РАЗДЕЛ VII

Числовые и функциональные ряды

Введение

> «*Без знания математики нельзя понять ни основ современной техники, ни того, как ученые изучают природные и социальные явления*».
>
> А.Н.Колмогоров (1903-1987)

Теория бесконечных рядов занимает центральное место в арсенале методов современной математики. Она играет роль технического орудия, вспомогательного аппарата, разнообразные применения которого пронизывают и математический анализ, и опирающиеся на него прикладные науки.

Составление таблиц значений логарифмов и тригонометрических таблиц не обходится без применения бесконечных рядов. Как известно, среди интегралов есть «неберущиеся», для которых первообразная функция не является элементарной. Как же ее найти? Как найти значение определенного интеграла?

Интеграл $\int_a^b e^{-x^2}dx$ играет важную роль в теории вероятностей, теории надежности и их приложениях, а найти его классическими методами нельзя, т.к. интеграл «неберущийся»!

Интеграл $\int_{+\infty}^{-ix}\frac{e^{-u}}{u}du$ имеет приложения в электротехнике, а он опять «неберущийся».

Интеграл $\int_0^x\frac{\sin x}{x}dx$ часто встречается при изучении некоторых разделов теоретической физики, а он снова «неберущийся»!

На помощь приходит операция разложения подынтегральной функции в степенной ряд.

В математической физике (задача о колебаниях струны и др.) и во многих разделах техники находят большое применение тригонометрические ряды Фурье и «обобщенные ряды Фурье» – разложения по другим системам ортогональных функций.

Начиная с 20-х годов 20-го века разложение функций в ряд Фурье необычайно широко распространилось в связи с бурным развитием радиотехники, акустики, колебательной механики, импульсной техники и других. Была установлена прямая связь между разложением Фурье и поведением реальных колебательных систем, между представлением функции в виде интеграла Фурье и плотностью распределения сигнала на данной частоте.

Приведем методические указания к выполнению некоторых заданий.

Задача 1. Что Вы можете сказать о сходимости ряда на основании только необходимого признака сходимости?

Решение. Применим свое знание программы (вопрос 7.1.3, табл.7).

Пусть даны ряды а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^2+9}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$.

Находим $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^2+9}$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\frac{n^2}{n^2+9}=1\neq 0$, следовательно, не выполняется необходимый признак сходимости и ряд расходится.

Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\pi}{n^3}=0$.

Необходимый признак выполняется, следовательно, ничего о сходимости или расходимости ряда сказать нельзя. Ряд может быть как сходящимся, так и расходящимся. Требуются дополнительные исследования.

Задача 2. Найдите область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{2n}}{n4^n}$.

Решение. Ряд степенной, но условие $a_n \neq 0$ для $\forall n$ не выполняется, поэтому не будем применять формулу $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{c_n}{c_{n+1}}\right)$ для нахождения радиуса сходимости, т. к. её применение может привести к неверному результату.

Воспользуемся признаком Даламбера, поскольку $\frac{(x+2)^{2n}}{n4^n}>0$, ряд законоположительный для любого значения x. Найдем

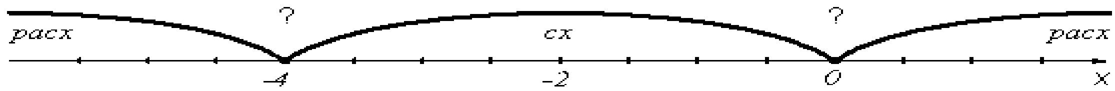
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(x+2)^{2(n+1)}n\cdot 4^n}{(n+1)\cdot 4^{n+1}(x+2)^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(x+2)^2}{4}\cdot\frac{n}{n+1}=\frac{(x+2)^2}{4}=l.$$

При $l<1$ ряд сходится, при $l>1$ ряд расходится, при $l=1$ признак ответа не дает. Решаем соответствующие неравенства:

$$\frac{(x+2)^2}{4}<1\Leftrightarrow\frac{|x+2|}{2}<1\Leftrightarrow|x+2|<2\Leftrightarrow -4<x<0;$$

$$\frac{(x+2)^2}{4}>1\Leftrightarrow\frac{|x+2|}{2}>1\Leftrightarrow|x+2|>2\Leftrightarrow x\in(-\infty,-4)\cup(0,\infty).$$

Находим интервалы сходимости и расходимости ряда:



Исследуем сходимость ряда на концах интервала.

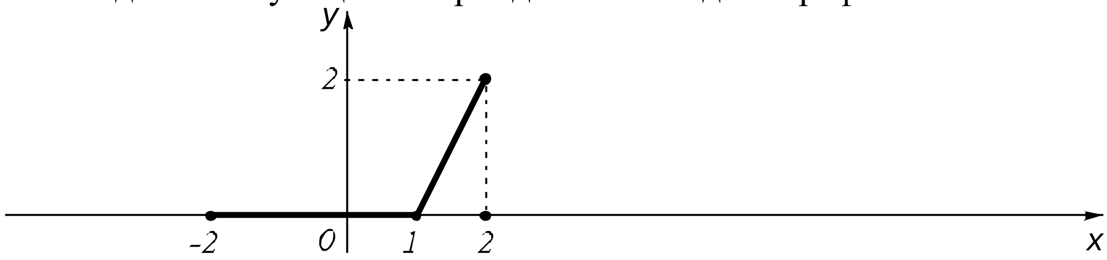
Если $x_1 = -4$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-4+2)^{2n}}{n\cdot 4^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^{2n}}{n\cdot 4^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

Получаем гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, $p = 1$. Ряд расходится. При $x_2 = 0$ получаем тот же ряд.

Ответ. $D = (-4, 0)$.

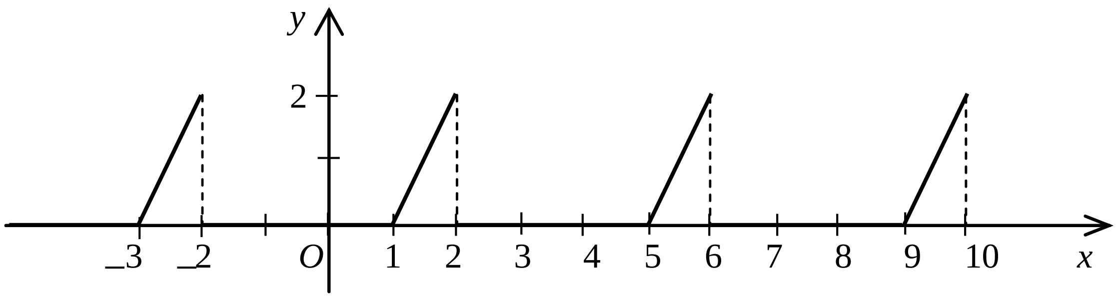
Замечание. В процессе выполнения выкладок Вы можете ошибиться: неправильно разделить дробь на дробь, потерять знак модуля. Всегда помните, что область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n(x-x_0)^n$ – интервал с центром в точке x_0, а никакое другое множество.

Задача 3. Функция с периодом $T = 4$ задана графически:



Найдите сумму ее ряда Фурье в точках $x_1 = 1$, $x_2 = 5{,}5$, $x_3 = 6$, $x_4 = 9$.

Решение. Проверим условия теоремы Дирихле (функция периодическая, кусочно-монотонная и кусочно-непрерывная). Продолжим ее периодически.



По теореме Дирихле ряд Фурье сходится к значению функции в каждой точке непрерывности и к полусумме односторонних пределов в каждой точке разрыва, т.е. если x_0 – точка непрерывности функции, то $s(x_0) = f(x_0)$, если x_0 – точка разрыва, то $s(x_0) = \dfrac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$.

Руководствуясь этой информацией, исследуем на непрерывность функцию в точках x_1, x_2, x_3, x_4. Предварительно найдем аналитическую запись для функции на (–2, 2): $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-2, 1); \\ 2x - 2, & x \in [1, 2). \end{cases}$

Имеем:

а) $x_1 = 1$ – точка непрерывности функции $s(1) = f(1) = 0$.

б) $x_2 = 5{,}5$, в силу периодичности функции $f(5{,}5) = f(5{,}5 - T) = f(1{,}5)$. Следовательно, $s(5{,}5) = f(1{,}5) = 1$.

в) $x_3 = 6$, в силу периодичности функции $f(6) = f(6 - 4) = f(2)$.

г) $s(2) = \dfrac{f(2-0) + f(2+0)}{2} = \dfrac{2+0}{2} = 1$

д) $x_4 = 9$, в силу периодичности функции $f(9) = f(9 - 2T) = f(1) = 0$, x_4 есть точка непрерывности функции $s(1) = f(1) = 0$.

Таблица 7

Кодификатор раздела
«Числовые и функциональные ряды»

Код: раздел	Код: тема	Код: вопрос	Содержание	Проверяемое умение
7			Числовые и функциональные ряды	
	7.1		Числовые ряды, основные определения и свойства	
		7.1.1	Понятие числового ряда. Определения частичной суммы ряда, сходящегося ряда, суммы ряда.	Уметь записать конкретную частичную сумму, найти ее, и по определению найти сумму ряда в некоторых простых случаях ($a_n = aq^{n-1}$, $a_n = \dfrac{A}{n^2 + pn + q}$).
		7.1.2	Некоторые теоремы о рядах – о почленном умножении ряда на $\lambda \neq 0$, о сложении сходящихся рядов, об изменении конечного числа членов ряда.	Уметь применять свойства сходящихся рядов при исследовании рядов на сходимость.
		7.1.3	Необходимый признак сходимости ряда, следствие из него.	Уметь доказать теорему и умело применять ее и достаточный признак расходимости при исследовании конкретных рядов.

		7.1.4	Критерий Коши сходимости числового ряда.	Уметь сформулировать теорему и применить ее при исследовании ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$.
	7.2		Числовые ряды с неотрицательными членами	
		7.2.1	Критерий сходимости рядов с неотрицательными членами.	Уметь сформулировать и доказать критерий.
		7.2.2	Исследование сходимости ряда с помощью признака сравнения.	Уметь применять к исследованию сходимости ряда первую и вторую теоремы сравнения.
		7.2.3	Интегральный признак сходимости ряда.	Уметь применять к исследованию сходимости ряда интегральный признак Коши, в частности, исследовать сходимость эталонного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$
		7.2.4	Признак сходимости Даламбера в предельной форме.	Уметь доказать теорему и умело ее применять.
		7.2.5	Радикальный признак сходимости Коши.	Уметь сформулировать теорему и применить ее.
	7.3		Знакопеременные числовые ряды	
		7.3.1	Определения абсолютно сходящегося ряда и условно сходящегося ряда.	Уметь на основании определения указать, какой ряд является абсолютно сходящимся, какой – условно сходящимся.
		7.3.2	Свойства абсолютно сходящихся рядов и условно сходящихся рядов.	Уметь формулировать свойства и применять теоремы при операциях с рядами.
		7.3.3	Знакочередующиеся ряды. Теорема Лейбница, следствие об оценке остатка ряда.	Уметь исследовать на сходимость знакочередующийся ряд. Уметь оценить остаток ряда и найти сумму ряда с

				требуемой точностью.
	7.4		Функциональные ряды	
		7.4.1	Определение функционального ряда и его области сходимости.	Уметь находить область сходимости функционального ряда.
		7.4.2	Понятие равномерной сходимости функционального ряда. Критерий равномерной сходимости. Теорема Вейерштрасса.	Уметь применять признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда. Является ли этот признак необходимым? Привести контрпример.
		7.4.3	Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов. Теорема о непрерывности суммы ряда, о возможности почленного интегрирования и дифференцирования рядов.	Уметь применять теоремы для исследования свойств функциональных рядов, для отыскания суммы ряда.
	7.5		Степенные ряды	
		7.5.1	Определение степенного ряда. Теорема Абеля, следствие из нее.	Уметь привести примеры степенных рядов. Уметь доказать теорему Абеля и обосновать следствие.
		7.5.2	Теорема о структуре области сходимости степенного ряда. Радиус сходимости, центр интервала сходимости.	Уметь находить область сходимости степенного ряда.
		7.5.3	Свойства степенных рядов.	Уметь находить сумму степенного ряда, применяя теоремы о возможности почленного интегрирования и дифференцирования степенных рядов.
		7.5.4	Ряд Тейлора. Ряд Маклорена. Определение. Критерий	Уметь записать ряды Тейлора и Маклорена. Уметь сформулировать

			сходимости ряда. Достаточный признак сходимости.	критерий сходимости.
		7.5.5	Представление элементарных функций степенными рядами.	Уметь разложить в степенной ряд e^x, $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^m$ по определению. Уметь применять такие приёмы разложения функций в степенной ряд как: использование основных разложений, формулы суммы членов геометрической прогрессии, почленное интегрирование и дифференцирование ряда, представление рациональной дроби в виде суммы простых дробей.
		7.5.6	Применение степенных рядов в математическом анализе.	Уметь применять степенные ряды при вычислении пределов, вычислении определенных интегралов и значений функций с заданной точностью, при нахождении производных и первообразных, при решении дифференциальных уравнений.
	7.6		Ряды Фурье	
		7.6.1	Определение ортогональной системы вещественных функций.	Уметь доказать ортогональность тригонометрической системы функций.
		7.6.2	Ряд Фурье по ортогональной системе вещественных функций. Теорема о вычислении коэффициентов.	Уметь записать коэффициенты Фурье и ряд Фурье для конкретных ортогональных систем.
		7.6.3	Тригонометрический ряд Фурье ($T = 2\pi$, $T = 2l$). Теорема Дирихле.	Уметь записать тригонометрический ряд Фурье для периодической функции $f(x)$, проверить выполнение условий Дирихле, уметь найти $S(x_0)$

				для $\forall x_0 \in (-\infty, \infty)$, уметь построить $S_1(x)$, $S_2(x)$, где $S(x)$ – сумма ряда Фурье, а $S_n(x)$ – частичная сумма ряда.
		7.6.4	Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций. Представление рядом Фурье функций, заданных на интервалах $(0, \pi)$, $(0, l)$.	Уметь представить тригонометрическим рядом Фурье четные, нечетные функции.
		7.6.5	Физический смысл ряда Фурье.	
		7.6.6	Характер сходимости ряда Фурье. Экстремальное свойство частичных сумм ряда Фурье.	