $M_k\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k^2}, \ldots, \frac{1}{k^n}\right)$, ….

Определение 1.6.2. *Точка* $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *называется пределом последовательности точек* $\{M_k\}$, *если* $\lim\limits_{k\to\infty} \rho(M_k, A) = 0$.

С помощью символов логики определение можно записать так:

$$\lim_{k\to\infty} \rho(M_k, A) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall k > N \quad \rho(M_k, A) < \varepsilon .$$

Геометрически это означает, что, начиная с некоторого номера, все члены последовательности попадают в ε-окрестность точки A.

Теорема 1.6. (О характере сходимости последовательности точек в $\boldsymbol{R}^n$). *Последовательность точек*

$$\left\{M_k\left(x_1^k, x_2^k, x_3^k, \ldots, x_n^k\right)\right\} \to A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

тогда и только тогда, когда $\left\{x_1^k\right\} \to a_1$, $\left\{x_2^k\right\} \to a_2$, …, $\left\{x_n^k\right\} \to a_n$. *Такая сходимость называется покоординатной.*

Пример 1.6. Найти $\lim\limits_{k\to\infty} M_k$ если

$$\left\{M_k\left(\frac{2k^2}{k^2-1}, \sqrt{k+1} - \sqrt{k}, 3^{-2k}\right)\right\}.$$

Найдём следующие три предела:

а) $\lim\limits_{k\to\infty} x_1^k = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{2k^2}{k^2-1} = 2$;

б) $\lim\limits_{k\to\infty} x_2^k = \lim\limits_{k\to\infty} \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) = \infty - \infty =$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right)\left(\sqrt{k+1} + \sqrt{k}\right)}{\left(\sqrt{k+1} + \sqrt{k}\right)} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{k+1} + \sqrt{k}\right)} = 0;$$

в) $\lim\limits_{k\to\infty} x_3^k = \lim\limits_{k\to\infty} 3^{-2k} = 0$.

Тогда $\left\{M_k\left(\dfrac{2k^2}{k^2-1},\ \sqrt{k+1} - \sqrt{k},\ 3^{2k}\right)\right\} \to A(2, 0, 0)$.

Задание 1.6

1. Запишите три первые точки последовательности $\left\{M_k\left(\dfrac{2k+1}{k};\ \sqrt[k]{3};\ \dfrac{1}{k}\right)\right\}$.

Альтернативы для выбора ответа 1 – 3, где:

1) $3,\ \sqrt{3}\,,\ \dfrac{1}{3}$;

2) $M_1\left(3, \sqrt{3}, 1\right),\ M_2\left(\dfrac{5}{2}, \sqrt{3}, \dfrac{1}{2}\right),\ M_3\left(\dfrac{7}{3}, \sqrt[3]{3}, \dfrac{1}{3}\right)$;

3) $M_1\left(3, 3, 1\right),\ M_2\left(\dfrac{5}{2}, \sqrt{3}, \dfrac{1}{2}\right),\ M_3\left(\dfrac{7}{3}, \sqrt[3]{3}, \dfrac{1}{3}\right)$.

2. Запишите какую-либо последовательность точек $\{M_k\}$, если

$$M_1\left(1,\ \frac{1}{2}, 1\right),\ M_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \sqrt{2}\right),\ M_3\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{8}, \sqrt[3]{4}\right).$$

Альтернативы для выбора ответа 1 – 3, где

1) $\left\{M_k\left(\dfrac{1}{k}, 2^{-k}, \sqrt[k]{k}\right)\right\}$;

2) $\left\{M_k\left(\dfrac{1}{k}, \dfrac{1}{2^k}, \sqrt[k]{k+1}\right)\right\}$;

3) $\left\{M_k\left(\dfrac{1}{k}, \dfrac{1}{2^k}, \sqrt[k]{2^{k-1}}\right)\right\}$.

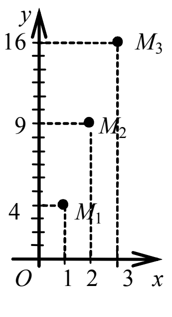
В следующих тестах 3 – 7 найдите пределы последовательностей $\{M_k\}$. Ответ запишите в форме (a, b).

3. $\left\{M_k\left(\dfrac{1}{k}, \dfrac{3}{k}\right)\right\}$. **4.** $\left\{M_k\left(\dfrac{k+1}{k}, \dfrac{1-k}{k}\right)\right\}$. **5.** $\left\{M_k\left(\dfrac{1}{k}, \dfrac{2}{k^2}\right)\right\}$.

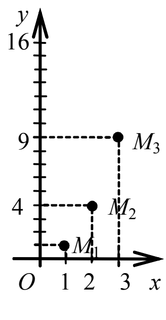
6. $\left\{M_k\left(2^{-k}, \left(1+\dfrac{1}{k}\right)^k\right)\right\}$. **7.** $\left\{M_k\left(\dfrac{\sin k}{k}, e^{-k}\right)\right\}$.

8. Какую геометрическую интерпретацию следует выбрать для первых членов последовательности $\left\{M_k(k, k^2)\right\}$?

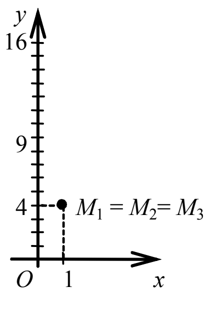
1)



2)



3)



9. Является ли бесконечно малой последовательность

$$\left\{M_k\left(\sqrt{k^2+1}-k;\ \frac{\sin k}{k};\ \operatorname{tg}\frac{1}{k}\right)\right\}?\ \text{(Да, нет).}$$

10. Является ли бесконечно малой последовательность

$$\left\{M_k\left(\frac{k}{k^2+1};\ \sin\frac{\pi}{k};\ \frac{1+2+3+\cdots+k}{k^2}\right)\right\}?\ \text{(Да, нет).}$$

11. Найдите $\lim\limits_{k\to\infty}\{M_k\}$, если $\left\{M_k\left(\dfrac{2k^3+3}{k^3+1};\ \sqrt[k]{2};\ \left(e^{\frac{1}{k}}-1\right)k\right)\right\}$. Ответ запишите в форме (a, b, c).

12. Что можно сказать о существовании предела последовательности $\left\{M_k\left(k\operatorname{tg}\dfrac{1}{k};\ k\sin\dfrac{k\pi}{2}\right)\right\}$ на основании теоремы о покоординатной сходимости?

Альтернативы для выбора ответа 1 – 3, где

1) сходится, 2) расходится; 3) ничего сказать нельзя.

13. Что можно сказать о сходимости последовательности

$$\left\{M_k\left(\frac{5k^2+2k+4}{3k^2-2k};\ \frac{3k^2}{\sqrt{4k^4+1}};\ \sin\frac{k\pi}{2}\right)\right\}$$

на основании теоремы о покоординатной сходимости? Альтернативы для выбора ответа 1 – 3, где

1) сходится; 2) расходится; 3) ничего сказать нельзя.

1.7. Определение ограниченного множества

Определение 1. *Множество* $\{M\}$ *называется ограниченным, если все его точки содержатся в некотором шаре.*

Пример 1.7.1. Множество $A=\{(x,y):|x|<1,|\ y|<2\}$ ограничено, т. к. можно указать шар, например, $B=\{(x,y):x^2+y^2<3\}$ такой, что $A\subset B$ (рис. 11).

Пример 1.7.1. Множество $A=\{(x,y):|x|<1,|\ y|>2\}$ не является ограниченным, что наглядно иллюстрируется геометрически (рис. 12).

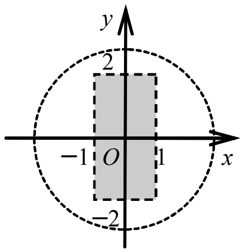


Рис. 11

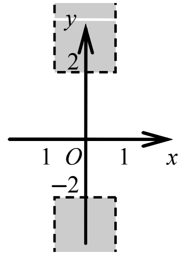


Рис. 12

Задание 1.7

В задачах 1 – 10 постройте множество точек D и установите, является ли оно ограниченным.

Альтернативы для выбора ответа 1 – 2, где:

1) ограниченное; 2) неограниченное.

1. $D = \{(x, y) : |y| > |x|\}$. **2.** $D = \{(x, y) : |x| < 1\}$.

3. $D = A \cap B$, где $A = \{(x, y) : |x| < 1\}$, $B = \{(x, y) : |y| < 2\}$.

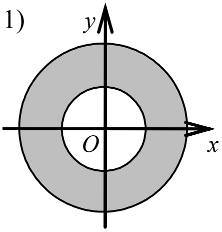
4. $D = \{(x, y) : |x| + |y| < 1\}$. **5.** $D = \{(x, y) : |x| + |y| + |z| < 1\}$.

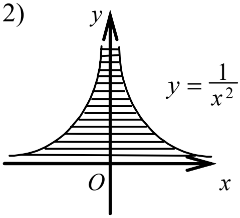
6. $D_1 = \{(x, y) : \ y < x^2\}$. **7.** $D_2 = \{(x, y) : \ y \le x^2\}$.

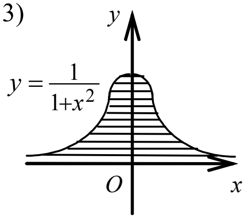
8. $D_3 = \{(x, y) : \ x > y^2\}$. **9.** $D_4 = \{(x, y) : \ -3 \le x \le 3\}$.

10. $D_5 = \{(x, y) : \ 0 \le y \le 4\}$.

11. Какое из данных множеств Вы назвали бы ограниченным?

1) 

2) 

3) 

Альтернативы для выбора ответа 1 – 2, где:

1) все три; 2) только первое и третье; 3) только первое.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ, ПРЕДЕЛ, НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

2.1. Определение функции нескольких переменных

Пусть множество $D \subset \boldsymbol{R}^n$.

Определение 2.1.1. *Если каждой точке $M(x_1, x_2, ..., x_n) \in D$ поставлено в соответствие число $u \in \boldsymbol{R}$, то говорят, что на множестве D задана функция n переменных.*

Обозначают функцию одним из следующих способов:

$$u = f(M), \qquad u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Принята следующая терминология:

а) D – множество точек определения функции $f(M)$;

б) числовые переменные $x_1, x_2, ..., x_n$ – независимые переменные или аргументы функции;

в) число u_0, соответствующее данной точке $M_0(u_0 = f(M_0)$, называется частным значением функции в точке M_0;

г) множество U частных значений функции $f(M)$ называется множеством значений функции.

Пример 2.1.1. Найти множество точек определения функции

$$u = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}.$$

Для отыскания множества точек определения данной функции следует иметь в виду два соображения:

а) подкоренное выражение для корня чётной степени неотрицательно;

б) знаменатель дроби не равен нулю.

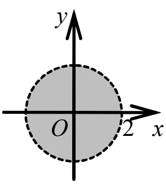


Рис. 13

Тогда

$$4 - x^2 - y^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 < 4$$

или

$$D = \left\{(x, y): \ x^2 + y^2 < 4\right\} \text{ (рис. 13).}$$

Возможны и такие способы записи ответа:

$$1) \ D = \left\{\begin{matrix} -2 < x < 2, \\ -\sqrt{4 - x^2} < y < \sqrt{4 - x^2} \end{matrix}\right\},$$

$$2) \ D = \left\{\begin{matrix} -2 < y < 2, \\ -\sqrt{4 - y^2} < x < \sqrt{4 - y^2} \end{matrix}\right\},$$

которыми мы преимущественно и будем пользоваться.

Пример 2.1.2. Найти множество точек определения функции

$$y = \ln\left(x - y^2\right) - \frac{1}{\sqrt{y - x^2}}.$$

Для отыскания множества точек определения функции рассмотрим систему неравенств $\begin{cases} x - y^2 > 0, \\ y - x^2 > 0. \end{cases}$

И тогда

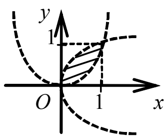


Рис. 14

$$D = \left\{ (x, y) : \begin{array}{c} 0 < x < 1, \\ x^2 < y < \sqrt{x} \end{array} \right\}, \text{ или}$$

$$D = \left\{ (x, y) : \begin{array}{c} 0 < y < 1, \\ y^2 < x < \sqrt{y} \end{array} \right\}.$$

Множество точек определения функции изображено на рис. 14.

Пример 2.1.3. Найти множество точек определения функции $y = \arcsin \dfrac{x^2 + y^2}{z^2}$.

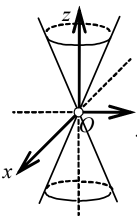


Рис. 15

В соответствии с определением арксинуса имеем:

$$\left| \frac{x^2 + y^2}{z^2} \right| \le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 \le z^2, \\ z \ne 0. \end{cases}$$

Геометрически найденное множество представляет собой коническую поверхность и часть пространства, находящуюся внутри этой поверхности. Функция не определена в вершине конуса $O(0, 0, 0)$ (рис. 15).

Пример 2.1.4. Найти множество значений функции $u = 2^{-(x^2+y^2)}$.

Так как $-(x^2 + y^2)$ принимает значения от $-\infty$ до нуля, то $u \in (0, 1]$.

Задание 2.1

В следующих задачах найдите множество точек определения функции $f(x, y)$. Ответ запишите одним из следующих способов:

$$D = \left\{ (x, y) : \begin{array}{c} a < x < b, \\ \varphi_1(x) \le y < \varphi_2(x) \end{array} \right\} \text{ или } D = \left\{ (x, y) : \begin{array}{c} c < y < d, \\ \varphi_1(y) < x < \varphi_1(y) \end{array} \right\}.$$

1. $f(x,y) = \sqrt{x - y^2} + \lg(3 - x)$.

Альтернативы для выбора ответа 1 – 3, где:

1) $D = \left\{(x,\, y):\; 0 \le x \le 3,\; -\sqrt{3} \le y \le \sqrt{3}\right\}$;

2) $D = \left\{(x,\, y):\; -\sqrt{3} \le y \le \sqrt{3}, y^2 \le x < 3\right\}$;

3) $D = \left\{(x,\, y):\; 0 \le x < 3,\; 0 \le y \le \sqrt{x}\right\}$.

2. $f(x,y) = \lg x + \lg y + \lg(2 - x - y)$.

Альтернативы для выбора ответа 1 – 3, где:

1) $D = \left\{(x,\, y):\; 0 < x < 2,\; 0 < y < 2 - x\right\}$ или

$D = \left\{(x,\, y):\; 0 < y < 2,\; 0 < x < 2 - y\right\}$;

2) $D = \left\{(x,\, y):\; 0 < x < 2,\; 0 < y < 2\right\}$;

3) $D = \left\{(x,\, y):\; 0 \le x \le 2,\; 0 \le y \le 2 - x\right\}$.

3. $z = \sqrt{x - y^2} + \sqrt{y - x^2}$.

Альтернативы для выбора ответа 1 – 3, где:

1) $D = \left\{(x,\, y):\; 0 \le x \le 2,\; 0 \le y \le 1\right\}$;

2) $D = \left\{(x,\, y):\; 0 \le x \le 1,\; x^2 \le y \le \sqrt{x}\right\}$ или

$D = \left\{(x,\, y):\; 0 \le y \le 1,\; y^2 \le x \le \sqrt{y}\right\}$;

3) $D = \left\{(x,\, y):\; 0 \le x \le 1,\; \sqrt{x} \le y \le x^2\right\}$ или

$D = \left\{(x,\, y):\; 0 \le y \le 1,\; \sqrt{y} \le x \le y^2\right\}$.

4. $z = \sqrt[4]{x - y} + \sqrt{y - \frac{1}{x}} + \sqrt[6]{x} + \sqrt{2 - x}$.

Альтернативы для выбора ответа 1 – 4, где:

1) $D = \left\{(x,\, y):\; 0 < x \le 2,\; x \le y \le \frac{1}{x}\right\}$;

2) $D = \left\{(x,\, y):\; 1 \le x \le 2,\; \frac{1}{2} \le y \le 2\right\}$;

3) $D = \left\{(x,\, y):\; \frac{1}{2} \le y \le 2,\; \frac{1}{y} \le x \le y\right\}$;

4) $D = \left\{(x,\, y):\; 1 \le x \le 2,\; \frac{1}{x} \le y \le x\right\}$.

5. Как Вы считаете, совпадают ли множества точек определения функций $z = \ln xy$ и $z = \ln x + \ln y$? Ответ обосновать.

Альтернативы для выбора ответа 1 – 2, где:

1) совпадают; 2) не совпадают.

6. Совпадают ли множества точек определения функций $z = \dfrac{1}{\sin^2 x + \sin^2 y}$ и $z = \dfrac{1}{\sin^2 x \cdot \sin^2 y}$?

Альтернативы для выбора ответа 1 – 2, где:

1) совпадают; 2) не совпадают.

7. Найдите множество значений функции $z = \arcsin \dfrac{x}{y}$.

Альтернативы для выбора ответа 1 – 4, где:

1) $z \in (-\infty, +\infty)$; 2) $z \in (-1, 1)$; 3) $z \in [-1, 1)$; 4) $z \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

2.2. График функции

Определение 2.2.1. *Графиком функции* $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *называется множество точек* $(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)$ *пространства* $\boldsymbol{R}^{n+1}$*, где точка* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *принадлежит области определения функции, а число u есть соответствующее значение функции.*

Для построения графика функции двух переменных рекомендуется найти множество точек определения функции и далее применить метод параллельных сечений.

Пример 2.2. Построить график функции $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$.

Сначала найдём множество точек определения функции $D = \{(x, y):\ x^2 + y^2 \neq 0\}$.

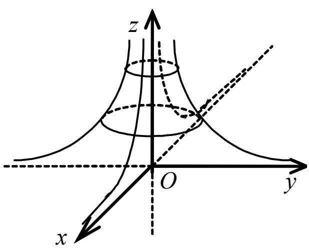


Рис. 16

Множество значений функции представляет интервал (0, +∞). Теперь найдём линии пересечения поверхности с координатными плоскостями:

а) $\begin{cases} x = 0, \\ z = \dfrac{1}{y^2}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y = 0, \\ z = \dfrac{1}{x^2}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} z = c, \\ x^2 + y^2 = \dfrac{1}{c}. \end{cases}$

Выполним чертёж (рис.16).

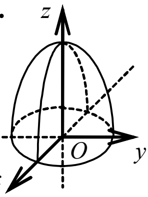
Задание 2.2

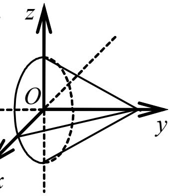
В каждой из задач 1 – 9 изображена поверхность. Установите, какая из следующих функций является уравнением этой поверхности.

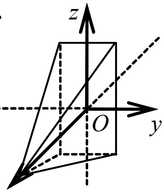
Альтернативы для выбора ответа 1 – 5, где:

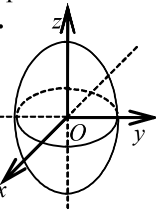
1) $z = f(x, y)$; 2) $x = \varphi(y, z)$; 3) $y = \psi(x, z)$;

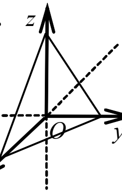
4) никакая из перечисленных; 5) любая из перечисленных.

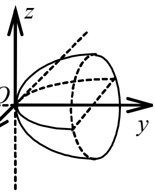
1.


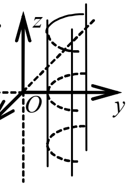
2.


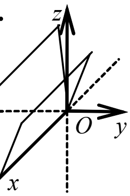
3.


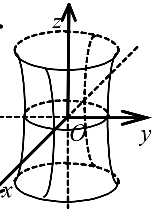
4.


5.


6.


7.


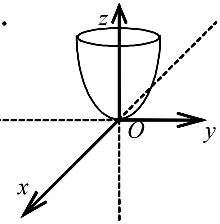
8.


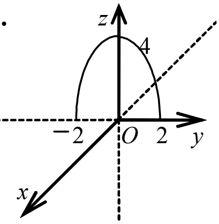
9.


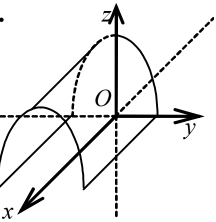
В следующих задачах построить графики заданных функций.

10. $z = 4 - y^2$.

Альтернативы для выбора ответа 1 – 3, где:

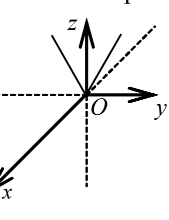
1.


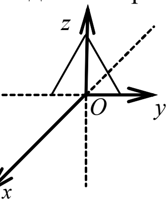
2.


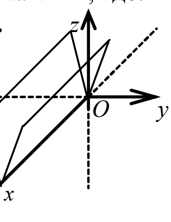
3.


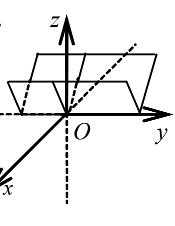
11. $z = |x|$.

Альтернативы для выбора ответа 1 – 4, где:

1.


2.


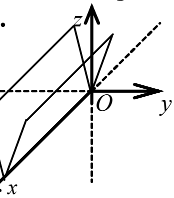
3.


4.


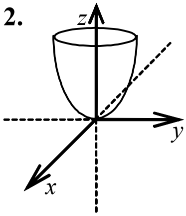
12. $z = |x| + |y|$.

Альтернативы для выбора ответа 1 – 4, где:

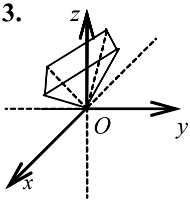
1.



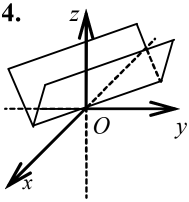
2.



3.



4.



13. Какую поверхность определяет функция $z = 1 - x - y$?

Альтернативы для выбора ответа 1 – 4, где:

1) сфера; 2) параболоид вращения;

3) цилиндр; 4) плоскость.

2.3. Определение предела функции

Пусть функция $u = f(M)$ определена на множестве D и A – предельная точка этого множества.

Определение 2.3.1 (предел функции в точке по Гейне). *Число b называется пределом функции $u = f(M)$ в точке A, если для любой последовательности $\{M_k\} \to A$ такой, что $\{M_k\} \subset D$ и $\{M_k\} \neq A$, соответствующая последовательность значений функции $\{f(M_k)\} \to b$.*

Обозначение: $\lim\limits_{M \to A} f(M) = b$.

Краткая символическая запись этого определения:

$$\lim_{M \to A} f(M) = b \Leftrightarrow \forall \{M_k\} \subset D,\ M_k \neq A,\ \{M_k\} \to A :\ \{f(M_k)\} \to b.$$

Определение 2.3.2 (предел функции в точке по Коши). *Число b называется пределом функции $u = f(M)$ в точке A, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall M \in D$, удовлетворяющей неравенству $0 < \rho(M, A) < \delta$, выполняется неравенство $|f(M) - b| < \varepsilon$.*

Краткая символическая запись этого определения такова:

$$\lim_{M \to A} f(M) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall M \in D,$$

$$0 < \rho(M, A) < \delta \Rightarrow |f(M) - b| < \varepsilon.$$

Справедливы основные теоремы о пределах.

Теорема 2.3.1. *Пусть $u = f(M)$ и $u = g(M)$ определены на множестве D и пусть $\lim\limits_{M \to A} f(M) = a$, $\lim\limits_{M \to A} g(M) = b$. Тогда*

1) $\lim\limits_{M \to A} \left(f(M) + g(M) \right) = \text{Ђ} + b$; 2) $\lim\limits_{M \to A} f(M) \cdot g(M) = \text{Ђ}b$;

3) $\lim\limits_{M \to A} \dfrac{f(M)}{g(M)} = \dfrac{a}{b}$, $b \neq 0$.

Рассмотрим другой вид пределов, определённых для функций нескольких переменных, так называемые повторные пределы.

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена на множестве $D = \{(x, y) : |x - a| < d_1, |y - b| < d_2\}$, за исключением, может быть, отрезков $x = a$ и $y = b$, (рис.17). Зафиксируем значение $y = y_0$ из промежутка $|y - b| < d_2$, тогда функция $f(x, y)$ станет функцией одной переменной x: $z = f(x, y_0)$. Пусть существует $\lim\limits_{x \to a} f(x, y_0)$. Возьмём теперь другое фиксированное значение $y = y_1$, из того же промежутка, предположим, что существует $\lim\limits_{x \to a} f(x, y_1)$. Замечаем, что этот предел зависит от y: $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ y \text{ фикс..} \\ 0 < |y - b| < d_2}} f(x, y) = \varphi(y)$, его называют внутренним.

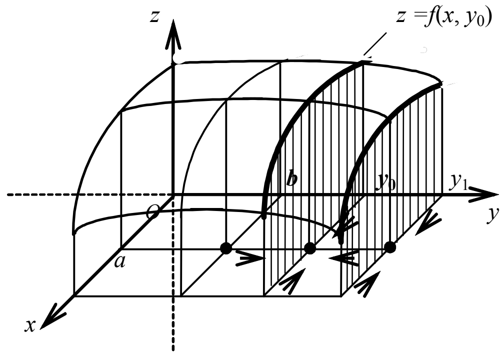


Рис. 17

Пусть теперь существует предел $\lim\limits_{y \to b} \varphi(y) = B$. Тогда говорят, что в точке (a, b) существует повторный предел функции $f(x, y)$

$\lim\limits_{y \to b} \left(\lim\limits_{x \to a} f(x, y) \right) = B$.

Аналогично определяется другой повторный предел

$$\lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b} f(x,y)\right) = A \text{, где } \lim_{\substack{y\to b \\ x \text{ фикс.} \\ 0<|x-a|<d_1}} f(x,y) = \psi(x),$$

который также называется внутренним.

Связь повторных пределов с пределом в обычном смысле устанавливает теорема 2.3.2.

Теорема 2.3.2. *Пусть выполняются два условия:*

1) *существует* $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ y\to b}} f(x,y) = C$;

2) *существуют внутренние пределы*

$$\lim_{\substack{x\to a \\ y \text{ фикс.} \\ 0<|y-b|<d_2}} f(x,y) \quad \text{и} \quad \lim_{\substack{y\to b \\ x \text{ фикс.} \\ 0<|x-a|<d_1}} f(x,y).$$

Тогда существуют повторные пределы

$$\lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b} f(x,y)\right) \quad \text{и} \quad \lim_{y\to b}\left(\lim_{x\to a} f(x,y)\right),$$

причём каждый из них равен С.

Пример 2.3.1. Доказать, что $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ не существует.

Пусть точка $M(x,y)\to O(0,0)$ по любой прямой $l: y = kx$.

Тогда $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y=kx}} \dfrac{x^2(1-k^2)}{x^2(1+k^2)} = \dfrac{1-k^2}{1+k^2}$.

В частности, при $k = 1$ ($y = x$), получим нуль, при $k = 0$ получим единицу, что указывает на зависимость предела от способа стремления точки $M(x,y)$ к предельной, а, значит, на отсутствие предела.

В то же время повторные пределы существуют

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) = \lim_{y\to 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1, \qquad \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) = \lim_{y\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1,$$

но не равны между собой.

Пример 2.3.2. Найти предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}$.

Для отыскания предела перейдём к полярным координатам: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Тогда

$$f(x,y)=\frac{x^2y}{x^2+y^2}=\frac{\rho^3\cos^2\varphi\sin\varphi}{\rho^2}=\rho\cos^2\varphi\sin\varphi$$

и

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=\lim_{\rho\to 0}\rho\cos^2\varphi\sin\varphi=0\ ,$$

т. к. $\left|\cos^2\varphi\sin\varphi\right|<1$, а ρ – бесконечно малая величина.

Задание 2.3

1. Как Вы думаете, справедливо ли утверждение: "Если существует одинаковый предел $f(x,y)$ по разным прямым, идущим к точке M_0, то существует и $\lim\limits_{M\to M_0} f(x,y)$"?

Альтернативы для выбора ответа 1 – 2, где:

1) да, справедливо; 2) нет, ошибочно.

2. Найдите предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}$, когда точка $M(x,y)$ стремится к точке $O(0,0)$ по любой прямой $y=kx$.

3. Найдите предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ (y=x^2)}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}$.

Альтернативы для выбора ответа 1 – 4, где:

1) 0. 2) $\frac{1}{2}$; 3) предел не существует;

4) правильный ответ не указан.

4. Как Вы думаете, справедливо ли утверждение: "Если по разным прямым, идущим к точке M_0, пределы $f(x,y)$ различны или хотя бы один не существует, то не существует и $\lim\limits_{M\to M_0} f(x,y)$"?

Альтернативы для выбора ответа 1 – 2, где:

1) справедливо; 2) неверно.

5. Что можно сказать о существовании предела $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}$ на основании 2-го и 3-го тестов?

Альтернативы для выбора ответа 1 – 4, где:

1) предел существует и равен 0;

2) предел существует и равен $\frac{1}{2}$;

3) предел не существует;

4) на основании найденных пределов о существовании предела $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ ничего сказать нельзя.

6. Найдите предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x - y}{x + y}$.

Альтернативы для выбора ответа 1 – 5, где:

1) 0; 2) 1; 3) –1; 4) предел не существует;

5) правильный ответ не указан.

7. Найдите предел $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} \frac{x - y + x^2 + y^2}{x + y}\right)$.

8. Найдите предел $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} \frac{x - y + x^2 + y^2}{x + y}\right)$.

9. Что можно сказать о существовании предела $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x - y + x^2 + y^2}{x + y}$?

Альтернативы для выбора ответа 1 – 2, где:

1) предел существует; 2) предел не существует.

10. Найдите предел $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} x\sin\frac{1}{y}$.

Альтернативы для выбора ответа 1 – 5, где:

1) 0; 2) 1; 3) –1;

4) предел не существует; 5) правильный ответ не указан.

11. Найдите $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{y}$.

2.4. Непрерывность функции

Пусть функция $u = f(M)$ определена на множестве D и в его предельной точке M_0.

Определение 2.4.1. *Функция* $u = f(M)$ *называется непрерывной в точке* M_0, *если* $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$.

Назовём полным приращением функции $u = f(M)$ в точке M_0 величину $\Delta u = f(M) - f(M_0)$.

Тогда условие непрерывности функции в точке M_0 $\left(\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)\right)$ эквивалентно тому, что $\lim\limits_{M \to M_0} \Delta u = 0$.

Если же $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $M_0\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$ и $\left(x_1 - x_1^0\right) = \Delta x_1$, $\left(x_2 - x_2^0\right) = \Delta x_2$, …, $\left(x_n - x_n^0\right) = \Delta x_n$, то

$$\Delta u = f\left(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \ldots, x_n^0 + \Delta x_n\right) - f\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$$

и условие непрерывности можно сформулировать иначе.

Определение 2.4.2. *Функция* $u = f(M)$ *называется непрерывной в точке* M_0, *если* $\lim\limits_{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \Delta x_2 \to 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \Delta x_n \to 0}} \Delta u = 0$.

Определение 2.4.3. *Предельные точки множества D, в которых нарушается определение непрерывности функции, называются точками разрыва функции. Функция, непрерывная в точке* M_0, *в смысле данных выше определений, называется непрерывной в точке* M_0 *по совокупности аргументов.*

Можно говорить и о непрерывности функции в точке по отдельным переменным.

Определение 2.4.4. *Частным приращением функции* $u = f(M)$ *в точке* M_0 *по аргументу* x_k *называется величина*

$$\Delta_{x_k} u = f\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_k^0 + \Delta x_k, x_{k+1}^0, \ldots, x_n^0\right) - f\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_k^0, \ldots, x_n^0\right).$$

Определение 2.4.5. *Функция* $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *называется непрерывной в точке* $M_0\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$ *по переменной* x_k, *если* $\lim\limits_{\Delta x_k \to 0} \Delta_{x_k} u = 0$.

Связь между непрерывностью функции в точке по совокупности переменных и по каждой переменной устанавливает следующая теорема.

Теорема 2.4.1. *Если функция* $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *определена в окрестности точки* M_0 *и непрерывна в ней по совокупности переменных, то она непрерывна в этой точке и по каждой переменной.*

Пример 2.4.1. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^3}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

по совокупности переменных и по каждой переменной в точке $A(0,0)$.

Для исследования непрерывности функции в точке следует проверить:

а) определена ли функция в этой точке;

б) существует ли $\lim\limits_{M \to A} f(x,y)$;

в) выполняется ли равенство $\lim\limits_{M \to A} f(x,y) = f(0,0)$.

В соответствии с равенством, определяющим функцию, имеем $f(0, 0) = 0$. Найдём предел

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2 - y^3}{x^2 + y^2} = \underset{\rho \to 0}{\begin{Bmatrix} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{Bmatrix}} = \lim_{\rho \to 0}\left(\cos^2\varphi - \rho\sin^3\varphi\right) = \cos^2\varphi .$$

Видим, что предел $\lim\limits_{M \to A} f(x,y)$ имеет различные значения для разных направлений $\varphi = \text{const}$, что означает отсутствие предела в точке $A(0,0)$ и, следовательно, функция не является непрерывной в этой точке.

Исследуем непрерывность по каждой переменной. Сначала найдём частное приращение функции по переменной x в точке $A(0,0)$, получим

$$\Delta_x f = f(0 + \Delta x, 0) - f(0,0) = \frac{\Delta x^2}{\Delta x^2} = 1 \text{ и } \lim_{\Delta x \to 0} \Delta_x f = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1 \neq 0 .$$

Откуда заключаем, что функция не является непрерывной в точке $A(0,0)$ по переменной x.

Аналогично находим

$$\Delta_y f = f(0, 0 + \Delta y) - f(0,0) = \frac{\Delta y^3}{\Delta y^2} = \Delta y \text{ и } \lim_{\Delta y \to 0} \Delta_y f = \lim_{\Delta y \to 0} \Delta y = 0 .$$

Следовательно, данная функция непрерывна в точке $A(0,0)$ по переменной y.

Имеют место теоремы, аналогичные основным теоремам о непрерывных функциях для случая одной переменной. Перечислим их.

Теорема 2.4.2 (об арифметических операциях над непрерывными функциями). *Если функции* $f(M)$ *и* $g(M)$ *определены на множестве* D *и непрерывны в точке* $A \in D$, *то в этой точке непрерывны и следующие функции:*

$$а)\ f(M)+g(M);\quad б)\ f(M)\cdot g(M);\quad в)\ \frac{f(M)}{g(M)},\ g(A)\neq 0.$$

Теорема 2.4.3 (о композиции непрерывных функций). *Если функции*

$$t_1 = t_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots,\ t_2 = t_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots,\ t_m = t_m(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

непрерывны в точке $A\left(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0\right)$, *а функция* $u = u(t_1, t_2, \dots, t_m)$ *непрерывна в точке* $B\left(t_1^0, t_2^0, \dots, t_m^0\right)$, *где* $t_i^0 = t_i\left(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0\right)\left(i = \overline{1, m}\right)$. *Тогда композиция функций*

$$u = u(t_1(x_1, x_2, \dots, x_n), t_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, t_m(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

непрерывна в точке A.

Теорема 2.4.4. *Всякая элементарная функция многих переменных непрерывна на множестве своего определения.*

Здесь под элементарной функцией многих переменных понимается функция, образованная из основных элементарных функций одного переменного с помощью конечного числа арифметических действий и композиций.

Например, функция $u = \sin\left(e^{x^2+y}\right)$ – элементарная, так как образована из двух основных элементарных функций: $u = x^2$ и $v = y$ с помощью арифметической операции сложения и двух композиций: отыскания экспоненты от суммы и синуса от экспоненты.

Пример 2.4.2. Найти множество точек непрерывности функции

$$u = \frac{1}{x^2 + y^2 - 4}.$$

Данная функция является элементарной функцией двух переменных, так как образована из основных элементарных функций $u = x^2$, $v = y^2$, $w = 4$ с помощью операций сложения и деления.

Множество точек определения этой функции имеет вид $D = \left\{(x, y) : x^2 + y^2 - 4 \neq 0\right\}$ и, следовательно, по теореме 2.4.4 это множество совпадает со множеством точек её непрерывности.

Задание 2.4

1. Исследовать на непрерывность по переменной x функцию

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

в точке $A(0, 0)$.

Альтернативы для выбора ответа 1 – 2, где:

1) непрерывна; 2) не непрерывна.

2. Исследовать на непрерывность по переменной y функцию

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

в точке $A(0,0)$.

Альтернативы для выбора ответа 1 – 2, где:

1) непрерывна; 2) не непрерывна.

3. Исследовать на непрерывность по совокупности переменных функцию $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ в точке $A(0,0)$.

Альтернативы для выбора ответа 1 – 2, где:

1) непрерывна; 2) не непрерывна.

4. Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в точке $M_0(x_0, y_0)$ по каждой из переменных. Что можно сказать о её непрерывности в M_0 по совокупности переменных?

Альтернативы для выбора ответа 1 – 2, где:

1) функция $f(x, y)$ непрерывна в точке M_0 по совокупности переменных;

2) о непрерывности функции ничего сказать нельзя, требуются дополнительные исследования.

5. Исследовать на непрерывность по совокупности аргументов функцию

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2+y^2}{x+y}, & x+y\neq 0,\\ 0, & x+y=0\end{cases}$$ в точке $A(0,0)$.

Альтернативы для выбора ответа 1 – 2, где:

1) непрерывна; 2) не непрерывна.

6. Что можно сказать о непрерывности функции

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2+y^2}{x+y}, & x+y\neq 0,\\ 0, & x+y=0\end{cases}$$

в точке $A(0,0)$ на основании теоремы о связи непрерывности функции в точке по совокупности аргументов и по каждому аргументу отдельно?

Альтернативы для выбора ответа 1 – 5, где:

1) непрерывна только по аргументу x;

2) непрерывна только по аргументу y;

3) непрерывна по каждому аргументу;

4) функция разрывна в точке по каждому аргументу;

5) о непрерывности функции по каждому аргументу сказать ничего нельзя.

Для задач 7 – 11 выберите ответ из следующих альтернатив:

1) (0,0); 2) $\{(x,y):x-y=0\}$; 3) $\{(x,y):x+y=0\}$;

4) $\{(x,y):x\neq 0\}$; 5) $\{(x,y):x+y^2=0\}$; 6) $\{(x,y):x-y^2=0\}$;

7) $\varnothing$; 8) $\boldsymbol{R}^2$;

9) правильный ответ не указан.

7. Найдите множество точек разрыва функции $z=\frac{x+y}{x-y}$.

8. Найдите множество точек разрыва функции $z=\frac{x-y^2}{x+y^2}$.

9. Найдите множество точек разрыва функции $z=e^{\frac{1}{x^2+y^2}}$.

10. Найдите множество точек разрыва функции $z=|x|+|y|$.

11. Найдите множество точек непрерывности функции $z=\cos\frac{y}{x}$.

2.5. Непрерывность функции на множестве

Определение 2.5.1. *Функция называется непрерывной на множестве D, если она непрерывна в каждой его точке.*

Определение 2.5.2. *Функция* $u=f(M)$ *называется ограниченной на множестве D, если существуют такие числа c и C, что* $\forall M\in D \quad c\leq f(M)\leq C$.

Теорема 2.5.1 (первая теорема Вейерштрасса). *Всякая непрерывная на замкнутом ограниченном множестве функция ограничена на этом множестве.*

Пример 2.5.1. Ограничена ли функция $u = x^2 - y^2$ в круге $D = \{(x, y): \quad x^2 + y^2 \le 25\}$?

Проверим выполнение условий первой теоремы Вейерштрасса. Во-первых, множество D является замкнутым, т. к. содержит границу $\Gamma = \{(x, y): x^2 + y^2 = 25\}$ и ограничено. Во-вторых, функция $u = x^2 - y^2$ непрерывна на $\boldsymbol{R}^2$ по теореме о непрерывности элементарных функций. Следовательно функция $u = x^2 - y^2$ ограничена на множестве $D = \{(x, y): x^2 + y^2 \le 25\}$.

Определение 2.5.3. *Число a называется точной верхней гранью функции u = f(M) на множестве D, если выполняются два условия:*

а) $\forall M \in D \quad f(M) \le a$; *б)* $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M' \in D \Rightarrow f(M') > a - \varepsilon$.

Принято следующее обозначение точной верхней грани:

$$a = \sup_D f(M).$$

Определение 2.5.4. *Число b называется точной нижней гранью функции u = f(M) на множестве D, если выполняются два условия:*

а) $\forall M \in D \quad f(M) \ge b$; *б)* $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M' \in D \Rightarrow f(M') < b + \varepsilon$.

Принято обозначение: $b = \inf_D f(M)$.

Теорема 2.5.2 (вторая теорема Вейерштрасса). *Всякая непрерывная в замкнутой ограниченной области функция достигает на ней своих точных граней.*

Пример 2.5.2. Достигает ли функция $u = \dfrac{x^6 + y^6}{x^2 + y^2}$ своих точных граней на множестве $D = \{(x, y): 0 < x^2 + y^2 \le 9\}$?

Вторая теорема Вейерштрасса не применима, так как множество D не замкнуто.

Перейдём к полярным координатам, получим функцию $u = \rho^4(\cos^6\varphi + \sin^6\varphi)$ в области $D' = \{(\rho, \varphi): 0 < \rho \le 3\}$.

Выполним некоторые преобразования.

$$u = \rho^4(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)(\cos^4\varphi - \cos^2\varphi\sin^2\varphi + \sin^4\varphi) =$$

$$= \frac{\rho^4}{4}\left[(1 + \cos 2\varphi)^2 - \sin^2 2\varphi + (1 - \cos 2\varphi)^2\right] =$$

$$= \frac{\rho^4}{4}\left[1 + \cos^2 2\varphi - \sin^2 2\varphi + 1 + \cos^2 2\varphi\right] =$$

$$=\frac{\rho^4}{4}\left[2+2\cos^2 2\varphi-\sin^2 2\varphi\right]=\frac{\rho^4}{4}\left(1+3\cos^2 2\varphi\right).$$

Для любой точки $M'(\rho,\varphi)\in D'$ $u>0$, что и означает ограниченность функции на данном множестве. Число 81 является супремумом данной функции на множестве D', оно достигается при $\rho=3$ и $\varphi=\frac{n\pi}{2}$. При $\rho\to 0$ $u\to 0$, но т. к. $\rho>0$ и $1+3\cos^2 2\varphi>0$, то своей точной нижней грани функция не достигает.

Теорема 2.5.3 (теорема Коши о промежуточном значении непрерывной функции в связной области). *Если функция $u=f(M)$ непрерывна в области D и принимает в этой области значения A и B, то она принимает в этой области любые значения, заключённые между A и B.*

Пример 2.5.3. Применима ли теорема Коши об обращении функции $u=x^2-y^2$ в ноль на множестве $D=\{(x,y):\ x^2+y^2\le 25\}$?

Множество D является связной областью. Функция $u=x^2-y^2$ непрерывна всюду на $\boldsymbol{R}^2$, в том числе и в области D, как элементарная функция двух переменных. Имеем, что $A(2,3)\in D$, т. к. $x^2+y^2=2^2+3^2=16<25$ и $f(A)=-5<0$, $B(3,2)\in D$ и $f(B)=5>0$.

Тогда в области D существует точка $M_0(x_0,y_0)$ такая, что $u(M_0)=0$. Очевидно, что $u(M)=0$ в каждой точке, где $x=y$ или $x=-y$.

Задание 2.5

1. Ограничена ли функция $z=2-2x-y$ на множестве

$D=\{(x,y):\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2\}$? (Да, нет).

2. Достигает ли функция $z=2-2x-y$ своих точных граней на множестве $D=\{(x,y):0\le x\le 1{,}0\le y\le 2\}$? (Да, нет).

3. Найдите $\sup\limits_D f(x,y)$,

если $f(x,y)=2-2x-y$ и $D=\{(x,y):\ 0\le x\le 1{,}0\le y\le 2\}$.

4. В какой точке области $D=\{(x,y):\ 0\le x\le 1{,}0\le y\le 2\}$ $f(x_0,y_0)=\sup\limits_D f(x,y)$, если $f(x,y)=2-2x-y$?

5. Найдите $\inf\limits_D f(x,y)$,

если $f(x,y)=2-2x-y$ и $D=\{(x,y):0\le x\le 1{,}0\le y\le 2\}$.

6. В какой точке

$$M_0 \in D = \{(x, y):\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2\}\ f(x_0, y_0) = \inf_D f(x, y),$$

если $f(x, y) = 2 - 2x - y$?

7. Ограничена ли функция $z = 2 - 2x - y$ на множестве

$$D = \{(x, y):\ 0 < x < 1,\ 0 < y < 2\}$$? (Да, нет).

8. Является ли замкнутость множества D необходимым условием ограниченности непрерывной функции на D? (Да, нет).

9. Достигает ли функция $z = 2 - 2x - y$ своих точных граней на множестве $D = \{(x, y): 0 < x < 1, 0 < y < 2\}$? (Да, нет).

10. Ограничена ли функция $z = x^2 + y^2$ на множестве $\boldsymbol{R}^2$? (Да, нет).

11. Применима ли теорема об ограниченности непрерывной функции к функции $z = x^2 + y^2$ на множестве $\boldsymbol{R}^2$? (Да, нет).

12. Является ли ограниченность множества существенным условием теоремы об ограниченности непрерывной функции? (Да, нет).

13. Ограничена ли функция $z = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$ на множестве $D = \left\{(x, y):\ x^2 + y^2 < 4\right\}$? (Да, нет).

14. Применима ли теорема об ограниченности непрерывной функции к $z = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$ на множестве $D = \left\{(x, y):\ x^2 + y^2 < 4\right\}$? (Да, нет).

15. Является ли замкнутость множества существенным условием теоремы об ограниченности непрерывной функции? (Да, нет).

16. Применима ли теорема об обращении непрерывной функции в ноль к функции $z = 1 - x - y$ на множестве

$$D = \{(x, y):\ 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2\}?$$

(Да, нет).

17. Является ли связным множество $D = D_1 \cup D_2$, где $D_1 = \left\{(x, y):\ x^2 + y^2 \le 1\right\}, D_2 = \left\{(x, y):\ (x - 3)^2 + y^2 \le 1\right\}$? (Да, нет).

18. Применима ли теорема Коши об обращении непрерывной функции в ноль к функции $z = \begin{cases} 2, & x^2 + y^2 \le 1, \\ -2, & (x - 3)^2 + y^2 \le 1 \end{cases}$? (Да, нет).

19. Является ли требование связности области существенным условием теоремы Коши об обращении функции в ноль? (Да, нет).

3. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

3.1. Частные производные

Пусть функция $u = f(M)$ определена на множестве $\{M\}$ и $M_0\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$ – его внутренняя точка и пусть

$$\Delta_{x_k} u = f\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{k-1}^0, x_k^0 + \Delta x_k, x_{k+1}^0, \ldots, x_n^0\right) - \\ - f\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_k^0, \ldots, x_n^0\right)$$

есть частное приращение функции в точке M_0 по аргументу x_k.

Определение 3.1.1. *Частной производной функции*

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

по аргументу x_k *в точке* M_0 *называется предел* $\lim\limits_{\Delta x_k \to 0} \dfrac{\Delta_{x_k} u}{\Delta x_k}$.

Обозначается такая частная производная символом $\dfrac{\partial u}{\partial x_k}(M_0)$, или $u'_{x_k}(M_0)$.

Заметим, что согласно определению

$$\frac{\partial u}{\partial x_k}\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right) = \frac{du}{dx_k}\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_k, \ldots, x_n^0\right)\Bigg|_{x_k = x_k^0}.$$

Пример 3.1.1. Найти по определению частные производные функции $u = \sqrt[3]{xy}$ в точке $O(0,0)$.

Найдём сначала частное приращение функции по x

$$\Delta_x u = f(0 + \Delta x, 0) - f(0,0) = \sqrt[3]{(0 + \Delta x) \cdot 0} - \sqrt[3]{0 \cdot 0} = 0.$$

Теперь следует совершить предельный переход

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0.$$

Следовательно, $\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,0) = 0$. Аналогично, $\dfrac{\partial u}{\partial y}(0,0) = 0$.

Пример 3.1.2. Найти частные производные функции $u = e^{x/y}$.

Для отыскания частной производной функции $u = e^{x/y}$ по переменной x функцию $u(x, y)$ рассматривают как функцию одной переменной x, при этом считают, что y имеет фиксированное значение.

Тогда $\frac{\partial u}{\partial x} = e^{\frac{x}{y}} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)'_x = e^{\frac{x}{y}} \frac{1}{y}$.

Аналогично $\frac{\partial u}{\partial y} = e^{\frac{x}{y}} \left(\frac{x}{y}\right)'_y = e^{\frac{x}{y}} \left(-\frac{x}{y^2}\right)$.

Задание 3.1

1. Найдите частное приращение функции $z = xy + \frac{x}{y}$ по x в точке $M(x, y)$.

Альтернативы для выбора ответа 1 – 4, где:

1) $y\Delta x + \frac{\Delta x}{y}$; 2) $(x + \Delta x)y + \frac{x+\Delta x}{y}$;

3) $y\Delta x + \frac{\Delta x}{y} - xy$; 4) правильный ответ не указан.

2. Найдите частное приращение функции $z = xy + \frac{x}{y}$ по x в точке $M_0(0,2)$.

Альтернативы для выбора ответа 1 – 4, где:

1) $\frac{1}{2}\Delta x$; 2) $2\Delta x$; 3) $\frac{5}{2}\Delta x$; 4) $\Delta_x z(M_0)$ не существует.

3. Найдите частное приращение функции $z = xy + \frac{x}{y}$ по y в точке $M(x, y)$.

Альтернативы для выбора ответа 1 – 3, где:

1) $xy + x\Delta y + \frac{x}{y + \Delta y}$; 2) $x\Delta y - \frac{x\Delta y}{y(y + \Delta y)}$; 3) $x\Delta y + \frac{x}{\Delta y}$.

4. Найдите частное приращение функции $z = xy + \frac{x}{y}$ по y в точке $M_0(1, 1)$.

Альтернативы для выбора ответа 1 – 4, где:

1) $\Delta y + \frac{1}{1 + \Delta y} - 1$; 2) $\Delta y + \frac{1}{1 + \Delta y}$; 3) $\Delta y + \frac{1}{\Delta y}$;

4) $\Delta_y z(M_0)$ не существует.

5. Найдите частное приращение функции $z = xy + \frac{x}{y}$ по y в точке $M_0(1,0)$.

Альтернативы для выбора ответа 1 – 5, где:

1) 0; 2) $\Delta y + \frac{1}{\Delta y}$; 3) $\Delta y + 1$; 4) $y + \frac{1}{y}$;

5) $\Delta_y z(M_0)$ не существует.

6. Найдите $\frac{\partial z}{\partial x}$, если $z = y^2 + xe^{3y}$.

7. Найдите $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = xy + \frac{y}{x}$.

8. Найдите $\frac{\partial u}{\partial y}$, если $u = x^2 \sin(3y + z)$.

9. Найдите $\frac{\partial z}{\partial x}$ (1,0), если $z = e^{-\frac{y}{x}} - x^2$.

10. Найдите $\frac{\partial z}{\partial y}$ (1,0), если $z = e^{-\frac{y}{x}} - x^2$.

11. Найдите по определению $\frac{\partial z}{\partial x}$ (0,0), если

$$z = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$$

12. Найдите по определению $\frac{\partial z}{\partial y}$ (0,0), если

$$z = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$$

3.2. Геометрический и физический смысл частных производных

Пусть функция $z = f(x, y)$, определённая на множестве $\{M\}$, имеет частную производную $\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)$, где $M(x_0, y_0) \in \{M\}$.

По определению частной производной имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{dz}{dx}(x, y_0)\Big|_{x = x_0} = \operatorname{tg}\alpha,$$

что означает, что $\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)$ есть тангенс угла наклона касательной к графику функции $\begin{cases} z = f(x, y), \\ y = y_o \end{cases}$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Здесь угол α образован касательной с положительным направлением оси Ox (рис. 18).

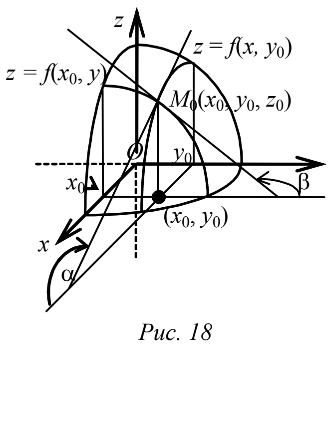


Рис. 18

Аналогично $\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{dz}{dy}(x_0, y)\Big|_{y=y_0} = \mathrm{tg}\beta$ есть тангенс угла наклона касательной к графику функции $\begin{cases} z = f(x, y), \\ x = x_0 \end{cases}$ в точке (x_0, y_0, z_0), где $z_0 = f(x_0, y_0)$. Здесь угол β образован касательной с положительным направлением оси Oy.

Пример 3.2.1. Какой геометрический смысл имеет $\frac{\partial z}{\partial x}\left(1, \sqrt{2}\right)$, если $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$?

Найдём сначала

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(1, \sqrt{2}\right) = \frac{(-2x)}{2\sqrt{4 - x^2 - y^2}}\Bigg|_{\left(1, \sqrt{2}\right)} = -\frac{1}{\sqrt{4 - 2 - 1}} = -1 .$$

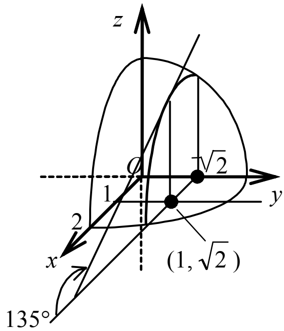


Рис. 19

Геометрически это означает, что тангенс угла наклона касательной к линии l: $\begin{cases} z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, \\ y = \sqrt{2} \end{cases}$ в точке $M_0\left(1, \sqrt{2}\right)$ равен (– 1) и, следовательно, угол между осью Ox и касательной равен 135° (рис. 19).

Физический смысл частной производной $\frac{\partial u}{\partial x_k}(M_0)$ состоит в том, что она определяет скорость изменения функции в точке M_0 в направлении оси ox_k .

Пример 3.2.2. Температура T воздуха в точке земной поверхности является функцией широты θ, долготы φ и времени t. Тогда с физической точки зрения частные производные $\frac{\partial T}{\partial \theta}$, $\frac{\partial T}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial T}{\partial t}$ представляют скорости изменения температуры в зависимости от изменения широты, долготы, времени соответственно.

Задание 3.2

1. Найдите скорость изменения функции $z = x^3 + y^2$ в точке (1, 1) в зависимости от изменения переменной x.

2. Найдите скорость изменения функции $z = x^3 + y^2$ в точке (1, 1) в зависимости от изменения переменной *y*.

3. Температура *T* точки остывающего стержня является функцией двух переменных: расстояния *x* точки от начала стержня и момента времени *t*. Какая величина определяет скорость изменения температуры *T* в зависимости от времени *t*?

Альтернативы для выбора ответа 1 – 5, где:

1) $\Delta_x T$; 2) $\Delta_t T$; 3) $\frac{\partial T}{\partial x}$; 4) $\frac{\partial T}{\partial t}$;

5) правильный ответ не указан.

4. Температура *T* точки остывающего стержня является функцией двух переменных: расстояния *x* точки от начала стержня и момента времени *t*. Какая величина определяет скорость изменения температуры *T* в зависимости от расстояния *x* ?

Альтернативы для выбора ответа 1 – 5, где:

1) $\Delta_x T$; 2) $\Delta_t T$; 3) $\frac{\partial T}{\partial x}$; 4) $\frac{\partial T}{\partial t}$;

5) правильный ответ не указан.

5. Где круче подъём поверхности s: $z = x^2 + y^2$ в направлении оси *OX* – в точке (1,2) или (2,1)?

6. Найдите крутизну подъёма поверхности, заданной уравнением $z = x^2 + y^2$, в точке $M_0(1, 2)$ в направлении оси *OX*.

7. Какой угол с положительным направлением оси *OX* образует касательная к линии пересечения поверхности $s: z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ с плоскостью L: $y = \frac{2}{\sqrt{3}}$ в точке $M_0\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$? Ответ запишите в градусах.

8. На поверхности s: $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ найдите точку, в которой не происходит подъёма поверхности в направлении оси *OX* и оси *OУ*.

3.3. Частные производные неявно заданных функций

Определение 3.3.1. *Если* $\forall x \in X$ *уравнение* $f(x, y) = 0$ *имеет единственное решение* $y = y(x)$, *то говорят, что уравнение* $f(x, y) = 0$ *на множестве* X *определяет неявную функцию* $y = y(x)$.

Пример 3.3.1. Уравнение $f(x, y) \equiv x^2 + y^2 - 4 = 0$ на множестве $X = [-1, 1]$ определяет функции, например, такие:

$$y=\sqrt{4-x^2-y^2}\ ,\ y=-\sqrt{4-x^2-y^2}\ ,\ y=\begin{cases}\sqrt{4-x^2-y^2}, & -1\le x<0,\\ -\sqrt{4-x^2-y^2}, & 0\le x\le 1.\end{cases}$$

Теорема 3.3.1 (существования, единственности и дифференцируемости неявной функции одного аргумента). *Пусть*

1) *функция* $F(x, y)$ *определена и непрерывна вместе со своими частными производными в некоторой окрестности точки* $M_0(x_0, y_0)$;

2) $F(x_0, y_0)=0$;

3) $F'_y(x_0, y_0)\ne 0$.

Тогда найдётся такая окрестность $U(x_0, \delta)$ *точки* x_0*, в пределах которой существует единственная неявная функция* $y = y(x)$*, определяемая уравнением* $F(x, y) = 0$*, такая, что*

а) $y_0 = f(x_0)$;

б) $y = y(x)$ *непрерывна вместе со своей производной, причём* $y'=-\dfrac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$.

Пример 3.3.1. Определяет ли уравнение

$$F(x,y)\equiv xe^y+ye^x-2=0$$

неявную функцию $y = y(x)$ в окрестности точки $x_0=0$?

Рассмотрим некоторую окрестность точки $M_0(0;2)$ и проверим условия теоремы:

1) функция $F(x,y)\equiv xe^y+ye^x-2$ определена и непрерывна вместе со своими частными производными $\dfrac{\partial F}{\partial x}=e^y+ye^x$ и $\dfrac{\partial F}{\partial y}=xe^y+e^x$ на $\boldsymbol{R}^2$, а, следовательно, и в некоторой окрестности точки M_0;

2) $F(0,2)\equiv 0e^2+2e^0-2=0$; 3) $\left.\dfrac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0}=\left.xe^y+e^x\right|_{M_0}=1\ne 0$.

Тогда, в соответствии с теоремой, в некоторой окрестности точки $x_0=0$ существует единственная функция $y = y(x)$, определяемая уравнением $xe^y+ye^x-2=0$, причём, $y'=-\dfrac{F'_x}{F'_y}=-\dfrac{e^y+ye^x}{xe^y+e^x}$.

Пример 3.3.2. Найти $y'(0)$ и $y''(0)$ неявной функции $y = y(x)$, определяемой уравнением $F(x,y) \equiv xe^y + ye^x - 2 = 0$.

Первый способ. В соответствии с формулой $y'(x) = -\dfrac{F'_x}{F'_y}$ находим $y'(x) = -\dfrac{\left(xe^y + ye^x - 2\right)'_x}{\left(xe^y + ye^x - 2\right)'_y} = -\dfrac{e^y + ye^x}{xe^y + e^x}$ и $y'(0) = \dfrac{e^2 + 2 \cdot e^0}{0 \cdot e^2 + e^0} = -\left(e^2 + 2\right)$.

Теперь найдём $y''(x) = \left(y'(x)\right)' = -\left(\dfrac{e^y + ye^x}{xe^y + e^x}\right)'_x =$

$$= -\frac{(e^y \cdot y' + y'e^x + ye^x)(xe^y + e^x) - (e^y + ye^x)(e^y + xe^y y' + e^x)}{(xe^y + e^x)^2}.$$

Подставим в $y''(x)$ $x_0 = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -\left(e^2 + 2\right)$, получим

$$y''(0) = -\left[-e^2\left(e^2 + 2\right) - \left(e^2 + 2\right) + 2 - \left(e^2 + 1\right)\left(e^2 + 2\right)\right] = 2e^4 + 6e^2 + 2.$$

Второй способ. Так как уравнение $xe^y + ye^x - 2 = 0$ определяет $y = y(x)$, то, дифференцируя тождество $xe^{y(x)} + y(x)e^x - 2 \equiv 0$ по x, получаем $e^y + xe^y y' + y'e^x + ye^x \equiv 0$, откуда находим $y' = -\dfrac{e^y + ye^x}{xe^y + e^x}$.

В частности, $y'(0) = -e^2 - 2$. Продифференцируем тождество ещё раз по x, получим

$$e^y \cdot y' + e^y y' + xe^y \left(y'\right)^2 + xe^y y'' + y''e^x + y'e^x + y'e^x + ye^x \equiv 0,$$

из которого при $x_0 = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -e^2 - 2$ находим

$$2e^2\left(-e^2 - 2\right) + y'' - 2e^2 - 4 + 2 = 0 \quad \text{и} \quad y''(0) = 2e^4 + 6e^2 + 2.$$

Аналогичным образом определяется неявная функция нескольких переменных, и для неё формулируется теорема существования.

Теорема 3.3.2 (существования, единственности, непрерывности и дифференцируемости неявной функции многих переменных). *Пусть*

1) *функция* $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)$ *определена и непрерывна вместе со своими частными производными в некоторой окрестности точки* $M_0\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, u^0\right)$;

2) $F(M_0) = 0$; 3) $F'_u(M_0) \neq 0$.

Тогда найдётся такая окрестность точки $\left(x_1^0, x_2^0, \dots x_n^0\right)$*, в пределах которой существует единственная неявная функция* $u = u\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right)$*, определяемая уравнением* $F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, u\right) = 0$*, такая, что*

а) $u^0 = u\left(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0\right)$*;*

б) $u = u\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right)$ *непрерывна в указанной окрестности вместе со своими частными производными, причём,*

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}\left(x_1, x_2, \dots, x_n, u\right)}{\frac{\partial F}{\partial u}\left(x_1, x_2, \dots, x_n, u\right)}.$$

Пример 3.3.3. Докажите, что уравнение $z^3 - 3xyz = 8$ определяет единственную дифференцируемую неявную функцию вида $z = z(x, y)$ в некоторой окрестности точки $M_0\,(0, -1, 2)$. Найдите $z'_x\left(M_0\right)$.

Во-первых, функция $F\left(x, y, z\right) = z^3 - 3xyz - 8$ определена и непрерывна вместе со своими частными производными $\frac{\partial F}{\partial x} = -3yz$, $\frac{\partial F}{\partial y} = -3xz$, $\frac{\partial F}{\partial z} = 3z^2 - 3xy$ всюду на $\boldsymbol{R}^3$, в том числе и в некоторой окрестности точки $M_0\left(0,-1,2\right)$.

Во-вторых, $F\left(M_0\right) = 8 - 8 = 0$.

В-третьих, $\frac{\partial F}{\partial z}\left(M_0\right) = 12 \neq 0$.

Все условия теоремы выполняются, следовательно, найдётся такая окрестность точки $(0, -1)$, в которой уравнение $z^3 - 3xyz - 8 = 0$ определяет единственную дифференцируемую функцию $z = z(x, y)$.

Найдём $\frac{\partial z}{\partial x}$. Можно воспользоваться готовой формулой

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{-3zy}{3z^2 - 3xy} = \frac{zy}{z^2 - xy} \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial x}\left(M_0\right) = -\frac{1}{2}.$$

Можно продифференцировать по x тождество

$$z^3\left(x\right) - 3xyz\left(x\right) - 8 = 0,$$

в которое подставлено решение заданного уравнения.

Получим $3z^2 \cdot z'_x - 3yz - 3xyz'_x = 0$, откуда $z'_x = \frac{yz}{z^2 - xy}$ и $z'_x(M_0) = -\frac{1}{2}$.

Задание 3.3

1. Выполняются ли условия теоремы существования и единственности неявной функции $y = y(x)$, заданной уравнением $x^2 + y^2 - 25 = 0$, в окрестности точки $M_0(3, 4)$? (Да, нет).

2. В каких из следующих точек $M_1(0, 0)$, $M_2(0, 5)$, $M_3(5, 0)$ выполняются условия теоремы существования и единственности неявной функции $y = y(x)$, заданной уравнением $x^2 + y^2 - 25 = 0$?

3. Как Вы думаете, условия, перечисленные в теореме существования и единственности неявной функции, являются необходимыми или достаточными условиями её существования и единственности?

Альтернативы для выбора ответа 1 – 3, где:

1) только необходимыми условиями;
2) только достаточными условиями;
3) и необходимыми, и достаточными условиями.

4. Разрешив уравнение $x^2 + y^2 - 25 = 0$ относительно y, установите, сколько непрерывных функций определяет оно в окрестности точки $M_0(5, 0)$.

5. Найдите $\frac{\partial z}{\partial x}$ для функции $z = f(x, y)$, заданной неявно уравнением $e^z - 2z + xy = 3$.

6. Найдите $\frac{\partial z}{\partial y}$ для функции $z = f(x, y)$, заданной неявно уравнением $e^z - 2z + xy = 3$.

Альтернативы для выбора ответа к задачам 5 – 6:

1) $\frac{y}{e^z}$; 2) $\frac{y}{2 - e^z}$; 3) $\frac{x}{e^z}$; 4) $\frac{x}{2 - e^z}$.

7. Найдите $\frac{\partial z}{\partial x}$ для функции $z = f(x, y)$, заданной неявно уравнением $x^2 + y^2 = z^2$.

8. Найдите $\frac{\partial z}{\partial y}$ для функции $z = f(x, y)$, заданной неявно уравнением $x^2 + y^2 = z^2$.

9. Неявная функция $z = f(x, y)$ задана уравнением

$$z^2 x - x^2 y + y^2 z + 2x - y = 0 .$$

Найдите $\frac{\partial z}{\partial x}$ в точке $M_0(0, 1)$.

10. Неявная функция $z = f(x, y)$ задана уравнением

$$z^2 x - x^2 y + y^2 z + 2x - y = 0 .$$

Найдите $\frac{\partial z}{\partial y}$ в точке $M_0(0, 1)$.

3.4. Определение дифференцируемой функции

Пусть функция $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определена на множестве D и $M_0\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$ − его внутренняя точка.

Пусть $\Delta u = f\left(x_1^0 + \Delta x_1,\ x_2^0 + \Delta x_2, \ldots,\ x_n^0 + \Delta x_n\right) - f\left(x_1^0,\ x_2^0, \ldots,\ x_n^0\right)$ есть полное приращение функции $u = f(M)$ в точке M_0, отвечающее приращениям аргументов $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$

Определение 3.4.1. *Функция* $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *называется дифференцируемой в точке* $M_0\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$, *если её полное приращение в этой точке имеет вид*

$$\Delta u = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \cdots + A_n \Delta x_n + o(\rho) , \qquad (3.4.1)$$

где $A_i\left(i = \overline{1, n}\right)$ *есть числа,* $o(\rho)$ *– бесконечно малая величина высшего порядка малости, чем* ρ *и* $\rho = \rho(M_0, M) = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + \cdots + (\Delta x_n)^2}$.

Другое условие дифференцируемости функции в точке, эквивалентное данному, имеет вид

$$\Delta u = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \cdots + A_n \Delta x_n + \alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \cdots + \alpha_n \Delta x_n ,$$

где $A_i\left(i = \overline{1, n}\right)$ есть числа и α_1 есть функции от аргументов $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$, причём $\lim\limits_{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \Delta x_2 \to 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \Delta x_n \to 0}} \alpha_i = 0$.

Пример 3.4.1. Дифференцируема ли функция

$$u = 2x - 3y + \sqrt{x^4 + y^4} \text{ в точке } O(0, 0)?$$

Найдём полное приращение функции в точке $O(0, 0)$ по формуле $\Delta u = u(0+\Delta x,\ 0+\Delta y)\ - u(0, 0)$, получим

$$\Delta u = 2(0+\Delta x) - 3(0+\Delta y) + \sqrt{(0+\Delta x)^4 + (0+\Delta y)^4} -$$

$$-\left(2\cdot 0 - 3\cdot 0 + \sqrt{0^4+0^4}\right) = 2\Delta x - 3\Delta y + \sqrt{(\Delta x)^4 + (\Delta y)^4}\ .$$

В соответствии с определением дифференцируемой функции следует проверить равенство $\sqrt{(\Delta x)^4 + (\Delta y)^4} = o(\rho)$.

Найдём $\lim\limits_{\rho\to 0} \dfrac{\sqrt{(\Delta x)^4 + (\Delta y)^4}}{\rho} = \begin{Bmatrix} \Delta x = \rho\cos\varphi, \\ \Delta y = \rho\sin\varphi \end{Bmatrix} =$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2\sqrt{\cos^4\varphi + \sin^4\varphi}}{\rho} = \lim_{\rho\to 0} \rho\cdot\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 2\varphi} = 0\ ,$$

поскольку ρ – бесконечно малая величина, а $\sqrt{1-\dfrac{1}{2}\sin^2 2\varphi}$ есть ограниченная функция, то $\sqrt{(\Delta x)^4 + (\Delta y)^4} = o(\rho)$, $\rho \to 0$.

Таким образом, данная функция удовлетворяет определению (3.4.1) дифференцируемой функции.

Пусть функция $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ дифференцируема в точке $M_0\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$.

Тогда её приращение имеет вид

$$\Delta u = A_1\Delta x_1 + A_2\Delta x_2 + \cdots + A_n\Delta x_n + \alpha_1\Delta x_1 + \alpha_2\Delta x_2 + \cdots + \alpha_n\Delta x_n\ ,$$

где $\Delta u = A_1\Delta x_1 + A_2\Delta x_2 + \cdots + A_n\Delta x_n$ есть линейная относительно $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ часть приращения функции, а

$$\alpha_1\Delta x_1 + \alpha_2\Delta x_2 + \cdots + \alpha_n\Delta x_n = o(\rho) \text{ при } \rho \to 0.$$

Определение 3.4.2. *Дифференциалом функции $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в точке M_0 называется линейная относительно приращений аргументов часть приращения функции.*

Принято следующее обозначение для дифференциала в точке M_0 :

$$du(M_0) = A_1\Delta x_1 + A_2\Delta x_2 + \cdots + A_n\Delta x_n\ .$$

Положим $\Delta x_i = dx_i$, $(i = 1, n)$.

Тогда $du(M_0) = A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + \cdots + A_n dx_n$.

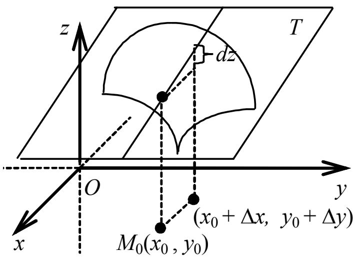


Рис. 20

С геометрической точки зрения дифференциал функции двух переменных в точке M_0 представляет собой приращение аппликаты касательной плоскости в этой точке, отвечающей приращениям аргументов Δx и Δy (рис.20).

Пример 3.4.2. Найти по определению дифференциал функции $z = x^2 - xy + 5x - 2y$ в точке $M_0(1, 2)$.

Найдём приращение функции

$$\Delta z = (1+\Delta x)^2 - (1+\Delta x)(2+\Delta y) + 5(1+\Delta x) - 2(2+\Delta y) =$$

$$= 1 + 2\Delta x + \Delta x^2 - 2 - 2\Delta x - \Delta y - \Delta x\Delta y + 5 + 5\Delta x - 4 - 2\Delta y =$$

$$= 5\Delta x - 3\Delta y + \Delta x^2 - \Delta x\Delta y\ .$$

Проверим условие дифференцируемости функции. Выполняется ли равенство $\Delta x^2 - \Delta x\Delta y = o(\rho)$, $\rho \to 0$? Для этого найдём

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta x^2 - \Delta x\Delta y}{\rho} = \left\{\begin{matrix}\Delta x = \rho\cos\varphi,\\ \Delta y = \rho\sin\varphi\end{matrix}\right\} = \lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^2\left(\cos^2\varphi - \cos\varphi\sin\varphi\right)}{\rho} =$$

$$= \lim_{\rho\to 0}\rho\cdot\left(\cos^2\varphi - \cos\varphi\sin\varphi\right) = 0\ ,$$

т. к. величина $\cos^2\varphi - \cos\varphi\sin\varphi$ ограничена, а ρ есть бесконечно малая величина.

Тогда, в соответствии с определением, дифференциал функции в точке $M_0(1, 2)$ имеет вид $dz = 5\Delta x - 3\Delta y$.

Задание 3.4

Ответы к задачам 1 – 9 выберите, указав номер высказывания из следующего списка:

1) $(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$; 2) $2x\Delta x + 2y\Delta y + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$;

3) $2\Delta x + 2\Delta y$; 4) $2x\Delta x + 2y\Delta y$;

5) $2xy\Delta x + x^2\Delta y + y(\Delta x)^2 + 2x\Delta x\Delta y + \Delta y(\Delta x)^2$; 6) 0;

7) $2\Delta x + \Delta y$; 8) $(\Delta x)^2 + 2\Delta x\Delta y + (\Delta x)^2\,\Delta y$;

9) $2xy\Delta x + x^2\Delta y$; 10) $2\Delta x + \Delta y + (\Delta x)^2 + 2\Delta x\Delta y + (\Delta x)^2\,\Delta y$;
11) $2\Delta x + 2\Delta y + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$.

1. Найдите полное приращение функции $z = x^2 + y^2$.

2. Найдите полный дифференциал функции $z = x^2 + y^2$, следуя его определению.

3. Найдите полное приращение функции $z = x^2 + y^2$ в точке $M_0(1, 1)$.

4. Найдите полный дифференциал функции $z = x^2 + y^2$ в точке $M_0(1, 1)$.

5. Найдите полное приращение функции $z = x^2 y$.

6. Найдите полный дифференциал функции $z = x^2 y$, следуя его определению.

7. Найдите полное приращение функции $z = x^2 y$ в точке $M_0(1, 1)$.

8. Найдите полный дифференциал функции $z = x^2 y$ в точке $M_0(1, 1)$.

9. Какая абсолютная погрешность будет допущена при замене приращения функции $z = x^2 + y^2$ её дифференциалом?

10. Какая абсолютная погрешность будет допущена при замене приращения линейной функции $z = ax + by + c$ её дифференциалом?

11. Найдите полный дифференциал функции $z = x^3 + y^3$ в точке $M_0\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

12. Найдите полный дифференциал функции $z = e^{2xy}$ в точке $M_0(0, 0)$.

3.5. Необходимые условия дифференцируемости

Два важных свойства присущи дифференцируемым в точке функциям.

Теорема 3.5.1. *Если функция* $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *дифференцируема в точке* M_0, *то она непрерывна в этой точке.*

Пример 3.5.1. Непрерывна ли функция $u = \sqrt[3]{xy}$ в точке $M_0(0, 0)$?

На основании теоремы о непрерывности элементарной функции в области определения функция $u=\sqrt[3]{xy}$ непрерывна в точке $M_0(0,\,0)$.

Пример 3.5.2. Дифференцируема ли функция $u=\sqrt[3]{xy}$ в точке $M_0(0,\,0)$?

Так как $\Delta u=\sqrt[3]{\Delta x\Delta y}$, то для выполнения условия дифференцируемости следует проверить равенство $\sqrt[3]{\Delta x\Delta y}=o(\rho)$ при $\rho\to 0$. Для этого нужно найти

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\sqrt[3]{\Delta x\Delta y}}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\sqrt[3]{\rho^2\cos\varphi\sin\varphi}}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\sqrt[3]{\cos\varphi\sin\varphi}}{\sqrt[3]{\rho}}=\infty\,.$$

Это означает, что функция $u=\sqrt[3]{xy}$ не дифференцируема в точке $M_0(0,\,0)$.

Сравнивая результаты двух последних примеров, замечаем, что не всякая непрерывная в данной точке функция дифференцируема в этой точке.

Теорема 3.5.2. *Если функция* $u=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ *дифференцируема в точке* M_0*, то она имеет в этой точке частные производные по каждому аргументу* x_k*, причём* $\frac{\partial u}{\partial x_k}(M_0)=A_k$*,* $\left(k=\overline{1,\,n}\right)$.

Используя этот результат, условия дифференцируемости функции многих переменных можно записать в виде

$$\Delta u=\frac{\partial u}{\partial x_1}(M_0)\Delta x_1+\frac{\partial u}{\partial x_2}(M_0)\Delta x_2+\ldots+\frac{\partial u}{\partial x_n}(M_0)\Delta x_n+$$

$$+\alpha_1\Delta x_1+\alpha_2\Delta x_2+\ldots+\alpha_n\Delta x_n\,.$$

Поскольку $\Delta x_i=dx_i$, $\left(i=\overline{1,\,n}\right)$, то

$$du(M_0)=\frac{\partial u}{\partial x_1}(M_0)dx_1+\frac{\partial u}{\partial x_2}(M_0)dx_2+\cdots+\frac{\partial u}{\partial x_n}(M_0)dx_n\,.$$

Пример 3.5.3. Существуют ли частные производные функции $u=\sqrt[3]{x^3+y^3}$ в точке $M_0(0,0)$?

Найдём частные производные по определению:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(M_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x u}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\Delta x^3}}{\Delta x}=1\,.$$

Аналогично $\frac{\partial u}{\partial y}(0,0)=1$.

Пример 3.5.4. Дифференцируема ли функция $u = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ в точке $M_0(0, 0)$?

Найдём $\Delta u = \sqrt[3]{\Delta x^3 + \Delta y^3}$. Исследуем условие дифференцируемости, для этого найдём

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\sqrt[3]{\Delta x^3 + \Delta y^3}}{\rho} = \left\{\begin{matrix}\Delta x = \rho\cos\varphi \\ \Delta y = \rho\sin\varphi\end{matrix}\right\} = \lim_{\rho\to 0}\frac{\rho\sqrt[3]{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi}}{\rho} = \sqrt[3]{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi},$$

Для разных значений φ получаем разные значения предела отношения $\dfrac{\sqrt{\Delta x^3 + \Delta y^3}}{\rho}$, что означает отсутствие предела, следовательно, $\sqrt[3]{\Delta x^3 + \Delta y^3} \neq o(\rho)$ при $\rho \to 0$ и функция не дифференцируема в точке M_0.

Из сравнения примеров 3.5.3 и 3.5.4 следует, что из существования частных производных функции в точке не следует её дифференцируемость в этой точке.

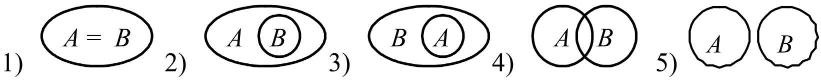
Задание 3.5

1. Постройте диаграмму взаимного расположения следующих множеств:

A – множество функций, непрерывных в области D.

B – множество функций, дифференцируемых области D.

Альтернативы для выбора ответа 1 – 5, где:



2. Непрерывна ли функция $z = \begin{cases}\frac{x+y}{x-y}, & x \neq y, \\ 0, & x = y\end{cases}$ в точке (0, 0)?

(Да, нет).

3. Что Вы можете сказать о дифференцируемости функции $z = \begin{cases}\frac{x+y}{x-y}, & x \neq y, \\ 0, & x = y\end{cases}$ в точке (0, 0) на основании исследования, проведённого в предыдущей задаче?

Альтернативы для выбора ответа 1 – 3, где:

1) функция дифференцируема;

2) функция не дифференцируема;

3) на основании проведённого исследования о дифференцируемости функции ничего сказать нельзя.

4. Непрерывна ли функция $z = \begin{cases} \frac{x+y}{x-y}, & x \neq y, \\ 0, & x = y \end{cases}$ в точке $M_0(1,3)$? (Да, нет).

5. Что Вы можете сказать о дифференцируемости функции

$$z = \begin{cases} \frac{x+y}{x-y}, & x \neq y, \\ 0, & x = y \end{cases}$$

в точке $M_0(1,3)$ на основании исследования, проведённого в предыдущей задаче?

Альтернативы для выбора ответа 1 – 3, где:

1) функция дифференцируема;

2) функция не дифференцируема;

3) на основании проведённого исследования о дифференцируемости функции ничего сказать нельзя.

6. Для функции $y = f(x)$ эквивалентны ли следующие высказывания? (Форма ответа: да, нет).

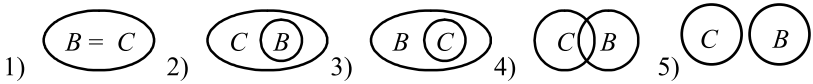
1) Функция дифференцируема в точке x_0 $(\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x))$;

2) Функция имеет конечную производную $f'(x_0)$.

7. Постройте диаграмму взаимного расположения следующих множеств:

B – множество функций, дифференцируемых в точке M_0.

C – множество функций, имеющих в точке M_0 конечные частные производные по всем аргументам.



8. Существуют ли конечные частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}(0, 0)$, $\frac{\partial z}{\partial y}(0, 0)$ для функции $z = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}$? (Да, нет).

9. Что Вы можете сказать о дифференцируемости функции

$$z = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}$$

в точке на основании исследования, проведённого в предыдущей задаче.

Альтернативы для выбора ответа 1 – 3, где:

1) функция дифференцируема;

2) функция не дифференцируема;

3) на основании проведённого исследования о дифференцируемости функции ничего сказать нельзя.

10. Непрерывна ли функция $z = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}$ в точке $(0,0)$? (Да, нет).

11. Что Вы можете сказать о дифференцируемости функции

$$z = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}$$

в точке (0, 0) на основании исследования, проведённого в предыдущей задаче?

Альтернативы для выбора ответа 1 – 3, где:

1) функция дифференцируема;

2) функция не дифференцируема;

3) на основании проведённого исследования о дифференцируемости функции ничего сказать нельзя.

12. Существуют ли конечные частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}(0,0)$, $\frac{\partial z}{\partial y}(0,0)$ для функции $z = |x| + |y|$? (Да, нет).

13. Что Вы можете сказать о дифференцируемости функции $z = |x| + |y|$ в точке (0,0) на основании исследования, проведённого в предыдущей задаче?

Альтернативы для выбора ответа 1 – 3, где:

1) функция дифференцируема;

2) функция не дифференцируема;

3) на основании проведённого исследования о дифференцируемости функции ничего сказать нельзя.

3.6. Достаточные условия дифференцируемости

Если для функции одного аргумента существование производной в точке необходимо и достаточно для дифференцируемости функции в данной точке, то в случае функций многих переменных существование частных производных в некоторой точке является только необходимым условием её дифференцируемости в этой точке.

Теорема 3.6.1. *Если функция* $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *имеет частные производные по всем переменным в некоторой окрестности точки* M_0*, причём эти производные непрерывны в точке* M_0*, то функция* $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *дифференцируема в точке* M_0.

Пример 3.6.1. Найти множество точек плоскости, в которых функция $z = \ln(x^2 + y^2)$ дифференцируема.

Функция $z = \ln(x^2 + y^2)$ определена всюду, где $x^2 + y^2 > 0$, т. е. на всей плоскости $\boldsymbol{R}^2$, кроме точки (0, 0).

В каждой точке области определения функции существуют и непрерывны её частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2x}{x^2 + y^2}.$$

Отсюда по теореме 3.6.1 следует, что функция $z = \ln(x^2 + y^2)$ дифференцируема всюду, кроме точки (0, 0).

Замечание. Если в некоторой области D функция $z = f(x,y)$ имеет непрерывные производные, то она называется непрерывно дифференцируемой в этой области.

Пример 3.6.2. Показать, что функция $u = \sqrt[3]{x}\sin y$ имеет частные производные в точке $M_0(0, 0)$, дифференцируема в этой точке, но частные производные не являются непрерывными в точке $M_0(0, 0)$.

Поскольку $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{3}\frac{\sin y}{x^{\frac{2}{3}}}$ для $x \neq 0$, то найдём $\frac{\partial u}{\partial x}(0, 0)$ по определению. Так как $\Delta_x u = f(0 + \Delta x, 0) - f(0,0) = 0$, то $\frac{\partial u}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} = 0$.

Итак, $\frac{\partial u}{\partial x} = \begin{cases} \frac{1}{3}\frac{\sin y}{x^{\frac{2}{3}}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

Другая частная производная $\frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = \sqrt[3]{x}\cos y\Big|_{(0,0)} = 0$.

Теперь следует показать, что данная функция дифференцируема в точке $M_0(0, 0)$. Для этого найдём и проанализируем полное приращение функции в этой точке:

$$\Delta u(0,0) = f(0 + \Delta x, 0 + \Delta y) - f(0 \cdot 0) = \sqrt[3]{\Delta x}\sin \Delta y.$$

Далее следует ответить на вопрос, справедливо ли равенство $\sqrt[3]{\Delta x}\sin\Delta y = o(\rho)$, $\rho \to 0$. Найдём

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\sqrt[3]{\Delta x}\sin\Delta y}{\rho} = \begin{Bmatrix}\Delta x = \rho\cos\varphi \\ \Delta y = \rho\sin\varphi\end{Bmatrix} = \lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{\cos\varphi}\sin(\rho\sin\varphi)}{\rho} =$$

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{\cos\varphi}\cdot\cancel{\rho}\sin\varphi}{\cancel{\rho}} = 0.$$

Отсюда следует, что функция дифференцируема в точке M_0 (0, 0).

Исследуем непрерывность частных производных в точке M_0. Для этого найдём

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1}{3}\frac{\sin y}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3}\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{y}{x^{\frac{2}{3}}}.$$

При отыскании предела воспользовались тем, что $\sin y \sim y$ при $y \to 0$.

Пусть точка $M(x, y) \to M_0(0,0)$ по лучу $y = x$, тогда $\frac{y}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{x}{x^{\frac{2}{3}}} = x^{\frac{1}{3}} \to 0$. Пусть теперь $M(x, y) \to M_0(0,0)$ по лучу $x = 0$, тогда $\frac{y}{x^{\frac{2}{3}}} \to \infty$. Итак, предел $\frac{\partial u}{\partial x}$ в точке M_0 не существует.

Следовательно, $\frac{\partial u}{\partial x}$ не является непрерывной в этой точке. Другая частная производная $\frac{\partial u}{\partial y}$ непрерывна всюду на $\boldsymbol{R}$.

Из рассмотренного примера 3.6.2 следует, что в теореме 3.6.1 формулируются достаточные условия дифференцируемости функции, но не необходимые.

Задание 3.6

1. Укажите достаточное условие дифференцируемости функции $z = f(x,y)$ на множестве D.

Альтернативы для выбора ответа 1 – 3, где:

1) $z = f(x,y)$ непрерывна в D;

2) $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ существуют в D;

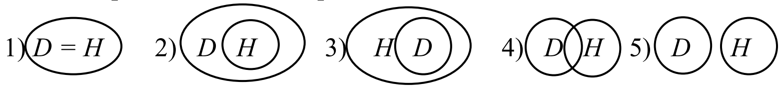
3) $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ непрерывны в D.

2. Постройте диаграмму взаимного расположения следующих множеств:

D – множество функций, дифференцируемых в области.

H – множество функций, имеющих непрерывные частные производные в области.

Альтернативы для выбора ответа 1 – 5, где:



3. Является ли всюду на $\boldsymbol{R}^2$ непрерывно дифференцируемой функция $z = \cos(ax - by)$? (Да, нет).

4. Будет ли всюду на $\boldsymbol{R}^2$ непрерывно дифференцируемой функция $z = \ln(x + y)$? (Да, нет).

5. Является ли всюду на $\boldsymbol{R}^2$ непрерывно дифференцируемой функция $z = \sqrt{x - y}$? (Да, нет).

3.7. Касательная плоскость и нормаль к графику функции

Пусть на множестве $D \subset \boldsymbol{R}^2$ задана непрерывная функция $z = f(x, y)$. График этой функции представляет собой поверхность S в $\boldsymbol{R}^3$.

Выберем точку $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \in S$.

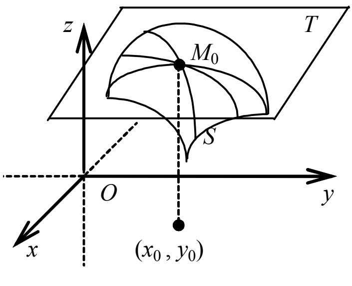


Рис. 21

Определение 3.7.1. *Касательной плоскостью T к поверхности S в точке M_0 называется плоскость, содержащая касательные ко всевозможным кривым, принадлежащим поверхности S и проходящим через точку M_0,* (рис. 21).

Определение 3.7.2. *Нормальной прямой N к поверхности S в точке M_0 называется прямая, перпендикулярная к касательной плоскости в точке M_0.*

Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке M_0, то существуют касательная плоскость и нормаль к её графику, уравнения которых имеют вид соответственно:

$$T: z - z_0 = \frac{\partial z}{\partial x}(M_0)(x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(M_0)(y - y_0),$$

$$N: \frac{x - x_0}{\frac{\partial z}{\partial x}(M_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial z}{\partial y}(M_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

Если функция $z = f(x, y)$ задана неявно уравнением $F(x, y, z) = 0$, то уравнения касательной плоскости и нормали в точке $M_0(x_0, y_o, z_0)$ имеют вид соответственно:

$$T: \frac{\partial F}{\partial x}(M_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(M_0)(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(M_0)(z - z_0) = 0,$$

$$N: \frac{x - x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}(M_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}(M_0)} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial F}{\partial z}(M_0)}.$$

Пример 3.7.1. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $S: z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ в точке $M_0(1, 1)$.

Для составления уравнений касательной плоскости и нормали требуются значения частных производных в точке M_0, поэтому находим

$$\frac{\partial z}{\partial x}(M_0) = \left.\frac{-x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}\right|_{(1,\,1)} = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(M_0) = \left.\frac{-y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}\right|_{(1,1)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Поскольку $z_0 = \sqrt{4 - 1 - 1} = \sqrt{2}$, то искомые уравнения имеют вид

$$T: z - \sqrt{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(x - 1) - \frac{1}{\sqrt{2}}(y - 1), \quad N: \frac{x - 1}{-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{y - 1}{-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{z - 1}{-1}.$$

Задание 3.7

1. Напишите уравнение касательной плоскости к графику функции $z = x^2 + y^2$ в точке (1, 2, 5).

2. Запишите уравнение нормали к графику функции $z = x^2 + y^2$ в точке (1, 2, 5).

3. В какой точке касательная плоскость к графику функции $z = 4 - x^2 - y^2$ параллельна плоскости *xoy*?

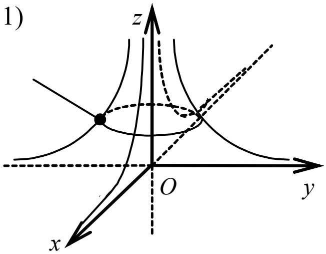
4. В какой точке касательная плоскость к графику функции $z = 4 - x^2 - y^2$ параллельна плоскости $2x + 2y + z = 0$?

5. Запишите канонические уравнения нормали к графику функции $z = z(x, y)$, определяемой уравнением $x^2 z + y^2 z = 4$ в точке (–2, 0, ?).

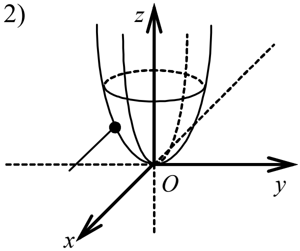
6. Постройте график функции $z = z(x, y)$, определяемой уравнением $x^2 z + y^2 z = 4$ и нормаль к ней в точке (–2, 0, 1).

Альтернативы для выбора ответа 1 – 2, где:

1)



2)



7. Запишите уравнение касательной плоскости к графику функции $z = z(x, y)$, определяемой уравнением $e^z - z + xy = 3$ в точке (2, 1, 0).

8. Запишите канонические уравнения нормали к графику функции $z = z(x, y)$ определяемой уравнением $e^z - z + xy = 3$ в точке (2, 1, 0).

9. Найдите точки, в которых касательная плоскость к графику непрерывной функции $z = z(x, y)$, определяемой уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 48$, параллельна плоскости $x + y - z = 0$.

10. Есть ли на графике непрерывной функции $z = z(x, y)$, определяемой уравнением $x^2 + y^2 = z^2$, точки, в которых нет ни касательной плоскости, ни нормали? Если есть, укажите их.

3.8. Дифференцирование сложной функции

Определение 3.8.1. *Говорят, что система вещественных функций*

$$\begin{cases} x_1 = x_1(t_1, t_2, \ldots, t_k), \\ x_2 = x_2(t_1, t_2, \ldots, t_k), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n = x_n(t_1, t_2, \ldots, t_k) \end{cases}$$

определяет отображение множества $T \subset \boldsymbol{R}^k$ в множество $X \subset \boldsymbol{R}^n$, если каждой точке множества T она сопоставляет точку множества X.

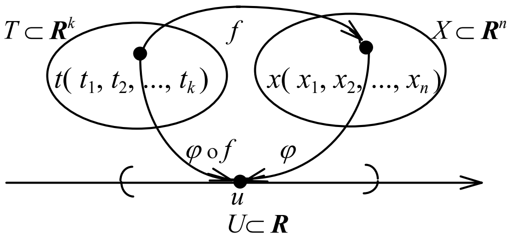
Рассмотрим два отображения:

1) $f : T \subset \boldsymbol{R}^k \xrightarrow{\text{на}} X \subset \boldsymbol{R}^n$, определяемое по формулам:

$$\begin{cases} x_1 = x_1(t_1, t_2, \ldots, t_k), \\ x_2 = x_2(t_1, t_2, \ldots, t_k), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n = x_n(t_1, t_2, \ldots, t_k); \end{cases}$$

2) $\varphi : X \subset \boldsymbol{R}^n \xrightarrow{\text{в}} U \subset \boldsymbol{R}$, заданное формулой

$$u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n):$$



Эти отображения определяют композицию

$$\varphi \circ f : T \subset \boldsymbol{R}^k \xrightarrow{\text{в}} U \subset \boldsymbol{R},$$

определяемую равенством

$$u = u(x_1(t_1, t_2, \ldots, t_k), x_2(t_1, t_2, \ldots, t_k), \ldots, x_n(t_1, t_2, \ldots, t_k)).$$

Теорема 3.8.1. *Пусть функции*

$$x_1 = x_1(t_1, t_2, \ldots, t_k),\ x_2 = x_2(t_1, t_2, \ldots, t_k),\ \ldots,\ x_n = x_n(t_1, t_2, \ldots, t_k)$$

дифференцируемы в точке $t(t_1, t_2, \ldots, t_k)$, а функция $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ дифференцируема в точке $x(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, соответствующей точке t при отображении f.

Тогда композиция функций

$$u = u\big(x_1(t_1, t_2, \ldots, t_k),\ x_2(t_1, t_2, \ldots, t_k), \ldots, x_n(t_1, t_2, \ldots, t_k)\big)$$

дифференцируема в точке t и её частные производные находятся по формулам

$$\frac{\partial u}{\partial t_i} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_i}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Пример 3.8.1. Найти частные производные функции $z = e^{x^2+y^2}$ по переменным u и v, если $x = uv$, $y = \dfrac{u}{v}$.

Применим формулу $\dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u}$.

Получим

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 2xe^{x^2+y^2} \cdot v + 2ye^{x^2+y^2}\left(-\frac{1}{v}\right) = 2e^{u^2\left(v^2+\frac{1}{v^2}\right)}\left(uv^2 - \frac{u^2}{v^2}\right).$$

Аналогично $\dfrac{\partial z}{\partial v} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v}$,

$$\frac{\partial z}{\partial v} = 2xe^{x^2+y^2} \cdot u + 2ye^{x^2+y^2}\left(-\frac{u}{v^2}\right) = 2e^{u^2\left(v^2+\frac{1}{v^2}\right)}\left(u^2 v - \frac{u^2}{v^3}\right).$$

Пример 3.8.2. Найти $\dfrac{dz}{dt}$ если $z = xy$, где $x = \ln\left(1 + t^2\right)$ и $y = \operatorname{arctg} t$.

Используем формулу $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}$.

Получим $\dfrac{dz}{dt} = y\dfrac{2t}{1+t^2} + x\dfrac{1}{1+t^2} = \dfrac{2t\operatorname{arctg} t}{1+t^2} + \dfrac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}$.

Пример 3.8.3. Выразить $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ через $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $z = z(x, y)$, $x = u^2 + v^2$, $y = u - v$.

По правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}, \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Так как $\dfrac{\partial x}{\partial u} = 2u$, $\dfrac{\partial x}{\partial v} = 2v$, $\dfrac{\partial y}{\partial u} = 1$, $\dfrac{\partial y}{\partial v} = -1$, то

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 2\frac{\partial z}{\partial x}u + \frac{\partial z}{\partial y}, \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = 2\frac{\partial z}{\partial x}v - \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Задание 3.8

1. Найдите $\dfrac{dz}{du}$, если $z = z(x, y)$, $x = \cos u$, $y = \sin u$.

Альтернативы для выбора ответа приведены после задачи 2.

2. Найдите $\dfrac{dz}{du}$, если $z = z(x, y)$, $x = \sin u$, $y = \cos u$.

Альтернативы для выбора ответа 1 – 4, где:

1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}\cos u + \dfrac{\partial z}{\partial y}\sin u$; 2) $-\dfrac{\partial z}{\partial x}\sin u + \dfrac{\partial z}{\partial y}\cos u$;

3) $\dfrac{\partial z}{\partial x}\cos u - \dfrac{\partial z}{\partial y}\sin u$; 4) $\dfrac{\partial z}{\partial x}\sin u + \dfrac{\partial z}{\partial y}\cos u$;

3. Найдите $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, если $z = \sqrt{xy}$;

4. Найдите $\dfrac{dz}{dx}$, если $z = \sqrt{xy}$ и $y = y(x)$.

Альтернативы для выбора ответов к задачам 3 – 4:

1) $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{y}{x}}$; 2) $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{x}{y}}$; 3) $\dfrac{y}{2\sqrt{xy}} + \dfrac{x}{2\sqrt{xy}}$; 4) $\dfrac{y}{2\sqrt{xy}} + \dfrac{x}{2\sqrt{xy}}\dfrac{dy}{dx}$.

5. Найдите $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, если $u = (xy)^z$.

6. Найти $\dfrac{du}{dx}$, если $u = (xy)^z$, $y = y(x)$, $z = z(x)$.

Альтернативы для выбора ответов к задачам 5 – 6:

1) $yz(xy)^{z-1}$; 2) $zx(xy)^{z-1}$; 3) $(xy)^z \ln(xy)$;

4) $(xy)^z \dfrac{dy}{dx} + (xy)^z \ln(xy)\dfrac{dz}{dx}$;

5) $(xy)^z + (xy)^z \dfrac{dy}{dx} + (xy)^z \ln(xy)\dfrac{dz}{dx}$;

6) $zy(xy)^{z-1} + zx(xy)^{z-1}\dfrac{dy}{dx} + (xy)^z \ln(xy)\dfrac{dz}{dx}$.

7. Дана функция $z = z(x, y)$, где $x = \sqrt{u} + \sqrt{v}$, $y = \sqrt{u+v}$. Найдите $\dfrac{\partial z}{\partial u}$.

Альтернативы для выбора ответа:

1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{v}} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{u+v}}$; 2) $\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{u+v}} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{u}}$;

3) $\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{u}} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{u+v}}$.

8. Выразить $\frac{\partial z}{\partial x}$ через $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ для функции $z = z(u,v)$, если $u = x + 2y$, $v = x - y$.

9. Выразить $\frac{\partial z}{\partial y}$ через $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$, если $z = z(u,v)$ и $u = x + 2y$, $v = x - y$.

Альтернативы для выбора ответов к задачам 8 – 9:

1) $2\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}$; 2) $2\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v}$;

3) $\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}$; 4) $\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v}$.

10. $z = z(u,v)$. Выразить $\frac{\partial z}{\partial x}$ через $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$, если $u = x \cdot y$, $v = \frac{y}{x}$.

11. $z = z(u,v)$. Выразить $\frac{\partial z}{\partial y}$ через $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$, если $u = x \cdot y$, $v = \frac{y}{x}$.

Альтернативы для выбора ответов к задачам 10 – 11:

1) $x\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial v}$; 2) $-\frac{y}{x^2}\frac{\partial z}{\partial v} + \frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial v}$;

3) $y\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial z}{\partial v}$; 4) $y\frac{\partial z}{\partial u} + x\frac{\partial z}{\partial u}$.

12. $z = z(u, v)$. Выразите $\frac{\partial z}{\partial x}$ через $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$, если $u = mx + ny$, $v = px + qy$.

13. $z = z(u, v)$. Выразите $\frac{\partial z}{\partial y}$ через $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$, если $u = mx + ny$, $v = px + qy$.

Альтернативы для выбора ответов к задачам 12 – 13:

1) $m\frac{\partial z}{\partial u} + n\frac{\partial z}{\partial v}$; 2) $n\frac{\partial z}{\partial u} + q\frac{\partial z}{\partial v}$;

3) $p\frac{\partial z}{\partial u} + q\frac{\partial z}{\partial v}$; 4) $m\frac{\partial z}{\partial u} + p\frac{\partial z}{\partial v}$.

14. $z = f(x, y)$, $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Найдите $\frac{\partial z}{\partial \rho}$.

15. $z = f(x, y)$, $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Найдите $\frac{\partial z}{\partial \varphi}$.

Альтернативы для выбора ответов к задачам 14 – 15:

1) $\cos\varphi + \sin\varphi$; 2) $\frac{\partial f}{\partial x}(-\rho\sin\varphi) + \frac{\partial f}{\partial y}\rho\cos\varphi$;

3) $\frac{\partial f}{\partial x}(-\rho\sin\varphi) + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi$; 4) $\frac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial f}{\partial y}\rho\cos\varphi$;

5) $\frac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi$; 6) $-\rho\sin\varphi + \rho\cos\varphi$.

16. Найдите $\frac{dz}{dx}$, если $z = xy'$, где $y = y(x)$.

Альтернативы для выбора ответа:

1) y'; 2) $x + y''$; 3) $y' + xy''$.

4. СКАЛЯРНОЕ ПОЛЕ

4.1. Поверхности и линии уровня

Определение 4.1.1. *Если каждой точке M некоторой области G поставлено в соответствие число u, то говорят, что в области G задано скалярное поле u = u(M).*

Примеры скалярных полей:

T = *T*(*M*) – поле температур;

m = *m*(*M*) – поле плотности масс;

Q = *Q*(*M*) – поле плотности зарядов.

Определение 4.1.2. *Поверхность* (*линия*), *в точках которой поле принимает постоянное значение, называется поверхностью* (*линией*) *уровня скалярного поля.*

Очевидно, что семейство поверхностей (линий) уровня может быть задано уравнением *u*(*M*) = *C* (*C* – const).

Пример 4.1.1. Найти семейство линий уровня скалярного поля $u = e^{\frac{2x}{x^2+y^2}}$. Изобразить линию уровня $u(x, y) = e$.

В соответствии с определением семейства линий уровня имеем $e^{\frac{2x}{x^2+y^2}} = C(C > 0)$. Откуда $\frac{2x}{x^2 + y^2} = \ln C$, $x^2 + y^2 \neq 0$.

Обозначим ln*C* = *a*, тогда

$$a(x^2 + y^2) - 2x = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - \frac{2x}{a} = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{a}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{a^2}.$$

Откуда заключаем, что семейство линий уровня данного поля представляет семейство окружностей при $C > 0$ и $C \neq 1$. При $C = 1$ линией уровня является ось Oy без точки $O(0, 0)$.

Выберем из семейства линий уровня линию, удовлетворяющую условию $u(x, y) = e$.

Получим

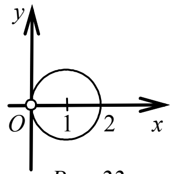


Рис. 22

$$e^{\frac{2x}{x^2+y^2}} = e \Leftrightarrow \frac{2x}{x^2+y^2} = 1 \Rightarrow 2x = x^2 + y^2 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)^2 + y^2 = 1\,.$$

Построим эту линию, (рис.22).

Задание 4.1

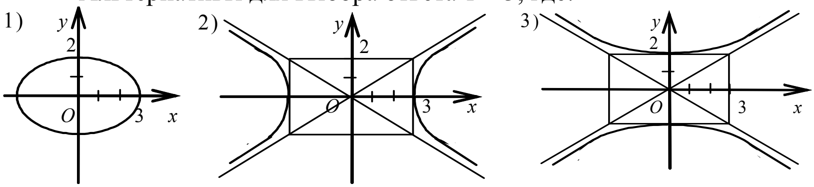
1. Могут ли пересекаться разные линии уровня плоского скалярного поля? (Да, нет).

2. Могут ли касаться в некоторой точке различные поверхности уровня пространственного скалярного поля? (Да, нет).

3. Что представляют собой поверхности уровня скалярного поля $u = x^2 + y^2 + z^2$?

4. Запишите уравнение семейства линий уровня скалярного поля, определяемого функцией $z = \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4}$, и постройте линию, соответствующую $z = -1$.

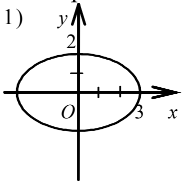
Альтернативы для выбора ответа 1 – 3, где:



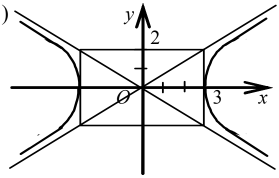
5. Запишите уравнение семейства линий уровня скалярного поля, определяемого функцией $z = \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4}$, и постройте линию, соответствующую $z = 0$.

Альтернативы для выбора ответа 1 – 4, где:

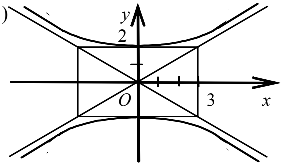
1)



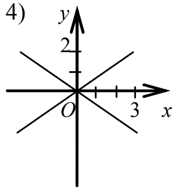
2)



3)



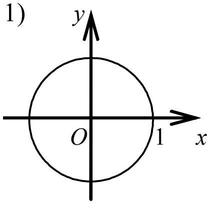
4)



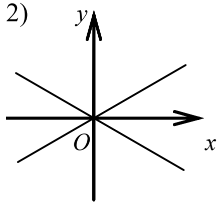
6. Запишите уравнение семейства линий уровня скалярного поля, определяемого функцией $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$. Постройте линию уровня, отвечающую $z = -1$.

Альтернативы для выбора ответа 1 – 3, где:

1)



2)

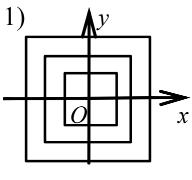


3) Такой линии не существует.

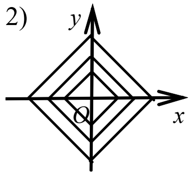
7. Постройте линии уровня скалярного поля, определяемого функцией $z = |x| + |y|$.

Альтернативы для выбора ответа 1 – 3, где:

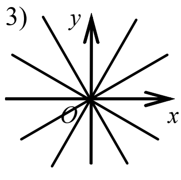
1)



2)

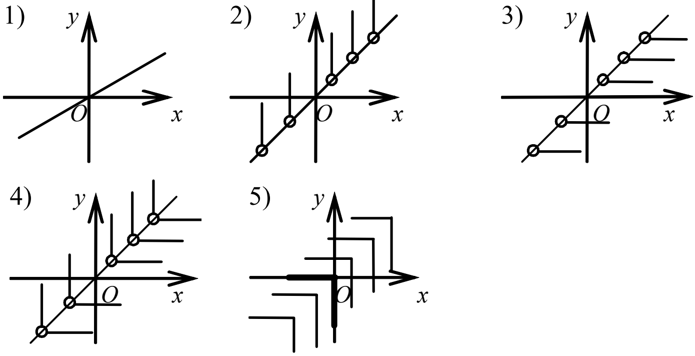


3)



8. Постройте линии уровня скалярного поля, определяемого функцией $z = \max\{x, y\}$.

Альтернативы для выбора ответа 1 – 5, где:



4.2. Производная по направлению

Пусть в области G задано скалярное поле $u = u(M)$.

Пусть M_0 – фиксированная точка из G и M – любая другая точка из G. Обозначим через $\vec{l}$ орт вектора $\overline{M_0M}$, а через

$$M_0M = \begin{cases} \left|\overline{M_0, M}\right|, & \text{если } \overline{M_0M} \uparrow\uparrow \bar{l}, \\ -\left|\overline{M_0, M}\right|, & \text{если } \overline{M_0M} \uparrow\downarrow \bar{l}. \end{cases}$$

Определение 4.2.1. *Производной скалярного поля $u(M)$ в точке M_0 по направлению $\vec{l}$ называется число* $\lim\limits_{M \to M_0} \dfrac{u(M) - u(M_0)}{M_0M}$.

Принято следующее обозначение производной по направлению:

$$\lim_{M \to M_0} \frac{u(M) - u(M_0)}{M_0M} = \frac{\partial u}{\partial l}(M_0).$$

Теорема о вычислении производной по направлению. *Если* $\bar{l} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ *и* $u = u(M)$ дифференцируема в точке M_0, то

$$\frac{\partial u}{\partial l}(M_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(M_0)\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0)\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}(M_0)\cos\gamma .$$

Пример 4.2.1. Найти производную скалярного поля $u = x^2 + y^2$ в точке $M_0(1, 1)$ в направлении вектора $\bar{l} = \{1, 1\}$.

Имея в виду вычислительную формулу для производной по направлению, найдём частные производные функции $u = x^2 + y^2$ в точке M_0:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\left(M_0\right)=2x\Big|_{(1,\,1)}=2\,,\qquad \frac{\partial u}{\partial y}\left(M_0\right)=2y\Big|_{(1,\,1)}=2\,.$$

Далее найдём направляющие косинусы вектора $\bar{l}$:

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\,,\quad \cos\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Наконец, $\frac{\partial u}{\partial l}\left(M_0\right)=2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}\,.$

Задание 4.2

1. Вспомните, как находится орт (единичный вектор) вектора $\bar{a}=a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k}$.

Альтернативы для выбора ответа 1 – 3, где:

1) $\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$;

2)

$$\left\{\frac{a_x}{\sqrt{(a_x)^2+(a_y)^2+(a_z)^2}},\frac{a_y}{\sqrt{(a_x)^2+(a_y)^2+(a_z)^2}},\frac{a_z}{\sqrt{(a_x)^2+(a_y)^2+(a_z)^2}}\right\};$$

3) $\left\{\frac{a_x}{\sqrt{a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k}}},\ \frac{a_y}{\sqrt{a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k}}},\frac{a_z}{\sqrt{a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k}}}\right\}.$

2. Найдите орт вектора $\overline{MN}$, если $M\,(1, –1, 3)$, $N\,(0, 1, 1)$.

3. Найдите орт вектора, образующего равные острые углы с осями координат.

4. Найдите в точке $A\,(3, 1)$ производную функции $u=x^2+y^2+xy$ в направлении от точки A (3, 1) к точке B (6, 5).

5. Найдите в точке $M\,(1,-1,3)$ производную от функции $u=xy^2z^3$ в направлении от точки $M\,(1,-1,3)$ к точке $N\,(0, 1, 1)$.

6 Найдите производную $\frac{\partial u}{\partial l}$ в точке $A\,(1,\ 1,\ 1)$ от функции $u = xyz$ в направлении, составляющем с осями координат равные острые углы.

7. Чему равна производная по направлению от функции $z = f(x, y)$ вдоль некоторой её линии уровня?

8. Нельзя ли определить, чему равна производная $\frac{\partial z}{\partial l}$ от функции в точке (0, 0)? (Да, нет).

9. Функция $u = f(x, y, z)$**,** определяющая скалярное поле, не дифференцируема в точке $M(x, y, z)$. Можно ли утверждать, что производная этой функции в точке $M(x, y, z)$ вдоль любого направления l не существует? (Да, нет).

10. Может ли производная $\frac{\partial u}{\partial l}$ функции $u = f(x, y, z)$ принимать одно и то же значение вдоль любого направления l ? (Да, нет).

4.3. Градиент и его свойства

Определение 4.3.1. *Градиентом скалярного поля* $u = u(x, y, z)$ *в точке* M_0 *называется вектор*

$$\overline{\text{grad}u}(M_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(M_0)\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0)\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}(M_0)\bar{k} \ .$$

Градиент в данной точке M_0 указывает направление наискорейшего изменения поля в этой точке, а $\left|\overline{\text{grad}u}(M_0)\right|$ есть наибольшая скорость изменения поля в точке M_0.

Градиент в данной точке M_0 связан с производной по направлению формулой $\frac{\partial u}{\partial l}(M_0) = \left(\overline{\text{grad}u}(M_0), \bar{l}\right)$.

Наконец, градиент в точке M_0 направлен по нормали к поверхности уровня, проходящей через точку M_0.

Пример 4.3.1. Указать направление наискорейшего изменения поля $u = \min\{x, y\}$ в точке $M_0(2, 1)$, найти максимальную скорость изменения поля в этой точке.

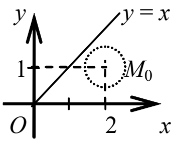


Рис. 23

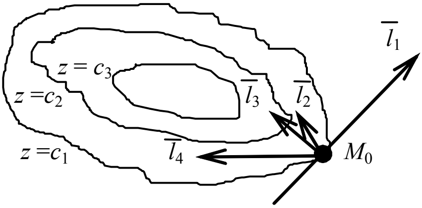
Сначала уточним аналитическое выражение функции для некоторой окрестности, содержащей точку $M_0(2, 1)$ (рис. 23). Так как $\min(x, y) = y$ для выбранной окрестности, то

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0\,,\ \frac{\partial u}{\partial y} = 1\,,\ \overline{\text{grad}u}(M_0) = j \ \text{ и}$$

$$\max\frac{\partial u}{\partial l}(M_0) = \left|\overline{\text{grad}u}(M_0)\right| = \left|\bar{j}\right| = 1\,.$$

Задание 4.3

1. Пусть $z = f(x, y)$ – высота от подножия горы,
$f(x, y) = C$ – линии уровня,
M_0 – фиксированная точка .
В каком направлении, по Вашему мнению, круче подъём?



Альтернативы для выбора ответа 1 – 4, где:

1) в направлении касательной $\bar{l}_1$ к линии уровня в точке M_0;

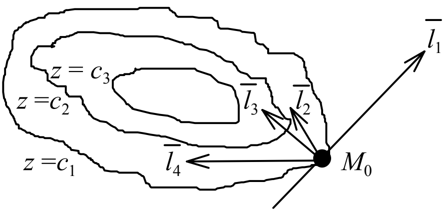
2) в направлении нормали $\bar{l}_3$ к линии уровня в точке M_0;

3) в направлении $\bar{l}_2$;

4) в направлении $\bar{l}_4$.

2. Пусть $f(x, y) =$ const – линия уровня функции $z = f(x, y)$ и M_0 есть фиксированная точка на линии уровня.

В каком направлении функция $z = f(x, y)$ имеет наибольшую скорость изменения?



Альтернативы для выбора ответа 1 – 4, где:

1) в направлении касательной $\bar{l}_1$ к линии уровня в точке M_0;

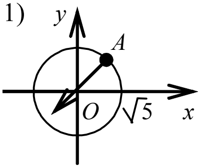
2) в направлении нормали $\bar{l}_3$ к линии уровня в точке M_0;

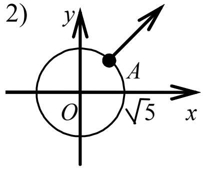
3) в направлении $\bar{l}_2$;

4) в направлении $\bar{l}_4$.

3. Постройте линию уровня и $\overline{\text{grad}z}$ для функции $z = 4 - x^2 - y^2$ в точке $A(1, 2)$.

Альтернативы для выбора ответа 1 – 2, где:

1) 

2) 

4. Найдите вектор, в направлении которого скорость изменения скалярного поля, определяемого функцией $z = \ln(x + 2y)$, в точке $M_0(1, 2)$ будет наибольшей.

5. Найдите наибольшую крутизну ($\operatorname{tg} \varphi$) подъёма поверхности, определяемой уравнением $z = x \cdot y$, в точке (1, 1).

6. Найдите единичный вектор нормали к эллипсу $s:\ 2x^2 + y^2 = 1$ в точке (2,0).

7. Как Вы думаете, может ли градиент скалярного поля не зависеть от выбора точки поля? (Да, нет).

8. Функция $z = f(x, y)$, определяющая скалярное поле, не дифференцируема в точке $M(x, y)$. Можно ли утверждать, что градиент скалярного поля не определён в этой точке?

Альтернативы для выбора ответа 1 – 3, где:

1) да, градиент в этой точке не определён;

2) градиент определён несмотря на то, что функция не дифференцируема;

3) о существовании градиента ничего сказать нельзя.

9. Функция $z = f(x, y)$ имеет градиент в точке $M(x, y)$. Можно ли утверждать, что функция дифференцируема в этой точке?

Альтернативы для выбора ответа 1 – 3, где:

1) функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке M;

2) функция не дифференцируема в этой точке;

3) о дифференцируемости функции в этой точке ничего сказать нельзя.

10. Найти производную от функции $u = 2x^2 + 3y^2$ в точке $P(1, 1)$ в направлении градиента.

Альтернативы для выбора ответа 1 – 4, где:

1) $\dfrac{\partial u}{\partial l} = (4x + 6y)\Big|_p = 10$;

2) $\dfrac{\partial u}{\partial l} = 4xi + 6yj\Big|_p = 4i + 6j$;

3) $\dfrac{\partial u}{\partial l} = \sqrt{(4x)^2 + (6y)^2}\Big|_p = \sqrt{52}$;

4) правильный ответ не указан.

11. Найти в произвольной точке производную от функции $z = x^2 + y^2 + xy$ в направлении $\overline{AB}$ где $A(3, 1)$, $B(6, 5)$.

Альтернативы для выбора ответа 1 – 3, где:

1) $\frac{1}{5}(10x + 11y)$; 2) $(2x + y)\cdot 3 + (2y + x)\cdot 4$; 3) $3x + 3y$.

12. Найти наибольшую скорость изменения скалярного поля $z = x^2 + y^2 + xy$ в точке $A(3,1)$.

5. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

5.1. Производные и дифференциалы высших порядков

Пусть функция $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеет частную производную первого порядка $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ в некоторой окрестности точки M_0. Если $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ имеет частную производную по x_k в точке M_0, то она называется частной производной второго порядка по аргументам x_i и x_k в точке M_0.

Принято обозначение $\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i}(M_0)$.

Если $i \neq k$, то частная производная называется смешанной. Подобным же образом определяются частные производные 3-го, 4-го, ..., n-го порядков. Имеет место следующая теорема.

Теорема 5.1.1 (о равенстве смешанных частных производных.) *Если в некоторой окрестности точки M_0 функция $u = f(x, y)$ имеет смешанные частные производные $f''_{xy}(x, y)$ и $f''_{yx}(x, y)$ и эти производные непрерывны в точке M_0, то они равны в этой точке*

$$f''_{xy}(M_0) = f''_{yx}(M_0).$$

Пример 5.1.1. Найти все частные производные 2-го порядка от функции $z = \sin xy$,

Сначала найдём частные производные 1-го порядка

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y\cos xy \text{ и } \frac{\partial z}{\partial y} = x\cos xy .$$

Далее в соответствии с определением частных производных высших порядков имеем

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(y\cos xy\right)=-y^2\sin xy\,,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(y\cos xy\right)=\cos xy-xy\sin xy\,,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(x\cos xy\right)=\cos xy-xy\sin xy\,.$$

Замечаем, что $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ всюду на $\boldsymbol{R}^2$, что объясняется непрерывностью смешанных частных производных данной функции в силу их элементарности на $\boldsymbol{R}^2$. Наконец,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(x\cos xy\right)=-x^2\sin xy\,.$$

Пусть функция $u=(x,\,y)$ имеет дифференциал в точке $M(x,y)$

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)dx+\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)dy\,.$$

Пусть при этом $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y)$ и $\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y)$ – дифференцируемые функции.

Определение 5.1.1. *Вторым дифференциалом функции* $u(x,\,y)$ *в точке* $M(x,y)$ *называется дифференциал от дифференциала первого порядка при условиях:*

1) *в дифференциале первого порядка* dx *и* dy *являются постоянными приращениями;*

2) *при отыскании дифференциалов от* $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y)$ *и* $\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y)$ *приращения независимых переменных* x *и* y *берутся равными* dx *и* dy *соответственно.*

То есть

$$d^2u=d(du)=d\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy\right)=$$

$$d\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx+\frac{\partial u}{\partial x}d(dx)+d\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)dy+\frac{\partial u}{\partial y}d(dy)=$$

$$=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx+\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}dy\right)dx+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}dx+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy\right)dy=$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2\text{, т. к. } d(dx)=d(dy)=0\,.$$

Итак, $d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2$.

Аналогично определяется дифференциал третьего порядка $d^3u = d\left(d^2u\right)$ и далее по индукции дифференциал порядка n

$$d^n u = d\left(d^{n-1}u\right).$$

Определение 5.1.2. *Оператором дифференциала первого порядка назовём символ*

$$d = \frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy,$$

действие которого на функцию $u(x, y)$ *определяется по формуле*

$$du = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)u = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

Таким же образом вводится оператор дифференциала второго порядка

$$d^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2,$$

с помощью которого дифференциал 2-го порядка находится по формуле

$$d^2u = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2.$$

Наконец, дифференциал порядка n также может быть записан с помощью оператора дифференциала порядка n в виде

$$d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n u.$$

Пример 5.1.2. Найти d^2u, если $u = x^2y^3$.

Пример можно решить двумя способами:

а) по формуле $d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2$.

Для этого найдём все частные производные 2-го порядка:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy^3, \ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2y^3, \ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 6xy^2, \ \frac{\partial u}{\partial y} = 3x^2y^2, \ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6x^2y.$$

Тогда $d^2u = 2y^3dx^2 + 12xy^2dxdy + 6x^2ydy^2$.

б) По определению $d^2u = d(du)$.

Имеем $du = 2xy^3dx + 3x^2y^2dy$.

$$d^2u = d(du) = d\left(2xy^3dx + 3x^2y^2dy\right) = d\left(2xy^3\right)dx + d\left(3x^2y^2\right)dy =$$
$$= \left(2y^3dx + 6xy^2dy\right)dx + \left(6xy^2dx + 6x^2ydy\right)dy =$$
$$2y^3dx^2 + 12xy^2dxdy + 6x^2ydy^2 .$$

Задание 5.1

1. Для функции $z = x^4y^3$ найдите:

1.1. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$. **1.2.** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$. **1.3.** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

Альтернативы для выбора ответов к задачам 1.1 – 1.3:

1) $4x^3y^3$; 2) $12x^2y^3$; 3) $3x^4y^2$; 4) $12x^3y^2$; 5) $6x^4y$.

2. Для функции $z = \sin(2x + 3y)$ найдите:

2.1. $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}$. **2.2.** $\dfrac{\partial^3 z}{\partial y^2\,\partial x}$. **2.3.** $\dfrac{\partial^3 z}{\partial y\,\partial x^2}$.

Альтернативы для выбора ответов к задачам 2.1 – 2.3:

1) –6sin $(2x + 3y)$; 2) –18 cos $(2x + 3y)$; 3) –12 cos $(2x + 3y)$;
4) 2 cos $(2x + 3y)$; 5) 4 cos $(2x + 3y)$; 6) –6cos $(2x + 3y)$.

3. Справедливо ли равенство $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2\,\partial y\,\partial z} = \dfrac{\partial^4 u}{\partial x\;\partial z\,\partial y\,\partial x}$ для функции $u = xz + e^{yz} + y$? (Да, нет).

4. Какие из функций 1 – 3 удовлетворяют уравнению $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$?

Укажите все правильные высказывания из 1 – 3, где:

1) $u(x, y) = \mathrm{const}$; 2) $u(x, y) = \varphi_1(x) + \varphi_2(y)$;

3) $u(x, y) = 2x + 6y$.

5. Какие из функций удовлетворяют уравнению $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$?

Укажите все правильные высказывания из 1 – 3, где:

1) $u(x, y) = \mathrm{const}$;

2) $u(x, y) = C_1x + C_2$, где C_1 и C_2 – константы;

3) $u(x, y) = \varphi_1(y)x + \varphi_2(y)$.

6. $f(x,y,z)=xy^2+yz^2+zx^2$. Найдите:

6.1. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ (0,0,1). **6.2.** $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}$ (1,0,2). **6.3.** $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}$ (2, 0, 1).

7. Найдите d^2z, если $z=e^{xy}$.
Альтернативы для выбора ответа 1 – 2, где:
1) $e^{xy}\left(dx^2+2dxdy+dy^2\right)$;
2) $e^{xy}\left(y^2dx^2+2(xy+1)dxdy+x^2dy^2\right)$.

8. Найдите d^2u, если $u=xyz$.
Альтернативы для выбора ответа 1 – 3, где:
1) $d^2u=2(zdxdy+xdydz+ydxdz)$; 2) $d^2u=0$;
3) $d^2u=yz(dx)^2+xz(dy)^2+xy(dz)^2$.

9. Найдите d^2z, если $z=z(u,v)$, $u=ax$, $v=by$.
Альтернативы для выбора ответа 1 – 2, где:
1) $d^2z=\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}dx^2+2\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}dxdy+\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}dy^2$;
2) $d^2z=a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}dx^2+2ab\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}dxdy+b^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}dy^2$.

10. $z=z(u,v)$, $u=x+y$, $v=x-y$. Найдите:

10.1. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$. **10.2.** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$. **10.3.** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

Альтернативы для выбора ответов к задачам 10.1 – 10,3:
1) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}-2\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}$; 2) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}$; 3) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}$;
4) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}$; 5) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}$; 6) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}$;
7) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}$.

11. $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$**.** Справедливо ли равенство

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

в области определения функции? (Да, нет).

12. $z = e^x \cos y$**.** Справедливо ли равенство $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$? (Да, нет).

5.2. Представление по формуле Тейлора функции нескольких переменных

Теорема 5.2.1. *Если функция* $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $n+1$ *раз дифференцируема в некоторой окрестности точки* $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, *то для любой точки* $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *из этой окрестности справедливо равенство*

$$f(M) = f(M_0) + df(M_0) + \frac{1}{2!}d^2 f(M_0) + \ldots + \frac{1}{n!}d^{(n)} f(M_0) + R_{n+1}, \qquad (5.2.1)$$

где $R_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1} f(N)$ *– остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа, здесь* N *– некоторая точка, принадлежащая отрезку* $M_0 M$. *Возможна другая форма остаточного члена* $R_{n+1} = o(\rho^n)$, где $\rho = \rho(M_0, M)$, *называемая* ***формой Пеано***.

Выражение (5.2.1) называется ***формулой Тейлора порядка n*** для функции $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в точке M_0.

Пример 5.2.1. Разложить по формуле Тейлора функцию $u = x^y$ с центром в точке $M_0(1, 1)$ до членов 2-го порядка включительно с остаточным членом в форме Пеано.

Для разложения функции по формуле Тейлора указанного порядка потребуются следующие величины: $f(M_0)$, $du(M_0)$, $d^2u(M_0)$ и R_3.

Найдём их.

1) $f(M_0) = x^y\big|_{(1,1)} = 1$;

2) 2) $du_{(M_0)} = \left(yx^{y-1}dx + x^y \ln x dy\right)\big|_{(1,1)} = dx$;

3) $d^2u(M_0) = d\left(yx^{y-1}dx + x^y \ln x dy\right)\big|_{(1,1)} =$

$$= \left(d\left(y \cdot x^{y-1}\right)dx + d\left(x^y \cdot \ln x\right)dy\right)_{(1,1)} =$$

$$= \Big\{\left[x^{y-2} \cdot y(y-1)dx + \left(x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x\right)dy\right] dx +$$

$$+ \left[\left(yx^{y-1}\ln x + x^{y-1}\right)dx + x^y \ln^2 x dy\right] dy\Big\}\Big|_{(1,1)} = 2dxdy \ ;$$

4) $R_3 = \mathrm{o}\left(\rho^2\right) = \mathrm{o}\left((x-1)^2 + (y-1)^2\right)$.

Теперь запишем требуемую формулу с учётом того, что

$$dx = \Delta x = x - 1\,, \quad dy = \Delta y = y - 1;$$

$$x^y = 1 + (x-1) + (x-1)(y-1) + R_3\,.$$

Задание 5.2

1. Для функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ записана формула Тейлора.

Какой член разложения имеет вид

$$\frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3 f(M_0)}{\partial x^3}\Delta x^3 + 3\frac{\partial^3 f(M_0)}{\partial x^2 \partial y}\Delta x^2 \Delta y + 3\frac{\partial^3 f(M_0)}{\partial x \partial y^2}\Delta x \Delta y^2 + \frac{\partial^3 f(M_0)}{\partial y^3}\Delta y^3\right)?$$

Альтернативы для выбора ответа 1 – 4, где:

1) $\frac{1}{6} d^6 f(x_0, y_0)$, $\quad \Delta x = x,\ \Delta y = y$;

2) $\frac{1}{3!} d^3 f(x_0, y_0)$, $\Delta x = x,\ \Delta y = y$;

3) $\frac{1}{3!} d^3 f(x_0, y_0)$, $\Delta x = x - x_0,\ \Delta y = y - y_0$;

4) $\frac{1}{3!} d^2 f(x_0, y_0)$, $\quad \Delta x = x - x_0,\ \Delta y = y - y_0$.

2. Запишите $d^2 f(3, 1)$ для $z = f(x, y)$.

Альтернативы для выбора ответа 1 – 4, где:

1) $d^2 f(3,1) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dxdy$;

2) $d^2 f(3,1) = \frac{\partial^2 f(3,1)}{\partial x^2} x^2 + 2\frac{\partial^2 f(3,1)}{\partial x \partial y} x \cdot y + \frac{\partial^2 f(3,1)}{\partial y^2} y^2$;

3) $d^2 f(3,1) = \frac{\partial^2 f(3,1)}{\partial x^2} \cdot 3^2 + 2\frac{\partial^2 f(3,1)}{\partial x \partial y} 3 \cdot 1 + \frac{\partial^2 f(3,1)}{\partial y^2} 1^2$;

4)

$$d^2 f(3,1) = \frac{\partial^2 f(3,1)}{\partial x^2}(x-3)^2 + 2\frac{\partial^2 f(3,1)}{\partial x \partial y}(x-3)(y-1) + \frac{\partial^2 f(3,1)}{\partial y^2}(y-1)^2\,.$$

3. Функция $z = f(x, y)$ представлена по формуле Тейлора в окрестности точки (x_0, y_0). Какому члену этой формулы соответствует слагаемое вида $A(x - x_0)^5 (y - y_0)$? Чему равен коэффициент A?

Альтернативы для выбора ответа 1 – 4, где:

1) $\frac{1}{6!}d^6 f(x_0, y_0)$, $A = \frac{1}{6!}\dfrac{\partial^6 f(x_0, y_0)}{\partial x^5 \partial y}$;

2) $\frac{1}{5!}d^5 f(x_0, y_0)$, $A = \frac{1}{5!}\dfrac{\partial^5 f(x_0, y_0)}{\partial x^5}$;

3) $d^6 f(x_0, y_0)$, $A = \dfrac{\partial^6 f(x_0, y_0)}{\partial x^5 \partial y}$;

4) $\frac{1}{6!}d^6 f(x_0, y_0)$, $A = \frac{1}{6!}\dfrac{\partial^6 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y^5}$.

4. Запишите разложение функции $z = f(x, y)$ по формуле Тейлора в окрестности точки (x_0, y_0) до членов третьего порядка включительно (без остаточного члена).

Альтернативы для выбора ответа 1 – 4, где:

1) $$f(x_0, y_0) + \left[\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0)\right] +$$
$$+\left[\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}(x - x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}(y - y_0)^2\right] +$$
$$\left[\frac{\partial^3 f(x_0, y_0)}{\partial x^3}(x - x_0)^3 +\right.$$
$$+3\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2 \partial y}(x - x_0)^2(y - y_0) + 3\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y^2}(x - x_0)(y - y_0)^2 +$$
$$\left.+\frac{\partial^3 f(x_0, y_0)}{\partial y^3}(y - y_0)^3\right];$$

2) $$f(x_0, y_0) + \left[\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0)\right] +$$
$$+\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}(x - x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}(x - x_0)(y - y_0) +\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}(y - y_0)^2\right] + \frac{1}{3!}\left[\frac{\partial^3 f(x_0, y_0)}{\partial x^3}(x - x_0)^3 +\right.$$
$$+3\frac{\partial^3 f(x_0, y_0)}{\partial x^2 \partial y}(x - x_0)^2(y - y_0) + 3\frac{\partial^3 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y^2}(x - x_0)(y - y_0)^2 +$$

$$+\frac{\partial^3 f(x_0,y_0)}{\partial y^3}(y-y_0)^3\Bigg];$$

3) $$f(x_0,y_0)+\left[\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}x+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}y\right]+$$

$$+\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}x^2+2\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}xy+\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}y^2\right]+$$

$$+\frac{1}{3!}\left[\frac{\partial^3 f(x_0,y_0)}{\partial x^3}x^3+3\frac{\partial^3 f(x_0,y_0)}{\partial x^2\partial y}x^2y+3\frac{\partial^3 f(x_0,y_0)}{\partial x dy^2}xy^2+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^3}(y-y_0)^3\right];$$

4) $$f(x_0,y_0)+\left[\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)\right]+$$

$$+\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}(x-x_0)^2+\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}(y-y_0)^2\right]+$$

$$+\frac{1}{3!}\left[\frac{\partial^3 f(x_0,y_0)}{\partial x^3}(x-x_0)^3+\frac{\partial^3 f(x_0,y_0)}{\partial y^3}(y-y_0)^3\right].$$

5. Может ли в разложении функции $z=f(x, y)$ по формуле Тейлора содержаться слагаемое вида $A\cdot\frac{\partial^4 f(-3,1)}{\partial x^2\partial y}(x-3)^2(y-1)^3$? (Да, нет).

6. Может ли в разложении функции $z=f(x, y)$ по формуле Тейлора содержаться слагаемое вида $A\cdot\frac{\partial^5 f(1,-1)}{\partial x^3\partial y^2}x^3y^2$? (Да, нет).

7. Как Вы думаете, членами какого порядка заканчивается разложение по формуле Тейлора функции $z=x^3+y^3-3xy$ в окрестности точки $M_0(1,1)$?

Альтернативы для выбора ответа 1 – 5, где:

1) первого; 2) второго; 3) третьего; 4) четвёртого;

5) правильный ответ не указан.

8. Если функцию $z=f(x, y)$ представили формулой Тейлора в окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$, ограничиваясь членами 1-го порядка, то какой поверхностью заменили поверхность s: $z=f(x, y)$ в окрестности этой точки?

Альтернативы для выбора ответа 1 – 2, где:

1) поверхностью второго порядка; 2) плоскостью.

9. Функцию $z = x^5 - y^5 x + x^3 y^3$ требуется представить формулой Тейлора в окрестности некоторой точки $M_0(x_0, y_0)$. Для какого n R_{n+1} равен нулю в любой точке?

10. Запишите по формуле Тейлора разложение функции $z = e^{x+y}$ по степеням x и y до членов третьего порядка включительно.

Альтернативы для выбора ответа 1 – 4, где:

1) $1 + e^{x+y}(dx + dy) + e^{x+y}\left(dx^2 + 2dxdy + dy^2\right) +$
$+ e^{x+y}\left(dx^3 + 3dx^2dy + 3dxdy^2 + dy^3\right) + R_4$;

2) $1 + e^{x+y}(dx + dy) + \frac{1}{2!}e^{x+y}\left(dx^2 + 2dxdy + dy^2\right) +$
$+ \frac{1}{3!}e^{x+y}\left(dx^3 + 3dx^2dy + 3dxdy^2 + dy^3\right) + R_4$;

3) $1 + (dx + dy) + \frac{1}{2!}\left(dx^2 + 2dxdy + dy^2\right) +$
$+ \frac{1}{3!}\left(dx^3 + 3dx^2dy + 3dxdy^2 + dy^3\right) + R_4$;

4) $1 + (x + y) + \frac{1}{2!}\left(x^2 + 2xy + y^2\right) + \frac{1}{3!}\left(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3\right) + R_4$.

11. Запишите разложение функции $z = \cos(x + y)$ в окрестности начала координат по формуле Тейлора до членов второго порядка включительно (без остаточного члена).

Альтернативы для выбора ответа 1 – 5, где:

1) $0 + R_3$;

2) $-\frac{1}{2!}\left(x^2 + 2xy + y^2\right) + R_3$;

3) $1 - \frac{1}{2!}\left(x^2 + 2xy + y^2\right) + R_3$;

4) $1 - \cos(x + y)dx^2 - 2\cos(x + y)dxdy - \cos(x + y)dy^2 + R_3$;

5) $1 - \frac{1}{2!}\left[\cos(x + y)x^2 + 2\cos(x + y)xy + \cos(x + y)y^2\right] + R_3$.

12. Запишите разложение функции $z = x^3 + 3x^2y - 2y^3$ по формуле Тейлора в окрестности точки $M_0(2, 1)$, ограничиваясь членами второго порядка.

Альтернативы для выбора ответа 1 – 3, где:

1) $18 + \left[\left(3x^2 + 6xy\right)dx + \left(3x^2 - 6y^2\right)dy\right] +$
$+ \left[(6x + 6y)dx^2 + 12xdxdy - 12ydy^2\right] + R_3$;

2) $18 + (24dx + 6dy) + \frac{1}{2!}\left[18dx^2 + 12dxdy - 12dy^2\right] + R_3$;

3) $18 + [24(x-2) + 6(y-1)] +$

$$+\frac{1}{2!}\left[18(x-2)^2 + 24(x-2)(y-1) - 12(y-1)^2\right] + R_3.$$

5.3. Определение экстремума

Пусть функция $u = f(M)$ определена на множестве D и точка $M_0 \in D$.

Определение 5.3.1. *Точка M_0 называется точкой локального максимума функции $u = f(M)$, если существует такая окрестность точки M_0, для всех точек M которой, отличных от M_0, выполняется неравенство $f(M_0) \geq f(M)$,* (рис.24). *В случае $f(M_0) > f(M)$ точка M_0 называется точкой строгого локального максимума. Аналогично определяется точка локального минимума,* (рис.25). *Точки локального максимума и минимума называются точками локального экстремума.*

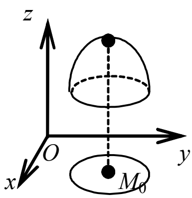


Рис. 24

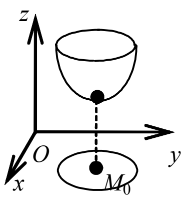


Рис. 25

Пример 5.3.1. Является ли точка $O(0, 0)$ точкой экстремума функции $z = x^2 y$?

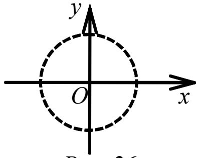


Рис. 26

Рассмотрим некоторую окрестность точки $O(0,0)$, (рис.26). Для точек верхней полуплоскости ($y > 0$) имеем $z(x, y) - z(0, 0) = x^2 y - 0 > 0$. Для точек нижней полуплоскости ($y < 0$) $z(x,y) - z(0,0) = x^2 y - 0 < 0$. И, следовательно, точка $O(0,0)$ не удовлетворяет определению точки экстремума.

Пример 5.3.2. Является ли точка $O(0,0)$ точкой экстремума функции $z=\sqrt{x^2+y^2}$?

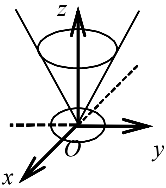


Рис. 27

Да, точка $O(0,0)$ является точкой минимума функции $z=\sqrt{x^2+y^2}$, т. к. в любой окрестности точки $O(0,0)$ $z(x,y)-z(0,0)=\sqrt{x^2+y^2}-0>0$, что наглядно иллюстрируется геометрически.

Задание 5.3

Для задач 1 – 6 ответ выберите из следующих высказываний:

1) да, точка максимума;
2) да, точка минимума;
3) экстремума нет.

1. Является ли точка $O(0, 0)$ точкой экстремума функции $z=x^2+y^2$?

2. Является ли точка $O(0, 0)$ точкой экстремума функции $z=x^2-y^2$?

3. Является ли точка $O(0, 0)$ точкой экстремума функции $z=|x|+|y|$?

4. Является ли точка $O(0, 0)$ точкой экстремума функции $z=e^{-\left(x^2+y^2\right)}$?

5. Является ли точка $(1, -1)$ точкой экстремума функции

$$z=\frac{1}{(x-1)^2+(y+1)^2+1}\ ?$$

6. Является ли точка $O(0,0)$ точкой экстремума функции $z=x\cdot y$?

5.4. Необходимые условия экстремума

Теорема 5.4.1. *Если функция* $u=f(M)$ *имеет экстремум в точке* M_0, *и в этой точке существует частная производная по* x_k, *то*

$$\frac{\partial u}{\partial x_k}(M_0)=0\,.$$

Точка M_0, в которой все частные производные равны нулю, называется стационарной точкой функции.

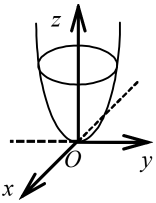


Рис. 28

Пример 5.4.1. Функция $z = x^2 + y^2$ имеет минимум в точке $O(0, 0)$, что наглядно иллюстрируется геометрически (рис. 28). Частные производные этой функции

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0,0) = 2x\big|_{(0,\,0)} = 0\,,\ \frac{\partial z}{\partial y}(0,0) = 2y\big|_{(0,\,0)} = 0\,.$$

В точке экстремума частные производные могут и не существовать.

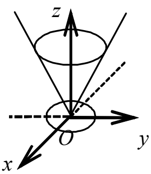


Рис. 29

Пример 5.4.2. Функция $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ имеет минимум в точке $O(0, 0)$, что также наглядно иллюстрируется геометрически, (рис.29). Однако частные производные $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ в точке $O(0, 0)$ не определены.

Замечание. Равенство нулю частных производных является лишь необходимым, но не достаточным условием экстремума.

Так, для функции $z = x \cdot y$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0, 0) = 0\,,\ \frac{\partial z}{\partial y}(0, 0) = 0\,,$$

но в любой окрестности $M_0(0,0)$ есть точки, для которых $z = x \cdot y > 0 = f(M_0)$ и точки, для которых $z = x \cdot y < 0 = f(M_0)$.

В $M_0(0,0)$ функция $z = x \cdot y$ не имеет экстремума.

Задание 5.4

1. Точка $O(0,0)$ есть стационарная точка для каждой из функций

$$f_1(x, y) = x^2 + y^2\,;\quad f_2(x, y) = x^2 - y^2\,.$$

Что можно сказать о наличии экстремума в этой точке для каждой из функций на основании необходимого признака?

Альтернативы для выбора ответа 1 – 2, где:

1) обе функции имеют экстремум в точке $O(0,0)$;

2) по проведённому исследованию ничего сказать нельзя: экстремум может быть, а может и не быть.

2. Какое из утверждений, 1 или 2, верно:

1) $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0} = \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0} = 0$ есть необходимое условие существования экстремума дифференцируемой функции в точке M_0;

2) $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0} = \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0} = 0$ есть достаточное условие существования экстремума дифференцируемой функции в точке M_0.

3. Выберите из предложенных функций те, у которых частные производные в точке $O(0,0)$ не существуют, а функция имеет экстремум.

1) $z = x^2 + y^2$; 2) $z = x^2 - y^2$;

3) $z = |x| + |y|$; 4) $z = |x| \cdot y$.

4. Является ли точка $M_0(-2, 1)$ стационарной для функции $z = x^2 + 4x + y^2 - 2y + 5$?

5. Если $M_0(-2, 1)$ есть стационарная точка функции $z = x^2 + 4x + y^2 - 2y + 5$, можно ли утверждать, что это точка экстремума?

6. Используя понятие градиента, запишите необходимое условие существования экстремума дифференцируемой функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$.

Альтернативы для выбора ответа 1 – 3, где:

1) градиент в точке M_0 не существует;

2) градиент параллелен оси *OZ;*.

3) градиент является нуль–вектором.

7. Используя понятие дифференциала, запишите необходимое условие существования экстремума дифференцируемой функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$.

1) $df(M_0)$ не существует;

2) 2) $df(M_0) = 0$;

3) о значении дифференциала в точке M_0 ничего сказать нельзя.

8. Является ли точка M_0 (0, 0) стационарной точкой функции $z = x^2 + 4x + y^2 - 2y + 5$?

9. Если точка M_0 (0, 0) не является стационарной точкой функции $z = x^2 + 4x + y^2 - 2y + 5$, можно ли утверждать, что точка M_0 не является точкой экстремума?

10. Является ли точка $M_0\,(1, -2)$ стационарной точкой функции $z = xy + 2x - y - 2$?

11. Если $M_0\,(1, -2)$ стационарная точка функции $z = xy + 2x - y - 2$, можно ли утверждать, что $M_0\,(1, -2)$ – точка экстремума?

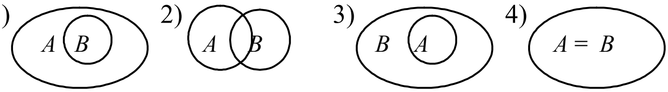
12. Постройте диаграмму взаимного расположения множеств *A* и *B* дифференцируемых функций, для которых:

1) точка M_0 является стационарной (*A*);

2) точка M_0 является точкой экстремума (*B*).

Альтернативы для выбора ответа 1 – 4, где:

1) 2) 3) 4)



5.5. Достаточные условия экстремума функции двух переменных

Пусть функция $u = f(x, y)$ дифференцируема в некоторой окрестности её стационарной точки $M_0(x_0, y_0)$ и дважды непрерывно дифференцируема в самой точке M_0 и пусть

$$a_{11} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(M_0),\ a_{12} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(M_0),\ a_{22} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(M_0).$$

Условия существования экстремума в точке M_0 состоят в следующем:

$$\boxed{D = a_{11}a_{22} - a_{12}^2}$$

$D > 0$	$D < 0$	$D = 0$
Экстремум существует	Экстремум не существует	Для установления факта существования экстремума требуется дополнительное исследование

$a_{11} < 0$	M_0 – точка максимума
$a_{11} > 0$	M_0 – точка минимума

Пример 5.5.1. Найти точки локального экстремума функции

$$u = x^3 - 2y^3 - 3x + 6y .$$

Сначала найдём стационарные точки функции из системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3 = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} = -6y^2 + 6 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} x_{1,2} = \pm 1; \\ y_{1,2} = \pm 1. \end{matrix}$$

Получаем 4 точки: $M_1(1, 1)$, $M_2(-1, -1)$, $M_3(-1, 1)$, $M_4(1, -1)$.

Найдём частные производные 2–го порядка:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -12y .$$

Исследуем теперь каждую критическую точку и результаты оформим в виде таблицы.

$M_0(x_0, y_0)$	a_{11}	a_{22}	a_{12}	D	Вывод
M_1 (1, 1)	6	–12	0	–72	Экстремум отсутствует
M_2 (–1, –1)	–6	12	0	–72	Экстремум отсутствует
M_3 (–1, 1)	–6	–12	0	72	M_3 – точка максимума
M_4 (1, –1)	6	12	0	72	M_4 – точка минимума

Пример 5.5.2. Найти точки локального экстремума функции $z = x^3 y^3$.

Найдём стационарные точки из системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y^3 = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial x} = 3y^2 x^3 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

Таким образом, функция имеет единственную стационарную точку $M_0(0, 0)$.

Найдём частные производные 2–го порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6xy^3 , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 9x^2 y^2 , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6yx^3 .$$

Откуда в точке M_0 (0, 0) имеем, что $a_{11} = 0$, $a_{12} = 0$, $a_{22} = 0$ и $D = 0$.

Так как существование или отсутствие экстремума не установлено, проведём дополнительные исследования. Рассмотрим некоторую окрестность точки M_0 (0, 0).

Замечаем, что если x и y имеют одинаковые знаки, то $z(x, y) - z(0, 0) > 0$ для $\forall M(x, y)$ из окрестности точки M_0, а если x и y имеют противоположные знаки, то $z(x, y) - z(0, 0) < 0$. Следовательно, экстремум в точке $M_0\,(0, 0)$ отсутствует.

Задание 5.5

1. Найдите точки экстремума функции $z = x^2 + 4x + y^2 - 2y + 5$.

2. Найдите точки экстремума функции $z = xy + 2x - y - 2$.

Альтернативы для выбора ответа 1 – 4, где:

1) точек экстремума нет; 2) (1, –2) – точка минимума;
3) (1, –2) – точка максимума; 4) (–2, 1) – точка минимума.

3. Найдите точки, в которых касательная плоскость к поверхности s: $z = xy + 2x - y - 2$ параллельна плоскости xOy.

4. Найдите точки, в которых касательная плоскость к поверхности $s: z = x^3 + y^3 - 3$›— параллельна плоскости xOy.

5. Имеет ли стационарные точки функция $z = x^2 + 2xy + y^2$?

Альтернативы для выбора ответа 1 – 3, где:

1) да, точку (0,0);
2) да, это множество точек, удовлетворяющих уравнению $x + y = 0$;
3) стационарных точек нет.

6. Проверьте выполнение достаточных условий экстремума функции $z = x^2 + 2xy + y^2$ в стационарных точках.

Альтернативы для выбора ответа 1 – 3, где:

1) $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$, экстремум есть;
2) $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$, экстремума нет;
3) $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$, признак ответа не даёт.

7. Имеет ли функция $z = x^2 + 2xy + y^2$ экстремумы?

Альтернативы для выбора ответа 1 – 3, где:

1) в каждой точке прямой l: $x + y = 0$ функция имеет нестрогий максимум;
2) в каждой точке прямой l: $x + y = 0$ функция имеет нестрогий минимум;
3) точек экстремума нет.

8. Имеет ли стационарные точки функция $z = xy^3$?

Альтернативы для выбора ответа 1 –4, где:

1) да, только (0,0);

2) все точки, для которых $y = 0$;

3) все точки, для которых $x = 0$;

4) все точки, для которых $x = 0$ или $y = 0$.

9. Проверьте достаточные условия экстремума функции $z = xy^3$ в её стационарных точках.

Альтернативы для выбора ответа 1 – 3, где:

1) $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$, экстремум есть;

2) $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$, экстремума нет;

3) $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$, признак ответа не даёт.

10. Имеет ли функция $z = xy^3$ экстремумы?

Альтернативы для выбора ответа 1 – 3, где:

1) в каждой точке прямой l: $y = 0$ функция имеет нестрогий максимум;

2) в каждой точке прямой l: $y = 0$ функция имеет нестрогий минимум;

3) точек экстремума нет.

11. Какое заключение о существовании экстремума функции

$$z = (y - x)^2 + (y + 2)^3$$

в точке (–2,–2) можно сделать на основании достаточного признака экстремума?

Альтернативы для выбора ответа 1 – 3, где:

1) экстремум существует;

2) экстремум не существует;

3) на основании достаточного признака экстремума никакого заключения о его существовании сделать нельзя.

12. Имеет ли функция $z = (y - x)^2 + (y + 2)^3$ экстремум в точке (–2,–2)?

Альтернативы для выбора ответа 1 – 3, где:

1) (–2, –2) – точка максимума;

2) (–2, –2) – точка минимума;

3) (–2, –2) не является точкой экстремума.

5.6. Достаточные условия экстремума для функции *n* переменных

Достаточные условия экстремума для функции *n* переменных сформулированы в следующей теореме.

Теорема 5.6.1. *Пусть функция* $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *дифференцируема в окрестности точки* M_0, *и дважды дифференцируема в точке* M_0, *причём* M_0 *– стационарная точка функции. Тогда, если:*

1) $d^2u(M_0)$ *– положительно определённая квадратичная форма, то функция* $u = f(M)$ *имеет минимум в точке* M_0*;*

2) $d^2u(M_0)$ *– отрицательно определённая квадратичная форма, то функция* $u = f(M)$ *имеет максимум в точке* M_0*;*

3) $d^2u(M_0)$ *– знакопеременная квадратичная форма, тогда локальный экстремум в точке* M_0 *отсутствует;*

4) $d^2u(M_0) = 0$, *тогда функция* $u = f(M)$ *в точке* M_0 *может как иметь экстремум, так и не иметь его.*

Исследование знака квадратичной формы проводится на основании критерия Сильвестра, а именно:

1) *для того, чтобы квадратичная форма была положительно определённой, необходимо и достаточно, чтобы все главные (угловые) миноры её матрицы были положительны*;

2) *для того, чтобы квадратичная форма была отрицательно определённой, необходимо и достаточно, чтобы знаки главных (угловых) миноров её матрицы чередовались следующим образом*: $\delta_1 < 0$, $\delta_2 > 0$, ...

Пример 5.6.1. Найти точки локального экстремума функции

$$u = x^2 + 2y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 1.$$

Сначала найдём стационарные точки из системы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - 2 = 0, \\ 4y + 4 = 0, \\ 2z - 6 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = -1, \\ z = 3. \end{cases}$$

Следовательно данная функция имеет единственную стационарную точку $M_0\,(1, -1, 3)$.

Найдём все частные производные 2-го порядка в точке M_0:

$$a_{11}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2\,; \qquad a_{21}=a_{12}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0\,; \qquad a_{22}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=4\,;$$

$$a_{31}=a_{13}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=0\,; \qquad a_{32}=a_{23}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=0\,; \qquad a_{33}=\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=2\,.$$

Составим матрицу квадратичной формы $d^2u(M_0)$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Проверим знаки главных миноров:

$$\delta_1=2>0\,, \qquad \delta_2=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}=8>0\,, \qquad \delta_3=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=16>0\,.$$

В соответствии с критерием Сильвестра заключаем, что в точке $M_0(1,\,-1,\,3)$ заданная функция имеет минимум.

Задание 5.6

1. Найдите стационарные точки функции

$$u=x^2+y^2+z^2-xy+x-2z\,.$$

2. Запишите матрицу для исследования достаточных условий экстремума функции $u=x^2+y^2+z^2-xy+x-2z$ в её стационарной точке.

Альтернативы для выбора ответа 1 – 3, где:

1) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 2\left(-\frac{2}{3}\right) & (-1)\left(-\frac{1}{3}\right) & 0 \\ (-1)\left(-\frac{2}{3}\right) & 2\left(-\frac{1}{3}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Имеет ли функция $u=x^2+y^2+z^2-xy+x-2z$ точки экстремума?

Альтернативы для выбора ответа 1 – 4, где:

1) функция имеет точку максимума;
2) функция имеет точку минимума;
3) экстремума нет;
4) критерий Сильвестра ответа не даёт.

4. Функция $u = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$ имеет в точке (0, 0, 0) такую же матрицу для исследования достаточных условий экстремума, что и в точке $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right)$. Что Вы можете сказать о наличии экстремума функции в точке (0, 0, 0)?

Альтернативы для выбора ответа 1 – 3, где:

1) (0,0,0) – точка максимума;

2) (0,0,0) – точка минимума;

3) экстремума нет, т. к. (0,0,0) не является стационарной точкой.

5.7. Условный экстремум

Пусть аргументы функции $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ связаны соотношениями $F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \quad i = \overline{1,k}\,(k < n)$.

Определение 5.7.1. *Точка M_0 называется точкой условного максимума функции f(M), если $f(M_0)$ есть наибольшее значение функции по отношению ко всем значениям функции во всех точках некоторой окрестности точки M_0, удовлетворяющих условиям связи.*

Аналогично определяется точка условного минимума.

Например, точка условного минимума функции $z = x^2 + y^2$ при условии $x + y = 4$ изображена на рис. 30.

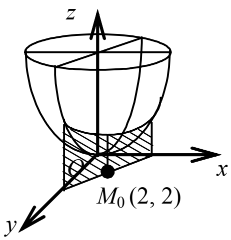


Рис. 30

Задача отыскания условного экстремума может быть сведена к исследованию безусловного экстремума.

Пусть в окрестности точки $M_0\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$ для уравнений $F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, $i = \overline{1,k}$, ($k < n$) выполняются условия теоремы существования неявных функций.

Разрешая уравнения $F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, относительно *k* переменных x_i, найдём, что $x_i = x_i(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n)$.

Подставим найденные x_i в функцию $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, получим

$$u = f\big(x_1(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n), x_2(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n), \ldots,$$
$$x_k(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n), x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n\big) = \varphi(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n).$$

Полученную функцию можно исследовать на безусловный экстремум.

Пример 5.7.1. Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 + y^2$ при условии $x + y = 4$.

Разрешим уравнение связи относительно одной из переменных, например, относительно y:

$$y = 4 - x.$$

При найденном значении y функция z становится функцией одной переменной:

$$z = (4 - x)^2 + x^2 = 2x^2 - 8x + 16.$$

Исследуем эту функцию на экстремум. Так как $z' = 4x - 8$, то $x = 2$ есть стационарная точка. Кроме того, $z''(2) = 4 > 0$ и это значит, что при $x = 2$ функция имеет минимум, т. е. $z = 8$ есть минимальное значение функции $z = x^2 + y^2$ при условии $x + y = 4$. Достигается условный минимум в точке (2, 2).

Существует другой метод отыскания условного экстремума – метод Лагранжа.

Если $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – заданная функция и $F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, $\left(i = \overline{1, k}\right)$ – условия связи, то задача об условном экстремуме функции $f(M)$ эквивалентна задаче об экстремуме функции Лагранжа

$$\phi(M) = f(M) + \lambda_1 F_1(M) + \lambda_2 F_2(M) + \ldots + \lambda_k F_k(M),$$

($\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ – произвольные числа), т. к. при выполнении условий связи $\phi(M) = f(M)$.

Теорема 5.7.1 (необходимый признак Лагранжа условного экстремума). *Пусть выполняются два условия*:

1) *дифференцируемая в точке M_0 функция $u = f(M)$ имеет в этой точке условный экстремум при условиях связи*

$$F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \left(i = \overline{1, k}\right);$$

2) *уравнения связи в некоторой окрестности точки M_0 удовлетворяют условиям теоремы существования неявных функций* $x_i = x_i(x_{k+1}, x_{k-2}, .., x_n)$.

Тогда существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ такие, что все частные производные функции Лагранжа в точке M_0 равны нулю.

Таким образом, для отыскания точки возможного экстремума нужно решить систему $n + k$ уравнений

$$\begin{cases} F_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, & i = \overline{1, k}; \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial x_\alpha}(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_k), & \alpha = \overline{1, n} \end{cases}$$

относительно $x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$

Пример 5.7.2. Составить функцию Лагранжа и найти точки возможного экстремума функции $z = xy$ при условии $x^2 + y^2 = 1$.

Составим функцию Лагранжа $\phi(x, y, \lambda) = xy + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ и систему уравнений для отыскания точки возможного условного экстремума

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0, \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial x} \equiv y + 2\lambda x = 0, \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial y} \equiv x + 2\lambda y = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим стационарные точки:

- при $\lambda = \frac{1}{2}$: $M_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $M_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$;
- при $\lambda = -\frac{1}{2}$: $M_3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $M_4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Для установления характера экстремума рассматривается второй дифференциал функции Лагранжа в стационарной точке

$$d^2\phi = \sum_{\alpha, \beta = 1}^{n} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}(M_0) dx_\alpha dx_\beta ,$$

где $dx_{k+1}, dx_{k+2}, ..., dx_n$ – дифференциалы независимых переменных, $dx_1, dx_2, ..., dx_n$ – дифференциалы неявных функций.

Если $d^2\phi(M_0)$ – положительно определённая квадратичная форма, то M_0 – точка условного минимума, если же отрицательно определённая, то M_0 – точка условного максимума; если $d^2\phi(M_0)$ есть знакопеременная форма, то экстремум в точке M_0 отсутствует.

Продолжим решение примера.

Найдём $d^2\phi = 2\lambda dx^2 + 2dxdy + 2\lambda dy^2$.

Подставим $\lambda = \frac{1}{2}$, получим

$$d^2\phi = dx^2 + 2dxdy + dy^2 = (dx + dy)^2 > 0 .$$

Следовательно, в точках

$$M_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\right) \text{ и } M_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

функция $z = xy$ имеет условный минимум $z = -\frac{1}{2}$.

При $\lambda = -\frac{1}{2}$ $d^2\phi = -dx^2 + 2dxdy - dy^2 = -(dx - dy)^2 < 0$ и в точках $M_3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $M_4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ функция $z = xy$ имеет условный максимум, равный $\frac{1}{2}$.

Задание 5.7

1. Есть ли точки экстремума у функции $z = xy$? (Да, нет).

2. Найдите точки экстремума функции $z = xy$ при условии $y = x$.

3. Найдите точки экстремума функции $z = xy$ при условии $y = -x$.

4. Найдите точки экстремума функции $z = xy$ при условии $y = x^2$.

Альтернативы для выбора ответов к задачам 2 – 4:

1) (0, 0) – точка условного максимума;

2) (0, 0) – точка условного минимума;

3) экстремума в (0, 0) нет.

5. Составьте функцию Лагранжа для отыскания точек экстремума функции $z = x + 2y$ при условии $x^2 + y^2 = 5$.

Альтернативы для выбора ответа 1 – 3, где:

1) $\phi(x, y, \lambda) = (x + 2y) + \lambda(x^2 + y^2 - 5)$;

2) $\phi(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 5 + \lambda(x + 2y)$;

3) $\phi(x, y, z, \lambda) = z + \lambda_1(x + 2y) + \lambda_2(x^2 + y^2 - 5)$.

6. Найдите стационарные точки функции Лагранжа для отыскания экстремума функции $z = x + 2y$ при условии $x^2 + y^2 = 5$.

Альтернативы для выбора ответа 1 – 4, где:

1) одна точка (–1, –2) при $\lambda = \frac{1}{2}$;

2) одна точка (1, 2) при $\lambda = -\frac{1}{2}$;

3) две точки (±1, ±2) при $\lambda = \pm\frac{1}{2}$;

4) две точки (±1, ±2) при $\lambda = \pm\frac{1}{2}$.

7. Найдите $d^2\phi(x, y)$ для функции Лагранжа из предыдущей задачи.

Альтернативы для выбора ответа 1 – 3, где:

1)
$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial \lambda^2}d\lambda^2 + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial \lambda}dxd\lambda + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial \lambda}dyd\lambda;$$

2) $d^2\phi = 2\lambda dx^2 + 2\lambda dy^2$;

3) $d^2\phi = 2\lambda dx^2 + 2dxdy + 2\lambda dy^2$.

8. Найдите точки экстремума функции $z = x + 2y$ при условии $x^2 + y^2 = 5$.

Альтернативы для выбора ответа 1 – 3, где:

1) (–1, –2) – точка условного минимума, (1, 2) – точка условного максимума;

2) (1, 2) – точка условного минимума, (–1, –2) – точка условного максимума.;

3) точек условного экстремума нет.

9. Найдите стационарную точку функции Лагранжа для отыскания экстремума функции $z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 1$ при условии $x + y + 3 = 0$.

Альтернативы для выбора ответа 1 – 3, где:

1) (1, 1) при $\lambda = -3$;

2) $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ при $\lambda = 0{,}5$;

3) (–2, –1) при $\lambda = 0$.

10. Найдите $d^2\phi$ для исследования достаточного условия существования экстремума функции $z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$ при условии $x + y + 3 = 0$.

Какому условию должны удовлетворять dx и dy?

Альтернативы для выбора ответа 1 – 4, где:

1) $d^2\phi = 2dx^2 + 2dy^2 - 2dxdy$, dx, dy – любые;

2) $d^2\phi = 2(dx)^2 + 2(dy)^2$ dx, dy – любые;

3) $d^2\phi = 2(dx - dy)^2$, $dx = dy$;

4) $d^2\phi = 2dx^2 + 2dy^2 - 2dxdy$, $dx + dy = 0$.

11. Найдите экстремум функции $z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$ при условии $x + y + 3 = 0$.

Альтернативы для выбора ответа 1 – 4, где:

1) $\left(-\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)$ – точка условного минимума;

2) $\left(-\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)$ – точка условного максимума;

3) точек экстремума нет;

4) достаточный признак условного экстремума ответа не даёт.

5.8. Наибольшее и наименьшее значения функции на множестве

В соответствии с теоремой Вейерштрасса о достижении непрерывной функцией своих точных границ всякая функция $u = f(M)$, непрерывная в замкнутой ограниченной области, достигает на ней своих наибольшего и наименьшего значений.

Эти значения достигаются либо в точке локального экстремума, либо в граничной точке области.

Пример 5.8.1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$ в области, заданной неравенством

$$x^2 + y^2 \le 25 .$$

Сначала найдём стационарные точки функции из системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x - 12 = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y + 16 = 0. \end{cases}$$

Решением системы является точка $M_0(6, -8)$, не принадлежащая заданной области.

Теперь рассмотрим функцию на границе области, перейдя к параметрическим уравнениям границы $\begin{cases} x = 5\cos t, \\ y = 5\sin t, \quad t \in [0, 2\pi]. \end{cases}$

Функция $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$ в точках границы области принимает вид

$$z = 25 - 60\cos t + 80\sin t, \quad t \in [0, 2\pi],$$

и поставленная задача сводится к отысканию её наибольшего и наименьшего значений на указанном отрезке.

Найдём стационарные точки функции из уравнения

$$z' = 60\sin t + 80\cos t = 0 , \quad t \in [0, 2\pi].$$

Откуда $\mathrm{tg}\, t = -\frac{4}{3}$, $t = -\mathrm{arctg}\left(\frac{4}{3}\right) + n\pi$.

Выберем те решения, которые принадлежат отрезку $[0, 2\pi]$:

$$t_1 = \pi - \operatorname{arctg}\frac{4}{3}, \; t_2 = 2\pi - \operatorname{arctg}\frac{4}{3}.$$

Вычислим значения функции в стационарных точках и на концах отрезка $[0, 2\pi]$, получим

$$z\left(\pi - \operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right) = 25 - 60\cos\left(\pi - \operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right) + 80\sin\left(\pi - \operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right) =$$

$$= 25 + 60\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right) + 80\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right) =$$

$$= 25 + 60\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)}} + 80\frac{\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)}} = 25 + 60\cdot\frac{3}{5} + 80\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{5} =$$

$$= 25 + 36 + 64 = 125,$$

$$z\left(2\pi - \operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right) = 25 - 60\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right) - 80\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right) =$$

$$= 25 - 60\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)}} - 80\frac{\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)}} = 25 - 60\cdot\frac{3}{5} - 80\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{5} =$$

$$= 25 - 36 - 64 = -75,$$

$$z(0) = 25 - 60 = -35, \quad z(2\pi) = 25 - 60 = -35,$$

Сравнивая найденные значения, отмечаем, что $z_{\text{наим}} = -75$, $z_{\text{наиб.}} = 125$.

Задание 5.8

1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2$ на множестве $D = \{(x, y):\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 - x\}$.

Альтернативы для выбора ответа 1 – 3, где:

1) $z_{\text{наим.}} = 0$, $z_{\text{наиб.}} = 1$;

2) $z_{\text{наим.}} = \frac{1}{2}$, $z_{\text{наиб.}} = 2$;

3) $z_{\text{наим.}} = 0$, $z_{\text{наиб.}} = 2$.

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2$ на множестве $D = \{(x, y):\ 0 \le x \le 1,\ \ y = 1 - x\}$.

Альтернативы для выбора ответа 1 – 4, где:

1) $z_{\text{наим.}}(0, 0) = 0$, $z_{\text{наиб.}}(0, 1) = 1$;

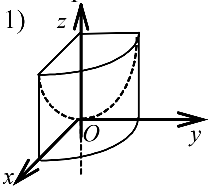
2) $z_{\text{наим.}}(0, 0) = 0$, $z_{\text{наиб.}}(1, 1) = 2$;

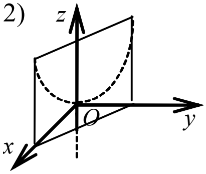
3) $z_{\text{наим.}}(1,0) = z_{\text{наим.}}(0,1) = 1$, $z_{\text{наиб.}}(1,1) = 2$;

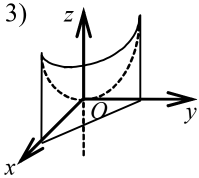
4) $z_{\text{наим.}}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, $z_{\text{наиб.}}(1,0) = z_{\text{наиб.}}(0,1) = 1$.

3. Постройте тело, ограниченное параболоидом $s:\ z = x^2 + y^2$ и плоскостями $P_1:\ x = 0$, $P_2:\ y = 0$, $P_3:\ z = 0$, $P_4:\ x + y = 1$

Альтернативы для выбора ответа 1 – 3, где:

1)


2)


3)


4. Найдите стационарные точки функции $u = x^3 - 3x + y^2$ в области $D = \{(x, y):\ 0 \le x \le 2,\ -1 \le y \le 1\}$

5. Какие из следующих функций

1) $u = x^3 - 3x - 1$; 2) $u = x^3 - 3x + 1$; 3) $u = y^2 + 2$; 4) $u = y^2$

совпадают со значениями функции $u = x^3 - 3x + y^2$ на границе области $D = \{(x, y): 0 \le x \le 2, -1 \le y \le 1\}$?

Альтернативы для выбора ответа 1 – 3, где:

1) (4, 3, 2, 2); 2) (4, 3, 1, 2); 3) (1, 2, 3, 4).

6. Перечислите точки, в которых функция $u = x^3 - 3x + y^2$ может достигнуть наибольшего и наименьшего значений на границе области

$$D = \{(x, y): 0 \le x \le 2, -1 \le y \le 1\}.$$

Альтернативы для выбора ответа 1 – 3, где:

1) (0, 0), (0,1), (0, –1), (2, 0), (2, 1), (2, –1), (1, 1), (1, –1);

2) (0, 1), (0, –1), (2, 1), (2, –1);

3) (0, 0), (0, 1), (0, –1), (2, 0), (2, 1), (2, –1), (1, 1), (1, –1), (–1, 1).

7. Найдите наибольшее значение функции $u = x^3 - 3x + y^2$ в области

$$D = \{(x, y): 0 \le x \le 2, -1 \le y \le 1\}.$$

8. Найдите наименьшее значение функции $u = x^3 - 3x + y^2$ в области

$$D = \{(x, y): 0 \le x \le 2, -1 \le y \le 1\}.$$

9. Найдите наибольшее значение функции $u = x^2 - y^2$ в области

$$D = \{(x, y): 0 \le x \le 3, -x \le y \le x\}.$$

10. Найдите наименьшее значение функции $u = x^2 - y^2$ в области

$$D = \{(x, y): 0 \le x \le 3, -x \le y \le x\}.$$

11. Найдите наибольшее значение функции $z = 4x$ в области, ограниченной кривой $l: \; x^2 + y^2 = 2x$

12. Найдите наименьшее значение функции $z = 4x$ в области, ограниченной кривой $l: \; x^2 + y^2 = 2x$

6. ОТОБРАЖЕНИЯ

6.1. Отображения: $\boldsymbol{R \to R}$, $\boldsymbol{R^2 \to R}$, $\boldsymbol{R^2 \to R^2}$

Определение 6.1.1. *Отображением* (*функцией*) *множества X в множество Y называется такое соответствие этих множеств, при котором каждой точке $x \in X$ отвечает единственная точка $y \in Y$.*

Обозначается отображение буквой f и записывается одним из способов:

$$f: X \to Y; \qquad f: x \to y,\; x \in X,\; y \in Y; \qquad y = f(x),\; x \in X.$$

Принята следующая терминология:

а) x – независимая переменная или аргумент;

б) y – зависимая переменная или значение функции;

в) y – образ элемента x, x – прообраз элемента y при заданном отображении $y = f(x)$.

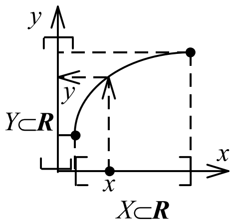
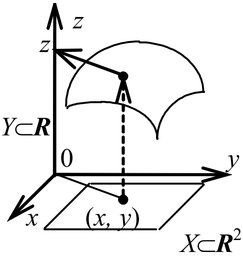
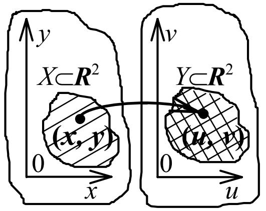
г) X – множество определения отображения;

д) множество всех $y \in Y$, являющихся образами хотя бы одного $x \in X$, называется множеством значений отображения;

е) множество всех $y \in Y$, являющихся значениями отображения f в точках $x \in A \subset X$ называется образом множества A при отображении f;

ж) множество всех $x \in A \subset X$, для которых соответствующие значения $y \in B \subset Y$, называется прообразом множества B.

Геометрическую интерпретацию рассматриваемых отображений для наглядности оформим в виде таблицы.

$\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$	$\boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$	$\boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$
$f: X \to Y \Leftrightarrow$ $y = f(x), x \in X$ 	$z = f(x, y), (x, y) \in X$ 	$\begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y), \\ (x, y) \in X \end{cases}$ 

Пример 6.1.1. Найдите образ множества $X = \{(x, y): x^2 + y^2 \le 4\}$ при отображении $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Данная функция неотрицательная, её значения изменяются от наименьшего, равного нулю при $x = y = 0$, до наибольшего, равного 2. Образом множества X при данном отображении является отрезок [0,2].

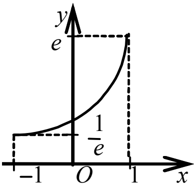


Рис. 31

Пример 6.1.2. Найти образ множества $X = [-1, 1]$ при отображении $y = 2^x$.

Так как $y = 2^x$ – монотонно возрастающая функция, то множеством её значений будет отрезок $\left[\frac{1}{e}, e\right]$, (рис.31).

Пример 6.1.3. Найти образ окружности $C: x^2 + y^2 = 4$ при отображении, определяемом формулами $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$, $v = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$.

Для отыскания образа окружности следует из формул, определяющих отображение, и из уравнения окружности исключить x и y. Для этого возведём функции u и v в квадрат и сложим, получим

$$u^2 + v^2 = \frac{x^2 + y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}.$$

Учтём, что для точек окружности выполняется равенство $x^2 + y^2 = 4$. Тогда получим $u^2 + v^2 = \frac{1}{4}$. То есть образом окружности при заданном отображении является окружность, (см. рис.32).

Пример 6.1.4. Найти прообраз числа e при отображении $z = e^{\frac{2x}{x^2+y^2}}$.

Другими словами, требуется найти множество точек (x, y), которые при заданном отображении переходят в число e.

$$e = e^{\frac{2x}{x^2+y^2}} \Leftrightarrow \frac{2x}{x^2+y^2} = 1 .$$

Откуда $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 0, \\ x^2 + y^2 \neq 0, \end{cases}$ или $\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 1, \\ x^2 + y^2 \neq 0 \end{cases}$, (рис. 33).

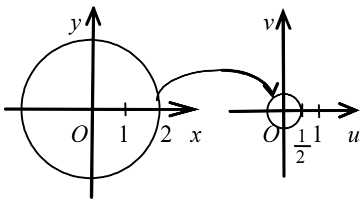


Рис. 32

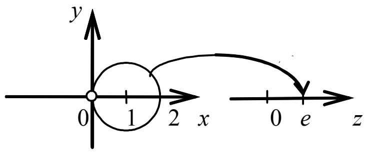


Рис. 33

Пример 6.1.5. Найти образ множества [–1, 2] при отображении $y = 4 - x^2$.

Сравним значения функции на концах промежутка и в единственной стационарной точке:

x	-1	0	2
$f(x)$	3	4	0

Множество значений функции есть отрезок [0, 4].

Задание 6.1

1. Найдите образ множества $\left[\frac{\pi}{4}; \pi\right]$ при отображении $y = \sin x$.

2. Для отображения $y = \ln(1 - x)$ найдите образ множества A.

2.1. $A = [1, +\infty)$. **2.2.** $A = (-\infty, 1)$. **2.3.** $A = (-\infty, 0)$.

Альтернативы для выбора ответа 1 – 4, где:

1) $(0, +\infty)$; 2) $[0, +\infty)$; 3) $(-\infty, +\infty)$;

4) отображение не определено.

3. Найдите прообразы числа 1 при отображении $y = \sin x$.

Альтернативы для выбора ответа 1 – 4, где:

1) $\frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$; 3) $\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$.

4) прообразы не существуют.

4. Пусть $f: \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^1$ по правилу $z=x^2+y^2$. Найдите образ множества точек окружности $C: x^2+y^2=4$ при этом отображении.

5. Пусть $f: \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^1$ по правилу $z=x^2+y^2$. Найдите образ множества $A=\{(x,y): x^2+y^2\le 4\}$ при этом отображении.

6. Найдите образ множества $A=\{(x,y): x^2+y^2<4, x^2+y^2>5\}$ при отображении, определяемом по формуле $z=x^2+y^2$.

Альтернативы для выбора ответа 1 – 3, где:

1) $[0,4]\cup[5,+\infty)$; 2) $[0,4)\cup(5,+\infty)$; 3) $(0,+\infty)$.

7. Найдите множество прообразов числа 25 при отображении $f: \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^1$, определяемом по правилу $u=x^2+y^2+z^2$.

Альтернативы для выбора ответа 1 – 3, где:

1) $x^2+y^2=25$; 2) $z=\sqrt{x^2+y^2+25}$; 3) $x^2+y^2+z^2=25$.

8. Найдите прообраз нуля при отображении $f: \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^1$, определяемом по правилу $z=1-\frac{y}{x}$.

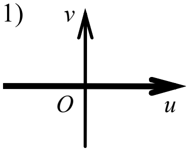
Альтернативы для выбора ответа 1 – 3, где:

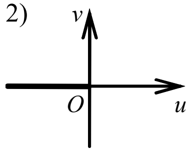
1) $y=x$; 2) $y=x,\ x\ne 0$; 3) $y=-x$.

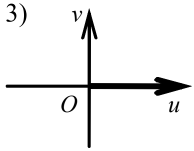
9. При отображении, определяемом по формулам $u=x^2-y^2$, $v=2xy$, найдите и постройте образ прямой:

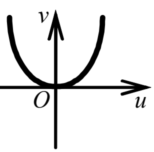
9.1. $l: y=0$. **9.2.** $l: x=0$. **9.3.** $l: y=x$. **9.4.** $l: y=-x$.

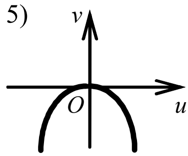
Альтернативы для выбора ответов 1 – 9, где:

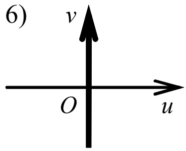
1) 

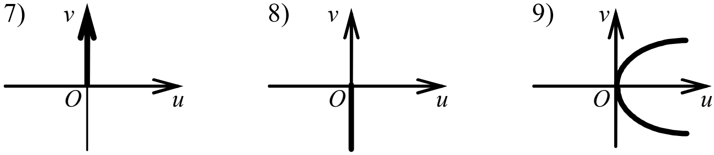
2) 

3) 

4) 

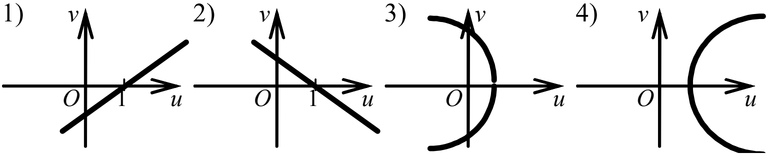
5) 

6) 



10. Найдите и постройте образ прямой $l:\ x=1$ при отображении $f:\ \boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}^2$, определяемом по формулам $u=x^2-y^2$, $v=2xy$.

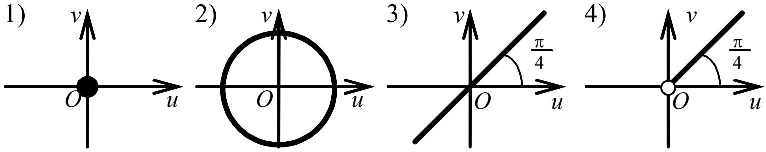
Альтернативы для выбора ответа 1 – 4, где:



11. При отображении $\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}^2$, определяемом по формулам: $u=e^x\cos y$, $v=e^x\sin y$, найдите:

11.1. Образ прямой $l:\ x=0$. **11.2.** Образ линии $l:\ y=\frac{\pi}{4}$.

Альтернативы для выбора ответов 1 – 4, где:



6.2. Векторная функция скалярного аргумента

Определение 6.2.1. *Если каждому значению переменной $t\in T\subset\boldsymbol{R}$ поставлен в соответствие некоторый вектор $\bar r$, то говорят, что на множестве T задана вектор-функция $\bar r=\bar r(t)$.*

Определение 6.2.2. *Конец вектора $\bar r(t)$ при изменении $t\in[a,b]$ описывает кривую, которая называется годографом вектор-функции $\bar r(t)$.*

Если обозначить координаты конца вектора $\bar r(t)$: $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, а $\bar i,\ \bar j,\ \bar k$ – базисные векторы координатных осей, то вектор-функцию $\bar r(t)$ можно представить в виде

$$\bar r(t)=x(t)\bar i+y(t)\bar j+z(t)\bar k.$$

Пример 6.2.1. Найти годограф вектор-функции

$$r=\cos^2 t\bar i+\sin^2 t\bar j,\ \text{если } 0\le t\le\infty.$$

Из условия задачи следует, что $x = \cos^2 t$, $y = \sin^2 t$, $0 \le t < \infty$. Исключая отсюда параметр *t*, находим, что $x + y = 1$.

Причём при $t = 0$ $x = 1$, $y = 0$ и с возрастанием параметра t от 0 до $\frac{\pi}{2}$ переменная *x* убывает от $x = 1$ до $x = 0$, а переменная *y* возрастает от 0 до 1.

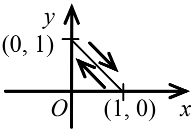


Рис. 34

Далее для $t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ переменная *x* возрастает до 1, а переменная *y* убывает до 0 и так далее, (рис.34).

Определение 6.2.3. *Производной вектор – функции* $\bar{r} = \bar{r}(t)$ *называется*

$$\lim_{M \to 0} \frac{\bar{r}(t + \Delta t) - \bar{r}(t)}{\Delta t}.$$

Производная $\bar{r}'(t)$ есть вектор мгновенной скорости точки, движущейся по закону $\bar{r} = \bar{r}(t)$, в момент времени *t* и её можно представить в виде

$$\bar{r}'(t) = x'(t)\bar{i} + y'(t)\bar{j} + z'(t)\bar{k}.$$

Вектор скорости направлен по касательной к годографу вектор-функции.

Пример 6.2.2. Найти годограф вектор-функции

$$\bar{r}(t) = R\cos t\bar{i} + R\sin t\bar{j}$$

Построить вектор скорости при $t_1 = \frac{\pi}{2}$ и $t_2 = \pi$.

Как следует из уравнения, определяющего вектор-функцию, $x = R\cos t$, $y = R\sin t$ и, следовательно, годограф представляет окружность с центром в начале координат и радиусом, равным *R*.

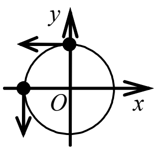


Рис. 35

Находим вектор скорости

$$\bar{r}'(t) = -R\sin t\bar{i} + R\cos t\bar{j},$$

вычисляем его координаты при заданных значениях *t* и получаем $\bar{r}'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -Ri$ и $\bar{r}'(\pi) = -Rj$, (рис.35).

Задание 6.2

1. Радиус-вектор движущейся точки в момент времени *t* задан уравнением $\bar{r} = 4t\bar{i} - 3t\bar{j}$. Найдите траекторию движения.

Альтернативы для выбора ответа 1 – 3, где:

1) прямая $3x + 4y = 0$; 2) гипербола $xy = \frac{4}{3}$;

3) окружность $x^2 + y^2 = 25t^2$.

2. Дано уравнение движения $\bar{r} = 3t\bar{i} + \left(4t - t^2\right)\bar{j}$. Найдите траекторию движения.

Альтернативы для выбора ответа 1 – 2, где:

1) прямая $(4 - t)x - 3y = 0$; 2) парабола $y = \frac{4}{3}x - \frac{1}{9}x^2$.

3. Дано уравнение движения $\bar{r} = a\cos t\bar{i} + b\sin t\bar{j}$. Найдите траекторию движения.

Альтернативы для выбора ответа 1 – 4, где:

1) синусоида $y = b\sin t$; 2) эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;

3) окружность $x^2 + y^2 = a^2 b^2$; 4) прямая $ay = bx$.

4. Дано уравнение движения $\bar{r} = a\cos t\bar{i} + b\sin t\bar{j}$, где $a > 0$, $b > 0$. Найдите скорость движения в момент времени t.

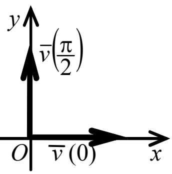
Альтернативы для выбора ответа 1 – 4, где:

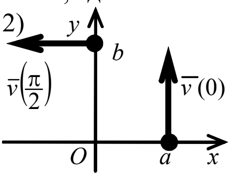
1) $\bar{v}(t) = \bar{r}(t)$; 2) $\bar{v}(t) = -a\sin t\bar{i} + b\cos t\bar{j}$;

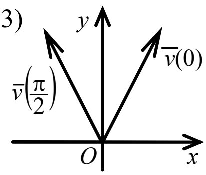
3) $\bar{v}(t) = -a\cos t\bar{i} - b\sin t\bar{j}$; 4) $\bar{v}(t) = a\sin t\bar{i} + b\cos t\bar{j}$.

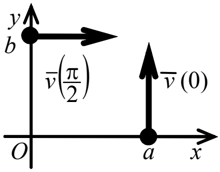
5. Постройте вектор скорости, найденный в предыдущей задаче при $t = 0$ и $t = \frac{\pi}{2}$.

Альтернативы для выбора ответа 1 – 4, где:

1)


2)


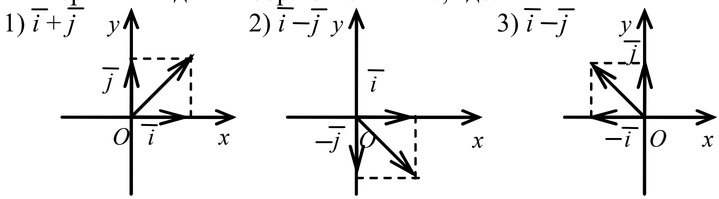
3)


4)


6. Дана векторная функция скалярного аргумента $\bar{r} = e^t\bar{i} + e^{-t}\bar{j}$. Найдите координаты точки годографа функции в момент времени $t = 0$.

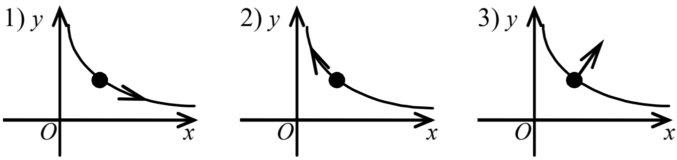
7. Найдите и постройте вектор скорости функции $\bar r = e^t\bar i + e^{-t}\bar j$ в момент времени $t = 0$.

Альтернативы для выбора ответа 1 – 3, где:



8. Укажите направление обхода годографа векторной функции $\bar r = e^t\bar i + e^{-t}\bar j$ в точке (1, 1) при возрастании параметра t.

Альтернативы для выбора ответа 1 – 3, где:



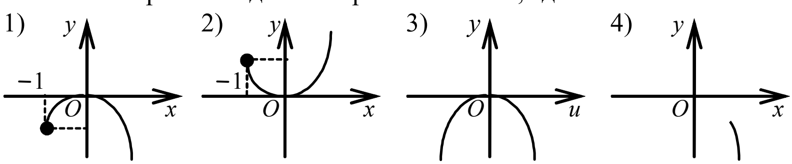
9. Какая часть годографа векторной функции $\bar r = \mathrm{tg}t\bar i - \left(1 - \dfrac{1}{\cos^2 t}\right)\bar j$ обходится за промежуток времени от $t = 0$ до $t = \frac{\pi}{2}$.

Альтернативы для выбора ответа 1 – 3, где:

1) $y = x^2$, $x \in \boldsymbol{R}$; 2) $y = x^2$, $x \ge 0$; 3) $y = x^2$, $x \le 0$.

10. Отметьте часть годографа векторной функции $\bar r = \mathrm{tg}t\bar i - \left(1 - \dfrac{1}{\cos^2 t}\right)\bar j$, отвечающей изменению параметра $t \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Альтернативы для выбора ответа 1 – 4, где:



11. Найти траекторию движения $\bar r(t) = \cos t\bar i + \sin t\bar j + t\bar k$, $t \in [0, 2\pi]$.

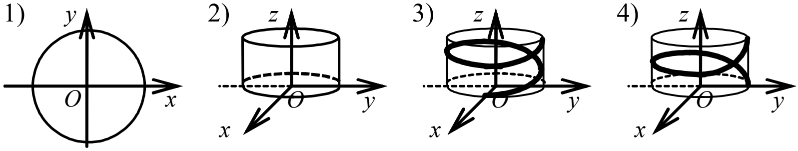
Альтернативы для выбора ответа 1 – 4, где:

1) окружность радиуса $R = 1$;

2) цилиндр круговой $R = 1$, $H = 2\pi$;

3) винтовая линия;

4) винтовая линия.



6.3. Матрица Якоби. Якобиан

Пусть отображение $f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$ определено по формулам

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ y_m = f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{cases}$$

Определение 6.3.1. *Матрица*

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

называется матрицей Якоби отображения (1).

Если n = m, то матрица квадратная и её определитель называется якобианом.

Обозначается якобиан символом $\dfrac{D(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{D(x_1, x_2, \ldots x_n)}$.

Отображение $f: X \to Y$, где $X \subset \boldsymbol{R}^n$, $Y \subset \boldsymbol{R}^m$, определяемое по формулам (1), называется непрерывно дифференцируемым, если все $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_k}$, $i = \overline{1, m}$, $k = \overline{1, n}$ непрерывны на множестве X.

Пример 6.3.1. Найти матрицу Якоби и якобиан отображения $f: \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$, определяемого по формулам $\begin{cases} u = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}, \\ v = \dfrac{1}{2} \ln(x^2 + y^2). \end{cases}$

Найдём все частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{y}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Составим матрицу Якоби $\begin{pmatrix} -\dfrac{y}{x^2+y^2} & \dfrac{x}{x^2+y^2} \\ \dfrac{x}{x^2+y^2} & \dfrac{y}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$

Вычислим якобиан

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix} -\dfrac{y}{x^2+y^2} & \dfrac{x}{x^2+y^2} \\ \dfrac{x}{x^2+y^2} & \dfrac{y}{x^2+y^2} \end{vmatrix}=-\frac{1}{\left(x^2+y^2\right)}.$$

Задание 6.3

1. Запишите матрицу Якоби для отображения $f: \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$, определяемого по формулам $\begin{cases} x=\rho\cos\varphi, \\ y=\rho\sin\varphi. \end{cases}$

Альтернативы для выбора ответа 1 – 4, где:

1) $\begin{pmatrix} \rho'\cos\varphi & \rho\sin\varphi\cdot\varphi' \\ \rho'\sin\varphi & \rho\cos\varphi\cdot\varphi' \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

2. Найдите якобиан $\dfrac{D(x,y)}{D(\rho,\varphi)}$ отображения, определяемого по формулам $\begin{cases} x=\rho\cos\varphi, \\ y=\rho\sin\varphi. \end{cases}$

Альтернативы для выбора ответа 1 – 3, где:

1) $\rho\cos 2\varphi$; 2) ρ; 3) ρ^2.

3. Найдите матрицу Якоби отображения $f: \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$, определяемого по формулам $\begin{cases} \rho=\sqrt{x^2+y^2}, \\ \varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}. \end{cases}$

Альтернативы для выбора ответа 1 – 4, где:

1) $\begin{pmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\dfrac{y}{x^2+y^2} & \dfrac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \dfrac{y}{x^2+y^2} & \dfrac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} & \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \\ \dfrac{y^2}{y^2+x^2} & \dfrac{x^2}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\dfrac{y}{x^2-y^2} & \dfrac{x}{x^2-y^2} \end{pmatrix}$.

4. Найдите якобиан $\dfrac{D(\rho,\varphi)}{D(x,y)}$ отображения $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}^2$, определяемого по формулам $\begin{cases}\rho=\sqrt{x^2+y^2},\\ \varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}.\end{cases}$

Альтернативы для выбора ответа 1 – 3, где:

1) $\dfrac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)}$; 2) $\dfrac{x^2(x-y)}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$; 3) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

5. Сравните $\dfrac{D(x,y)}{D(\rho,\varphi)}$ и $\dfrac{D(\rho,\varphi)}{D(x,y)}$ для отображения $\begin{cases}x=\rho\cos\varphi,\\ y=\rho\sin\varphi.\end{cases}$

Альтернативы для выбора ответа 1 – 2, где:

1) $\dfrac{D(x,y)}{D(\rho,\varphi)}\cdot\dfrac{D(\rho,\varphi)}{D(x,y)}=1$;

2) якобианы не равны и не выражаются один через другой.

6. Найдите якобиан $\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}$ отображения $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}^2$, определяемого по формулам $\begin{cases}u=xy,\\ v=\dfrac{y}{x}.\end{cases}$

Альтернативы для выбора ответа 1 – 3, где:

1) $2\dfrac{y}{x}$; 2) $\dfrac{y}{x}+xy$; 3) $\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}$.

7. Найдите якобиан $\dfrac{D(x,y)}{D(\rho,\varphi)}$ отображения $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}^2$, определяемого по формулам $\begin{cases}x=a\rho\cos\varphi,\\ y=b\rho\sin\varphi.\end{cases}$

Альтернативы для выбора ответа 1 – 4, где:

1) ρ; 2) ab; 3) $ab\cos\varphi$; 4) $ab\rho$.

8. Найдите $\dfrac{D(x, y, z)}{D(\rho, \varphi, z)}$ для отображения, определяемого по формулам

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

Альтернативы для выбора ответа 1 – 3, где:

1) ρ; 2) $\rho\cos 2\varphi$; 3) 0.

9. Найдите $\dfrac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, \theta)}$ для отображения, определяемого по формулам

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\,\sin\theta, \\ y = r\sin\varphi\,\sin\theta, \\ z = r\cos\theta. \end{cases}$$

Альтернативы для выбора ответа 1 – 3, где:

1) $-r^2\sin\theta$; 2) $r^2\sin\theta$; 3) $r^2\sin\theta(\cos 2\varphi - \cos 2\theta)$.

6.4. Геометрический смысл модуля якобиана

Пусть $f\colon X \to Y$ – взаимно-однозначное отображение, определяемое по формулам $\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \end{cases}$ где функции $x(u, v)$ и $y(u, v)$ непрерывны и дифференцируемы.

Тогда прямоугольник $ABCD$ (рис. 36) при отображении f переходит в криволинейный четырёхугольник $A'B'C'D'$ (рис. 37).

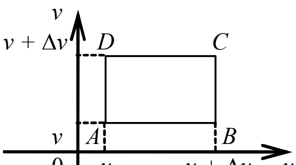


Рис. 36

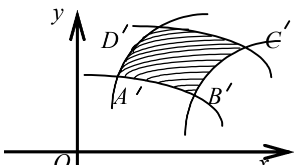


Рис. 37

Площадь прямоугольника $ABCD$ равна $d\sigma = \Delta u \cdot \Delta v$.

Можно доказать, что при малых Δu, Δv площадь четырёхугольника $A'B'C'D'$ приближенно равна $ds = \left|\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| d\sigma$.

Отсюда следует, что $\left|\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|$ характеризует растяжение элемента площади в окрестности точки (u, v) при отображении f и поэтому называется коэффициентом растяжения.

Аналогично, пусть f: $X \to Y$ взаимно-однозначное отображение, определяемое формулами

$$\begin{cases} x = x(u, v, w), \\ y = y(u, v, w), \\ z = z(u, v, w), \end{cases}$$

где функции $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$ непрерывны и дифференцируемы.

Тогда $\left|\dfrac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right|$ есть коэффициент растяжения элемента объёма.

Пример 6.4.1. Найти коэффициент растяжения элемента площади в точке $M_0(1, 1)$ при отображении $\boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$**,** определяемом по формулам

$$\begin{cases} u = \dfrac{x}{x^2+y^2}, \\ v = \dfrac{y}{x^2+y^2}. \end{cases}$$

Найдём якобиан отображения $\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}$:

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} & -\dfrac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2} \\ -\dfrac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2} & \dfrac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} \end{vmatrix};$$

$$\left.\frac{D(u,v)}{D(x,y)}\right|_{M_0} = \left\|\begin{matrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{4};\ k(M_0) = \frac{1}{4}.$$

Задание 6.4

1. Выразите ds (элемент площади в xOy) через $d\sigma$ (элемент площади в $\rho O\varphi$) при отображении, определяемом по формулам $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases}$

Альтернативы для выбора ответа 1 – 4, где:

1) $ds = \rho d\sigma$; 2) $ds = \frac{1}{\rho} d\sigma$;

3) $ds = (\cos\varphi d\rho - \rho\sin\varphi d\varphi)\cdot(\sin\varphi d\rho + \rho\cos\varphi d\varphi)$;

4) $ds = -\rho\sin\varphi \cdot \rho\cos\varphi d\varphi$.

2. Выразите $d\sigma$ (элемент площади в uov) через ds (элемент площади в xOy) при отображении, определяемом по формулам $\begin{cases} u = xy, \\ v = \frac{y}{x}. \end{cases}$

Альтернативы для выбора ответа 1 – 3, где:

1) $d\sigma = \left(\frac{y}{x} + xy\right) dxdy$; 2) $d\sigma = \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right) dxdy$; 3) $d\sigma = 2\left|\frac{y}{x}\right| dxdy$.

3. Выразите элемент площади ds в xoy через элемент площади $d\sigma$ в uov при отображении, определяемом по формулам $f: \begin{cases} u = xy, \\ v = \frac{y}{x}. \end{cases}$

Альтернативы для выбора ответа 1 – 3, где:

1) $ds = \frac{1}{2|v|} d\sigma$; 2) $ds = \frac{v+u}{4v\sqrt{uv}} d\sigma$; 3) $ds = \frac{\sqrt{v}-\sqrt{u}}{4v\sqrt{u}} d\sigma$.

4. Сравните коэффициенты растяжения при отображении $\boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$, определяемом по формулам $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$ в точках $M_1(2, 1)$ и $M_2(1, 2)$ (даны декартовы координаты x и y).

Альтернативы для выбора ответа 1 – 3, где:

1) $k(M_1) < k(M_2)$; 2) $k(M_1) = k(M_2)$; 3) $k(M_1) > k(M_2)$.

5. Сравните коэффициенты растяжения при отображении $\boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$, определяемом по формулам $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$ в точках $M_1(3, 4)$ и $M_2(5, 12)$ (даны декартовы координаты точек).

Альтернативы для выбора ответа 1 – 3, где:

1) $k(M_1) < k(M_2)$; 2) $k(M_1) = k(M_2)$; 3) $k(M_1) > k(M_2)$.

6. Сравните коэффициенты растяжения $\frac{D(\rho,\varphi)}{D(x,y)}$ при отображении, определяемом по формулам $\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \end{cases}$ в точках $M_1(2, 1)$ и $M_2(1, 2)$ (даны декартовы координаты x и y).

Альтернативы для выбора ответа 1 – 3, где:

1) $k(M_1) < k(M_2)$; 2) $k(M_1) = k(M_2)$; 3) $k(M_1) > k(M_2)$.

7. Дано отображение f, определяемое формулами $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$

Найдите выражение элемента объёма dV_{xyz} через элемент $dV_{\rho\varphi z}$.

Альтернативы для выбора ответа 1 – 2, где:

1) $dV_{xyz} = \rho dV_{\rho\varphi z}$; 2) $dV_{xyz} = \frac{1}{\rho} dV_{\rho\varphi z}$.

8. Дано отображение f, определяемое формулами

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\theta. \end{cases}$$

Найдите выражение элемента объёма dV_{xyz} через элемент $dV_{r\varphi\theta}$.

Альтернативы для выбора ответа 1 – 4, где:

1) $dV_{xyz} = r^2\sin\theta dV_{r\varphi\theta}$; 2) $dV_{xyz} = r^2|\sin\theta| dV_{r\varphi\theta}$;

3) $dV_{xyz} = \frac{1}{r^2\sin\theta} dV_{r\varphi\theta}$; 4) $dV_{xyz} = \frac{1}{r^2|\sin\theta|} dV_{r\varphi\theta}$.

6.5. Свойства матриц Якоби и якобианов

Свойства матриц Якоби и якобианов сформулированы в двух следующих теоремах.

Теорема 6.5.1. *Пусть*

1) φ – *отображение* $T \subset \boldsymbol{R}^n \to X \subset \boldsymbol{R}^n$, *осуществляемое по формулам*

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(t_1, t_2, \ldots, t_n), \\ x_2 = \varphi_2(t_1, t_2, \ldots, t_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n = \varphi_n(t_1, t_2, \ldots, t_n), \end{cases}$$

непрерывно дифференцируемо в точке $t(t_1, t_2, \dots, t_n)$ *и A – его матрица Якоби;*

2) *f – отображение* $X \subset \boldsymbol{R}^n \to Y \subset \boldsymbol{R}^n$, *определяемое по формулам*

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ y_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{cases},$$

непрерывно дифференцируемо в точке $x(x_1, x_2, \dots, x_n)$, *соответствующей точке* $t(t_1, t_2, \dots, t_n)$ *при отображении* φ, *и B – его матрица Якоби.*

Тогда композиция отображений

$$f \circ \varphi : \begin{cases} y_1 = f_1(\varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_n), \varphi_2(t_1, t_2, \dots, t_n), \dots, \varphi_n(t_1, t_2, \dots, t_n)), \\ y_2 = f_2(\varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_n), \varphi_2(t_1, t_2, \dots, t_n), \dots, \varphi_n(t_1, t_2, \dots, t_n)), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = f_n(\varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_n), \varphi_2(t_1, t_2, \dots, t_n), \dots, \varphi_n(t_1, t_2, \dots, t_n)) \end{cases}$$

непрерывно дифференцируема в точке $t(t_1, t_2, \dots, t_n)$ *и её матрица Якоби C = BA, а* $\det C = \det B \cdot \det A$.

Пример 6.5.1. Построить композицию отображений $f \circ \varphi$, проверить свойства матриц Якоби и якобианов, если $\varphi : \begin{cases} u = x + y \\ v = (x - y)^2 \end{cases}$, $f : \begin{cases} p = u + v \\ q = u - v. \end{cases}$

Найдём матрицы Якоби и якобианы указанных отображений

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2(x - y) & -2(x - y) \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \; \det A = -4(x - y), \; \det B = -2 .$$

Составим композицию отображений

$$f \circ \varphi : \begin{cases} p = (x + y) + (x - y)^2, \\ q = (x + y) - (x - y)^2. \end{cases}$$

Найдём матрицу Якоби композиции

$$C = \begin{pmatrix} 1 + 2(x - y) & 1 - 2(x - y) \\ 1 - 2(x - y) & 1 + 2(x - y) \end{pmatrix},$$

$\det C = [1 + 2(x - y)]^2 - [1 - 2(x - y)]^2 = 8(x - y)$.

Проверим равенства $C = BA$ и $\det C = \det B \cdot \det A$:

$$BA=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2(x-y) & -2(x-y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2(x-y) & 1-2(x-y)\\ 1-2(x-y) & 1+2(x-y)\end{pmatrix}=C,$$

$$\det B\det A=(-2)(-4)(x-y)=8(x-y)=\det C.$$

Теорема 6.5.2. *Пусть*

1) φ – *взаимно-однозначное непрерывно-дифференцируемое отображение множеств* $X\subset$ $\boldsymbol{R}^n$ и $Y\subset$ $\boldsymbol{R}^n$ *с матрицей Якоби* A;

2) *обратное отображение* φ^{-1} *также непрерывно дифференцируемо и его матрица Якоби равна* B.

Тогда 1) $A\cdot B=B\cdot A=E$, 2) $\det A\cdot\det B=\det B\cdot\det A=1$.

Пример 6.5.2. Является ли взаимно-однозначным отображение $\varphi:\begin{cases}u=e^{x+y},\\ v=e^{x-y}\end{cases}$ на множестве $\boldsymbol{R}^2$? Если да, то найти и проверить свойства матриц Якоби прямого и обратного отображений.

Проверим взаимную однозначность отображения, т. е. убедимся, что любым двум различным точкам из $\boldsymbol{R}^2$ соответствуют различные точки из $X=\{(u,v)\colon\ u>0,\ v>0\}$.

Возьмём две разные точки $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$, найдём условие, при котором они переходят в одну и ту же точку. Получим

$$\begin{cases}e^{x_1+y_1}=e^{x_2+y_2},\\ e^{x_1-y_1}=e^{x_2-y_2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+y_1=x_2+y_2,\\ x_1-y_1=x_2-y_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=x_2,\\ y_1=y_2.\end{cases}$$

Найдём матрицу Якоби и якобиан заданного отображения

$$A=\begin{pmatrix}e^{x+y} & e^{x+y}\\ e^{x-y} & -e^{x-y}\end{pmatrix},\quad \det A=-2e^{2x}.$$

Найдём обратное отображение $\varphi^{-1}:\begin{cases}x=\frac{1}{2}(\ln u+\ln v),\\ y=\frac{1}{2}(\ln u-\ln v),\end{cases}$ где $u>0, v>0$.

Найдём матрицу Якоби и якобиан обратного отображения

$$B=\begin{pmatrix}\frac{1}{2u} & \frac{1}{2v}\\ \frac{1}{2u} & -\frac{1}{2v}\end{pmatrix},\quad \det B=-\frac{1}{2uv}.$$

Тогда

$$AB=\begin{pmatrix}e^{x+y} & e^{x+y}\\ e^{x-y} & -e^{x-y}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{2}e^{-(x+y)} & \frac{1}{2}e^{-(x-y)}\\ \frac{1}{2}e^{-(x+y)} & -\frac{1}{2}e^{-(x-y)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E.$$

$$\det A \cdot \det B = -2e^{2x}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{e^{2x}} = 1\,.$$

Задание 6.5

1. Найдите матрицу Якоби и якобиан $\dfrac{D\,(p,q)}{D\,(u,v)}$ отображения $f : U \to P$, определяемого по формулам $\begin{cases} p = u + v, \\ q = u - v. \end{cases}$

Альтернативы для выбора ответа 1 – 3, где:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, 0; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, 0; 3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, -2.

2. Найдите матрицу Якоби и якобиан $\dfrac{D\,(u,v)}{D\,(x\,,y)}$ отображения $\varphi :\ X \to U$, определяемого по формулам $\begin{cases} u = x^2 - y^2, \\ v = x^2 + y^2. \end{cases}$

Альтернативы для выбора ответа 1 – 3, где:

1) $\begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2x & 2y \end{pmatrix}$, 0; 2) $\begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2x & 2y \end{pmatrix}$, 0; 3) $\begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2x & 2y \end{pmatrix}$, $8xy$.

3. Составьте композицию отображений

$$\varphi : X \to U\,,\quad \begin{cases} u = x^2 - y^2, \\ v = x^2 + y^2 \end{cases} \quad \text{и} \quad f : U \to P\,,\ \begin{cases} p = u + v, \\ q = u - v. \end{cases}$$

Альтернативы для выбора ответа 1 – 3, где:

1) $\begin{cases} p = 2x^2, \\ q = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} p = 2x^2, \\ q = 2y^2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} p = 2x^2, \\ q = -2y^2. \end{cases}$

4. Найдите матрицу Якоби и якобиан композиции отображений

$$\varphi : X \to U\,,\quad \begin{cases} u = x^2 - y^2, \\ v = x^2 + y^2 \end{cases} \quad \text{и} \quad f : U \to P\,,\quad \begin{cases} p = u + v, \\ q = u - v. \end{cases}$$

Альтернативы для выбора ответа 1 – 3, где:

1) 0; 2) $\begin{pmatrix} \text{4›} & 0 \\ 0 & \text{4—} \end{pmatrix}$, $16xy$; 3) $\begin{pmatrix} \text{4›} & 0 \\ 0 & -\text{4—} \end{pmatrix}$, $-16xy$.

5. Выполняется ли равенство $\dfrac{D\,(p,q)}{D\,(u,v)} \cdot \dfrac{D\,(u,v)}{D\,(x\,,y)} = \dfrac{D\,(p,q)}{D\,(x\,,y)}$ для отображений $\varphi : X \to U$, $\begin{cases} u = x^2 - y^2, \\ v = x^2 + y^2 \end{cases}$ и $f : U \to P$, $\begin{cases} p = u + v, \\ q = u - v\,? \end{cases}$

6. Найдите отображение f^{-1}, обратное к отображению $f: U \to P$, определяемому по формулам $\begin{cases} p = u + v, \\ q = u - v. \end{cases}$

Альтернативы для выбора ответа 1 – 2, где:

1) $\begin{cases} u = p + q, \\ v = p - q; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} u = \frac{1}{2}(p + q), \\ v = \frac{1}{2}(p - q). \end{cases}$

7. Найдите матрицу Якоби и якобиан отображения f^{-1}, обратного к $f: U \to P$, определяемого по формулам $\begin{cases} p = u + v, \\ q = u - v. \end{cases}$

Альтернативы для выбора ответа 1 – 3, где:

1) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, -\frac{1}{2}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, -2$; 3) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, 0$.

8. Выполняется ли равенство $\frac{D(p, q)}{D(u, v)} \cdot \frac{D(u, v)}{D(p, q)} = 1$, если $f: U \to P$ определяется по формулам $\begin{cases} p = u + v, \\ q = u - v \end{cases}$?

6.6. Системы функций, заданных неявно

Пусть задана система m уравнений

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m) = 0, \\ F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_m(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m) = 0. \end{cases} \quad (6.1.1)$$

Определение 6.6.1. *Решение системы* (6.6.1)

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), y_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, y_m = f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

называется совокупностью неявных функций, определяемых системой уравнений (6.6.1).

Теорема 6.6.1. *Пусть выполняются четыре условия:*

1) *функции F_1, F_2, …, F_m дифференцируемы в некоторой окрестности точки $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0)$;*

2) *частные производные* $\frac{\partial F_\alpha}{\partial y_i}$, $\alpha = \overline{1, m}$; $i = \overline{1, n}$ *непрерывны в точке* M_0;

3) $F_\alpha(M_0)=0$; 4) $\left.\dfrac{D(F_1,F_2,\ldots,F_m)}{D(y_1,y_2,\ldots,y_m)}\right|_{M_0}\neq 0$.

Тогда найдётся такая окрестность точки M_0*, в которой существует единственная совокупность неявных функций* $y_\alpha=f_\alpha(x_1,x_2,\ldots,x_n)$*, определяемых системой* (6.6.1), *причём:*

а) $y_\alpha^0=f_\alpha\left(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0\right)$*;*

б) функции $y_\alpha=f_\alpha(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ *непрерывны вместе со своими частными производными в окрестности точки* M_0.

Как можно найти частные производные совокупности неявных функций, определяемых системой уравнений (6.6.1)? Предполагая, что в систему (6.6.1) вместо переменных y_a подставлены её решения $y_\alpha=f_\alpha(x_1,\,x_2,\ldots,\,x_n)$, продифференцируем её по некоторой переменной x_i, в результате получим систему m тождеств

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F_1}{\partial x_i}+\dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_i}+\ldots+\dfrac{\partial F_1}{\partial y_m}\dfrac{\partial y_m}{\partial x_i}=0,\\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x_i}+\dfrac{\partial F_2}{\partial y_1}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_i}+\ldots+\dfrac{\partial F_2}{\partial y_m}\dfrac{\partial y_m}{\partial x_i}=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \dfrac{\partial F_m}{\partial x_i}+\dfrac{\partial F_m}{\partial y_1}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_i}+\ldots+\dfrac{\partial F_m}{\partial y_m}\dfrac{\partial y_m}{\partial x_i}=0.\end{cases}$$

Найденная система представляет систему m линейных уравнений относительно $\dfrac{\partial y_\alpha}{\partial x_i}$, её определитель есть якобиан $\left.\dfrac{D(F_1,F_2,\ldots F_m)}{D(y_1,y_2,\ldots y_m)}\right|_{M_0}\neq 0$ (по условию 4 теоремы 6.6.1).

Следовательно, такая система имеет единственное решение относительно $\dfrac{\partial y_\alpha}{\partial x_i}$ в окрестности точки M_0, которое может быть найдено по формулам

$$\frac{\partial y_\alpha}{\partial x_i}=-\frac{\dfrac{D(F_1,F_2,\ldots,F_m)}{D\left(y_1,\ldots,y_{a-1},x_i,y_{a+1},\ldots,y_m\right)}}{\dfrac{D(F_1,F_2,\ldots,F_m)}{D(y_1,y_2,\ldots,y_m)}} \tag{6.6.2}$$

где $\alpha=\overline{1,m}$, $i=\overline{1,n}$.

Пример 6.6.1. Определяет ли система уравнений $\begin{cases} u+v-x=0, \\ u-yv=0 \end{cases}$ в окрестности точки $M_0(0, 2, 0, 0)$ неявные функции $u=u(x,y)$ и $v=v(x,y)$?

Проверим выполнение условий теоремы:

а) функции $F_1=u+v-x$ и $F_2=u-yv$ дифференцируемы в любой точке $M(x,y,u,v)\in \boldsymbol{R}^4$;

б) частные производные $\frac{\partial F_1}{\partial u}=1$, $\frac{\partial F_1}{\partial v}=1$, $\frac{\partial F_1}{\partial x}=-1$, $\frac{\partial F_1}{\partial y}=0$, $\frac{\partial F_2}{\partial x}=0$, $\frac{\partial F_2}{\partial y}=-v$, $\frac{\partial F_2}{\partial u}=1$, $\frac{\partial F_2}{\partial v}=-y$ непрерывны в любой точке $M\in \boldsymbol{R}^4$;

в) $F_1(M_0)=0$, $F_2(M_0)=0$;

г) $\frac{D(F_1,F_2)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -y \end{vmatrix}_{M_0}=(-2-1)=-3\neq 0$.

Следовательно, найдётся такая окрестность точки $M_0(0, 2, 0, 0)$, в пределах которой данная система уравнений определяет единственную пару функций $u=u(x,y)$ и $v=v(x,y)$.

Разрешая систему относительно переменных *u* и *v*, находим $u=\frac{yx}{y+1}$, $v=\frac{x}{y+1}$. Очевидно, что в качестве такой окрестности можно взять, например, открытый шар $x^2+(y-2)^2+u^2+v^2<3$.

Убедимся в том, что координаты точки M_0 удовлетворяют уравнениям, определяющим найденные функции. Получаем, что $u=\left.\frac{yx}{y+1}\right|_{\substack{x=0,\\ y_0=2}}=0$, $v=\left.\frac{x}{y+1}\right|_{\substack{x=0,\\ y=2}}=0$.

Кроме того, в указанной окрестности найденные функции непрерывны вместе со своими частными производными.

Пример 6.6.2. Найти частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial x}$ совокупности неявных функций $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$, определяемых системой $\begin{cases} u+v-x=0, \\ u-yv=0 \end{cases}$ в окрестности точки $x_0=0$, $y_0=2$, $u_0=v_0=0$.

Дифференцируя каждое уравнение системы по x, получаем систему для частных производных $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial x}$ $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}=1, \\ \frac{\partial u}{\partial x}-y\frac{\partial v}{\partial x}=0, \end{cases}$ решая которую, находим, что $\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{1+y}$, $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{1+y}$.

Те же частные производные можно найти по формулам (6.6.2):

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\frac{D(F_1,F_2)}{D(x,v)}}{\frac{D(F_1,F_2)}{D(u,v)}}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\frac{D(F_1,F_2)}{D(u,x)}}{\frac{D(F_1,F_2)}{D(u,v)}},$$

где $F_1(x,y,u,v)=u+v-x$, $F_2(x,y,u,v)=u-yv$.

Задание 6.6

1. Найдите $\frac{\partial u}{\partial x}$, если $\begin{cases} u+v=x+y, \\ xu+yv=1. \end{cases}$

Альтернативы для выбора ответа 1 – 4, где:

1) $-\frac{u+y}{x-y}$; 2) $\frac{u+x}{x-y}$; 3) $-\frac{v+y}{x-y}$; 4) $\frac{v+x}{x-y}$.

2. Найдите $\frac{\partial u}{\partial y}$, если $\begin{cases} u+v=x+y, \\ xu+yv=1. \end{cases}$

Альтернативы для выбора ответа 1 – 4, где:

1) $\frac{u+y}{x-y}$; 2) $-\frac{v+x}{y-x}$; 3) $\frac{y+v}{y-x}$; 4) $\frac{v+x}{y-x}$.

3. Найдите $\frac{\partial v}{\partial x}$, если $\begin{cases} u+v=x+y, \\ xu+yv=1. \end{cases}$

Альтернативы для выбора ответа 1 – 4, где:

1) $\frac{u+x}{x-y}$; 2) $-\frac{v+x}{y-x}$; 3) $\frac{v+x}{y-x}$; 4) $\frac{u+v}{y-x}$.

4. Найдите $\frac{\partial u}{\partial x}$, если $\begin{cases} u+v-x=0, \\ u-yv=0. \end{cases}$

Альтернативы для выбора ответа 1 – 2, где:

1) $\frac{y}{y+1}$; 2) $\frac{y}{y-1}$.

5. Найдите $\frac{\partial u}{\partial y}$, если $\begin{cases} u+v-x=0, \\ u-yv=0. \end{cases}$

Альтернативы для выбора ответа 1 – 2, где:

1) $\dfrac{x}{(1+y)^2}$;   2) $\dfrac{y}{(1-y)^2}$.

6. Найдите $\dfrac{\partial v}{\partial x}$, если $\begin{cases} u+v-x=0, \\ u-yv=0. \end{cases}$

Альтернативы для выбора ответа 1 – 2, где:

1) $\dfrac{1}{1+y}$;   2) $\dfrac{1}{1-y}$.

7. Найдите $\dfrac{\partial v}{\partial y}$, если $\begin{cases} u+v-x=0, \\ u-yv=0. \end{cases}$

Альтернативы для выбора ответа 1 – 2, где:

1) $-\dfrac{x}{(1+y)^2}$;   2) $\dfrac{y}{(1-y)^2}$.

6.7. Зависимые и независимые системы функций

Пусть в области $D \subset R^n$ заданы m дифференцируемых функций

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ y_m = f_m(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{cases} \tag{6.7.1}$$

Определение 6.7.1. *Функция* $y_k = f_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *называется зависимой в области D от остальных функций, если*

$$y_k = \varphi(y_1, y_2, \dots y_{k-1}, y_{k+1}, \dots, y_m),$$

где φ *– дифференцируемая функция.*

Определение 6.7.2. *Функции* (6.7.1) *называются зависимыми в области D, если хотя бы одна из них в этой области зависит от остальных. Если же ни одна из функций не зависит от остальных, то функции* (6.7.1) *называются независимыми в области D.*

Пример 6.7.1. Зависима ли система функций $y_1 = x_1 + x_2 + x_3$, $y_2 = x_1 + x_3$, $y_3 = x_2$?

Ясно, что $y_1 = y_2 + y_3$, и система данных функций зависима всюду на $\boldsymbol{R}^3$.

Теорема 6.7.1. *Пусть выполняются 2 условия:*

1) *функции*

$y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$, …, $y_m = f_m(x_1, x_2, \dots, x_n)$,

$(m \le n)$ *дифференцируемы в окрестности точки* $M_0\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$*;*

2) *якобиан этих функций по каким-либо переменным не равен нулю в точке* M_0.

Тогда эти функции независимы в окрестности точки M_0.

Пример 6.7.2. Исследовать на независимость систему функций

$$y_1 = e^{x_1} + 3,$$

$$y_2 = x_1 + 2e^{x_2} - 4,$$

$$y_3 = 3x_1 - x_2 - e^{x_3} + x_4.$$

Данные функции определены и дифференцируемы всюду на $\boldsymbol{R}^4$.

Матрица Якоби системы функций имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} e^{x_1} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2e^{x_2} & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -e^{x_3} & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим определитель 3-го порядка этой матрицы

$$\begin{vmatrix} e^{x_1} & 0 & 0 \\ 1 & 2e^{x_2} & 0 \\ 3 & -1 & -e^{x_3} \end{vmatrix} = -2e^{x_1+x_2+x_3} \ne 0 \text{ ни в одной точке на } \boldsymbol{R}^4.$$

Следовательно, функции y_1, y_2, y_3 независимы всюду на $\boldsymbol{R}^4$.

Теорема 6.7.2. *Пусть выполняются четыре условия:*

1) *функции* $y_1, y_2, \ldots, y_m$ *дифференцируемы в некоторой окрестности точки* $M_0\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$*;*

2) *частные производные* $\dfrac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}$ $\left(\alpha = \overline{1,m},\ i = \overline{1,n}\right)$ *непрерывны в точке* M_0;

3) *матрица Якоби* $\left(\dfrac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}\right)$ *имеет минор порядка r, не равный* 0 *в точке* M_0*;*

4) *все миноры порядка* $r+1$ *равны нулю.*

Тогда функции, входящие в минор порядка r, независимы в окрестности точки M_0*, а все остальные зависят от этих r функций.*

Пример 6.7.3. Исследовать на зависимость систему функций

$$y_1 = xy + yz + zx,$$
$$y_2 = x + y + z,$$
$$y_3 = x^2 + y^2 + z^2$$

в окрестности точки $M_0(1, 2, 3)$.

Составим матрицу Якоби данной системы функций

$$A = \begin{pmatrix} y+z & x+z & y+x \\ 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix},$$

Рассмотрим определитель 2-го порядка, составленный из элементов двух первых строк и столбцов матрицы A

$$\begin{vmatrix} y+z & x+z \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = y - x .$$

Этот определитель обращается в нуль только в тех точках пространства, в которых $y = x$, в остальных он отличен от нуля.

Следовательно, в точках, где $y \neq x$, y_1 и y_2 независимы, а y_3 зависит от них.

Так как для точки $M_0(1, 2, 3)$ условие $y = x$ не выполняется, то найдётся такая окрестность этой точки, в которой любые две из указанных функций независимы, а третья зависит от них.

Задание 6.7

1. В какой области независима система функций $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$?

Альтернативы для выбора ответа 1 – 2, где:

1) Всюду в $\boldsymbol{R}^2$, кроме точки $O(0,0)$.

2) На всей плоскости $\boldsymbol{R}^2$.

2. Укажите область, в которой независима система функций

$$\begin{cases} u = xy, \\ v = \dfrac{y}{x}. \end{cases}$$

Альтернативы для выбора ответа 1 – 2, где:

1) на всей плоскости xOy;

2) На всей плоскости xOy за исключением осей Ox и Oy.

3. В какой области независима система функций $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z \end{cases}$?

Альтернативы для выбора ответа 1 – 3, где:

1) всюду в $\boldsymbol{R}^3$;

2) всюду в $\boldsymbol{R}^3$ за исключением точки $O(0,0,0)$;

3) всюду в $\boldsymbol{R}^3$ за исключением координатных осей.

4. Исследовать на зависимость систему функций

$$u = x + 2 - e^y,$$
$$v = x + 2 - e^z,$$
$$w = 2x + 2 - t.$$

Альтернативы для выбора ответа 1 – 2, где:

1) зависима; 2) независима.

5. Исследовать на зависимость систему функций

$$y_1 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - x_3,$$
$$y_2 = x_1^2 + x_2^2,$$
$$y_3 = \sqrt[4]{x_3}.$$

Альтернативы для выбора ответа 1 – 2, где:

1) зависима; 2) независима.

Ответы

1. Определение метрического пространства и некоторые топологические понятия в нём

Задание 1.1

Задача	1	2	3	4	5	6	7
Ответ	1	3	2	13	12	17	1

Задание 1.2

Задача	1.1	1.2	1.3	2.1	2.2	2.3	3.1	3.2	3.3	4.1	4.2	4.3	5
Ответ	2	3	4	4	2	3	2	4	1	3	1	2	2

Задание 1.3

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ответ	нет	да	4	да	да	2	нет	да	2	1

Задание 1.4

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8
Ответ	2	1	1	1	2	3	3	3

Задание 1.5

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8
Ответ	да	нет	да	нет	нет	да	нет	нет

Задание 1.6

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Ответ	3	3	(0, 0)	(1, –1)	(0, 0)	(0, e)	(0, 0)	2	да	нет	(2, 1, 1)	2	2

Задание 1.7

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Ответ	2	2	1	1	1	2	2	2	2	2	3

2. Определение, предел, непрерывность функций нескольких переменных

Задание 2.1

Задача	1	2	3	4	5	6	7
Ответ	2	1	2	4	2	2	4

Задание 2.2

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Ответ	1	3	2	4	5	3	3	1	4	3	4	3	4

Задание 2.3

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Ответ	2	0	2	1	3	4	1	–1	2	4	0

Задание 2.4

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Ответ	1	1	2	2	1	3	2	5	1	7	4

Задание 2.5

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ответ	да	да	2	(0, 0)	–2	(1, 2)	Да	нет	нет	нет

Задача	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
Ответ	нет	да	нет	нет	да	да	нет	нет	да	

3. Дифференцируемость функций нескольких переменных

Задание 3.1

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Ответ	1	3	2	1	5	e^{3y}	$x+\frac{1}{x}$	$3x^2\cos(3y+z)$	-2	-1	0	0

Задание 3.2

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8
Ответ	3	2	4	3	(2, 1)	2	135	(0, 0, 2)

Задание 3.3

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ответ	да	(0, 5)	2	2	2	4	$\frac{x}{z}$	$\frac{y}{z}$	-3	-1

Задание 3.4

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Ответ	2	4	11	3	5	9	10	7	1	6	3	6

Задание 3.5

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Ответ	2	нет	2	да	3	да	2	да	3	нет	2	нет	2

Задание 3.6

1	2	3	4	5
3	2	да	нет	нет

Задание 3.7

Задача	1	2	3	4	5
Ответ	$2x+4y-z-5=0$	$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-5}{-1}$	(0, 0, 4)	(1, 1, 2)	$\frac{x+2}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z-1}{-1}$

Задача	6	7	8	9	10
Ответ	1	$2x+4y-z-5=0$	$\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{0}$	(4, 4, –4) (–4, –4, 4)	(0, 0, 0)

Задание 3.8

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Ответ	2	3	1	4	1	6	3	3	2	3	1	4	2	5	2	3

4. Скалярное поле

Задание 4.1

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8
Ответ	нет	нет	сферы	3	4	3	2	5

Задание 4.2

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ответ	2	$\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$	$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	$\frac{41}{5}$	-63	$\sqrt{3}$	0	нет	нет	да

Задание 4.3

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Ответ	2	2	1	$\frac{1}{5}i+\frac{2}{5}j$	$\sqrt{2}$	i	да	3	3	3	1	$\sqrt{74}$

5. Формула Тейлора

Задание 5.1

Задача	1.1	1.2	1.3	2.1	2.2	2.3	3	4	5	6.1	6.2	6.3	7
Ответ	2	4	5	3	2	3	да	1, 2, 3	1, 2, 3	2	2	4	2

Задача	8	9	10.1	10.2	10.3	11	12
Ответ	1	2	4	3	1	да	да

Задание 5.2

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Ответ	3	4	1	2	нет	нет	3	2	6	4	3	3

Задание 5.3

Задача	1	2	3	4	5	6
Ответ	2	3	2	1	1	3

Задание 5.4

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Ответ	2	1	3	да	нет	3	2	нет	да	да	нет	1

Задание 5.5

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Ответ	(–2, 1) – min	1	(1, –2)	(0, 0) (1, 1)	2	3	2	2	3	3	3	3

Задание 5.6

Задача	1	2	3	4
Ответ	$\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right)$	2	2	3

Задание 5.7

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Ответ	нет	2	1	3	1	4	2	1	2	4	1

Задание 5.8

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Ответ	1	4	3	(1, 0)	1	1	3	–1	9	0	8	0

6. Отображения

Задание 6.1

Задача	1	2.1	2.2	2.3	3	4	5	6	7	8	9.1	9.2	9.3	9.4	10	11.1	11.2
Ответ	[0, 1]	4	3	1	3	4	[0, 4]	2	3	2	3	2	7	8	3	2	4

Задание 6.2

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Ответ	1	2	2	2	2	(1, 1)	2	1	2	2	3

Задание 6.3

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ответ	2	2	1	3	1	1	4	1	2

Задание 6.4

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8
Ответ	1	3	1	2	1	2	1	2

Задание 6.5

1	2	3	4	5	6	7	8
3	3	3	3	да	2	1	да

Задание 6.6

Задача	1	2	3	4	5	6	7
Ответ	1	3	1	1	1	1	1

Задание 6.7

1	2	3	4	5
1	2	2	2	1

ЛИТЕРАТУРА

1. Кудрявцев Л. Д. Краткий курс математического анализа / Л. Д. Кудрявцев. –М.; Наука, 1989. – 736 с.

2. Ильин В. А. Основы математического анализа. Ч.I /В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. –М.: Наука, 1982. – 616 с.

3. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. Т. 2 / Л. Д. Кудрявцев. –М.;Высшая школа, 1988. – 576 с.

4. Ильин В. А. Математический анализ / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Бл.Х. Сендов. –М.: Наука, 1979. – 720 с.

5. Бутузов В.Ф. Математический анализ в вопросах и задачах /В. Ф. Бутузов, Н. Ч. Крутицкая, Г. Н. Медведев и др. –М.: Высшая школа, 1993. – 480 с.

6. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу /Б. П. Демидович. –М.: Наука, 1990. –624 с.

7. Ляшко И. И. Математический анализ в примерах и задачах. Т.2 /И. И. Ляшко, А. К. Боярчук, Я. Г. Гай, Г. П. Головач. – Киев; Вища школа, 1977. – 672 с.

8. Бугров Я. С. Дифференциальное и интегральное исчисление /Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – Ростов н/Д; изд. “Феникс”, 1997. – 512 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Подскребко Эльвира Николаевна
Пестова Надежда Федосеевна

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ
ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Учебное пособие

Издание третье, переработанное

Научный редактор
доктор физико-математических наук,
профессор К.П. Арефьев

Отпечатано в редакции авторов

Подписано к печати 15.05.2008. Формат 60x84/16. Бумага «Классика».
Печать RISO. Усл.печ.л. 7,68. Уч.-изд.л. 6,94.
Заказ . Тираж 100 экз. Цена свободная

ISO 9001 Registered

Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Томского политехнического университета сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту ISO 9001:2000

UKAS QUALITY MANAGEMENT 015

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30.