РАЗДЕЛ VI

Функции нескольких переменных

Введение

”*Математическая модель, основанная на некотором упрощении, идеализации, не тождественна объекту, а является его приближённым отражением. Однако благодаря замене реального объекта соответствующей моделью, появляется возможность сформировать задачу его изучения как математическую и воспользоваться для анализа универсальным математическим аппаратом, который не зависит от конкретной природы объекта*.“

А Н. Тихомиров и Ф.П. Костомаров

Явления и процессы, протекающие в реальном мире, зависят от значительного количества факторов. Ограничиваясь только теми из них, которые существенно влияют на процесс, можно значительную часть явлений и процессов описать функциями многих переменных или даже одного переменного. Так в ”Кратком курсе высшей математики“ авторов В.А. Кудрявцева и Б.П. Демидовича находим: ”Например, путь s, пройденный свободно падающим телом за время t, зависит от следующих переменных: t – время падения, Q – площади поперечного сечения тела, φ – широты места, h – высоты места над уровнем моря, P – давления воздуха, T – температуры воздуха, η – коэффициенты вязкости воздуха и т.д. Так что мы должны написать: $S = f\,(t, Q, \varphi, h, P, T, \eta, \dots)$“

В первом приближении все переменные кроме времени t являются малосущественными. Игнорируя их, получим $s = f(t)$ и тем самым приходим к известной формуле

$$s = \frac{gt^2}{2},$$

где g – ускорение силы тяжести, которое считается постоянным.

Если хотя бы частично учесть роль других переменных, то мы будем иметь формулы для s всё более и более соответственно точные, зависящие от всё более и более возрастающего числа переменных

Примерами функций нескольких переменных являются:

$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$ – объём конуса, где R – радиус основания конуса, H – высота (функция двух переменных R и H);

$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$ – сила притяжения двух материальных масс, где $m_1 m_2$ – массы тел, r – расстояние между центрами масс тел, γ – гравитационная постоянная (функция трёх переменных m_1, m_2, r);

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ – расстояние между точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ в функции шести переменных x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2;

$T = T(x, y, z)$ – температурное поле – функция, сопоставляющая каждой точке $M(x, y, z)$ некоторого нагретого тела температуру T;

$m = m(x, y, z)$ – поле масс – функция, сопоставляющая каждой точке $M(x, y, z)$ некоторого тела массу m и т.д.

Рассмотрим решения некоторых типовых задач.

Задача 1. Найдите область определения функции $z = \sqrt{\frac{y - x^2}{x - y}}$ и изобразите её графически.

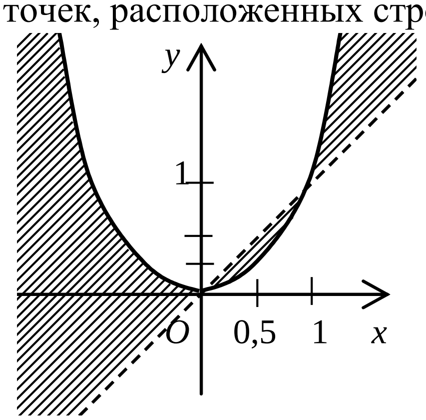
Решение. Учитывая, что корень квадратный определён только для неотрицательных значений подкоренного выражения и условие $x - y \neq 0$, находим:

$$\frac{y - x^2}{x - y} \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y - x^2 \geq 0, \\ x - y > 0; \end{cases} \\ \begin{cases} y - x^2 \leq 0, \\ x - y < 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

Следовательно, область определения представляет объединение двух множеств точек на плоскости.

Построение начинается с границ области: $y - x^2$ – парабола, $y = x$ – прямая.

Множество точек, определяемое системой $\begin{cases} y - x^2 \geq 0, \\ x - y > 0, \end{cases}$ находится в первой четверти и представляет пересечение двух множеств: множества точек, расположенных внутри параболы, включая границу, и множества точек, расположенных строго ниже прямой.



Вторая система неравенств $\begin{cases} y - x^2 \leq 0, \\ x - y < 0 \end{cases}$ определяет множество точек, расположенных ниже параболы, включая границу, и строго выше прямой.

Заштрихованная часть плоскости и есть область определения функции.

Задача 2. Дана функция $z = y^x$. Найдите $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{dz}{dx}$ при условии, что $y = y(x)$ – дифференцируемая функция.

Решение. При отыскании частной производной по x переменная y считается фиксированной. В этом случае функция $z = y^x$ является показательной и дифференцируется по правилу $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$. Поэтому $\frac{\partial z}{\partial x} = y^x \ln y$.

При отыскании частной производной $\frac{\partial z}{\partial y}$ переменная x считается фиксированной, тогда функция $z = y^x$ – степенная. Применяя правило дифференцирования степенной функции $\left(x^\alpha\right)' = \alpha x^{\alpha - 1}$, находим $\frac{\partial z}{\partial y} = xy^{x-1}$.

Во последнем случае имеем сложную функцию $z = y^x$, где $x = x$ и $y = y(x)$. Применяя к ней правило дифференцирования сложной функции $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}$, находим:

$$\frac{dz}{dx} = y^x \ln y \cdot 1 + xy^{x-1} \cdot y'(x), \text{ или } \frac{dz}{dx} = y^x\left(\ln y + y'(x)\right).$$

Задача 3. Катеты прямоугольного треугольника равны x = 6м и y = 8м. На сколько приблизительно изменится гипотенуза треугольника, если сторона x уменьшится на 5 см, а сторона y увеличится на 10 см.

Решение. Гипотенуза прямоугольного треугольника находится по формуле $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Для того, чтобы найти приблизительно изменение функции z, заменим её приращение Δz дифференциалом dz. Получим

$$\Delta z \approx dz = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\Delta x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\Delta y.$$

Учитывая все данные, находим

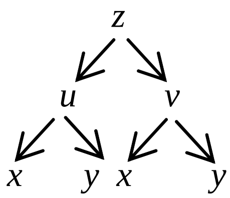
$$\Delta z \approx \frac{6(-0{,}05) + 8(0{,}10)}{\sqrt{36 + 64}} = 0{,}05\text{м}.$$

Гипотенуза увеличится приблизительно на 0,05м.

Задача 4. Пусть $z = z(u, v)$ – дважды дифференцируемая функция и $u = ax + by$, $v = bx^2 + ay^2$. Найдите $\frac{\partial^2 x}{\partial y \partial x}$.

Решение. В соответствии с определением частной производной второго порядка имеем $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)$. Для отыскания $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ применяем правило дифференцирования сложной функции, которое для функции двух переменных имеет вид

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}.$$



Запомнить правило помогает схема зависимости переменных *z, u, v, x, y*, где *u, v* – промежуточные переменные, а *x, y* – независимые переменные.

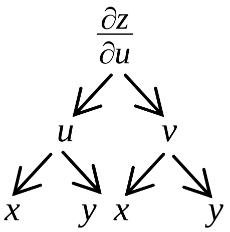
Находим $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial u} a + 2b\dfrac{\partial z}{\partial v} x$.

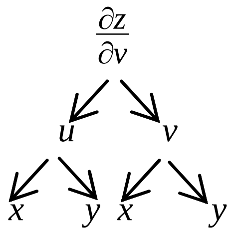
При отыскании смешанной частной производной второго порядка $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ сначала используем правила дифференцирования суммы и произведения, т.е.

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(a\frac{\partial z}{\partial u} + 2b\frac{\partial z}{\partial v}x\right) = a\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) + 2b\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial v}x\right) =$$

$$= a\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) + 2b\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)\cdot x + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial}{\partial y}(x)\right).$$

Для продолжения дифференцирования воспользуемся схемами зависимости переменных $\dfrac{\partial z}{\partial u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v}$, *u, v, x, y*.





С помощью схем находим

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = a\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u}\frac{\partial v}{\partial y}\right) + 2b\left(\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}\right)x + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot 0\right) =$$

$$= a\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot b + 2a\frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u}y\right) + 2b\left(b\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + 2a\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}y\right)x =$$

$$= ab\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2\left(a^2 y + b^2 x\right)\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + 4ab\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}xy.$$

Задача 5. Пусть А – множество функций $z = z(x, y)$, дифференцируемых в точке $M_0(x_0, y_0)$, и B – множество функций $z = z(x, y)$, имеющих непрерывные частные производные в этой точке. U – множество всех функций $z = z(x, y)$. Построить диаграмму взаимного расположения множеств A и B.

Решение. Известна теорема «*Если функция* $z = z(x, y)$ *имеет все частные производные в окрестности точки* $M_0(x_0, y_0)$ *и они непрерывны в этой точке, то функция* $z = z(x, y)$ *дифференцируема в точке* $M_0(x_0, y_0)$.»

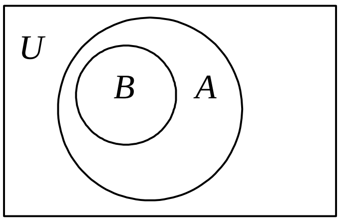


Диаграмма иллюстрирует существование функций, дифференцируемых в точке $M_0(x_0, y_0)$, но не имеющих в этой точке непрерывных частных производных. При этом функции, принадлежащие множеству B, называются непрерывно дифференцируемыми.

Задача 6. Найти частные производные функции $z = \begin{cases} e^{-1/(x^2+y^2)}, & \text{если } x^2 + y^2 \neq 0; \\ 0, & \text{если } x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$ Исследовать функцию на дифференцируемость в точке $M_0(0,0)$.

Решение. Для отыскания частной производной по x возьмём точку $M(\Delta x, 0)$ и найдём частное приращение функции в точке $M(0,\ 0)$ по переменной x

$$\Delta_x z = z(M) - z(M_0) = e^{-1/\Delta x^2} - 0 = e^{-1/\Delta x^2}.$$

Далее действуем по определению частной производной

$$\frac{\partial z}{\partial x}(M_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{-1/\Delta x^2}}{\Delta x} = \frac{0}{0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{\Delta x}}{e^{1/\Delta x^2}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\frac{1}{\Delta x^2}}{e^{1/\Delta x^2}\left(-\frac{2}{\Delta x^3}\right)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{e^{1/\Delta x^2}} = 0.$$

Аналогично можно показать, что $\frac{\partial z}{\partial v}(M_0) = 0$.

Исследуем дифференцируемость функции в точке $M_0(0,0)$. Предположим, что функция дифференцируема в этой точке. Тогда её полное приращение $\Delta z = z(\Delta x, \Delta y) - z(0,0) = e^{-1/\Delta x^2 + \Delta y^2}$ должно иметь вид

$$\Delta z(0,0) = \frac{\partial z(0,0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z(0,0)}{\partial y}\Delta y + 0\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right).$$

Таким образом, осталось проверить при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$ справедливость равенства

$$e^{-1/(\Delta x^2 + \Delta y^2)} = 0\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right),$$

равносильного тому, что $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \dfrac{e^{-1/(\Delta x^2+\Delta y^2)}}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=0$.

Для отыскания предела перейдём к полярным координатам $\Delta x=\rho\cos\varphi$, $\Delta y=\rho\sin\varphi$, где $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$. При условиях $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$, имеем $\rho\to 0$.

С учётом сказанного получаем предел $\lim\limits_{\rho\to 0} \dfrac{e^{-1/\rho^2}}{\rho}$, аналогичный найденному ранее пределу $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{e^{-1/\Delta x^2}}{\Delta x}=0$. Поэтому и $\lim\limits_{\rho\to 0} \dfrac{e^{-1/\rho^2}}{\rho}=0$.

Следовательно, заданная функция дифференцируема в точке $M_0(0,0)$.

Кодификатор раздела, контролируемое содержание, планируемые результаты обучения отражены в таблице 6.

Таблица 6

Кодификатор раздела
«Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных»

Код			Содержание	Проверяемое умение
раздел	тема	вопрос		
6			Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных	
	6.1		Метрическое пространство IR^n и некоторые топологические понятия в нем	
		6.1.1	Пространство IR^n. Понятие ε-окрестности точки в IR^n.	Знать метрику пространства IR^n. Уметь задавать окрестность точки IR^n.
		6.1.2	Предельные, внутренние, граничные точки множества.	Уметь по определению устанавливать характер точек множества.
		6.1.3	Различные множества точек в IR^n: открытые, замкнутые, ограниченные, связные, область, замкнутая область.	Уметь в соответствии с определениями различать множества точек различной природы в IR^n.
	6.2		Последовательность точек в IR^n.	
		6.2.1	Понятие последовательности точек в IR^n и ее предела.	Знать характер сходимости последовательности точек в IR^n. Уметь находить предел последовательности точек в IR^n.
		6.2.2	Характер сходимости последовательности точек в IR^n. Критерий сходимости.	Уметь исследовать характер сходимости последовательности точек в IR^n.
	6.3		Функции нескольких переменных.	

Таблица 6. Продолжение

		6.3.1	Определение функции несколько переменных. Область определения. Множество значений. График функции двух переменных. Линии и поверхности уровня.	Уметь находить область определения и множество значений функции нескольких переменных. Уметь приводить геометрическую интерпретацию указанным множествам. Уметь строить графики функции двух переменных, линии и поверхности уровня.
		6.3.2	Определение предела функции в точке и на бесконечности по Гейне и Коши.	Уметь доказывать по определению, что данное число является пределом данной функции. Уметь доказывать отсутствие предела.
		6.3.3	Основные теоремы о пределах. Вычисление пределов.	Уметь находить пределы функций на основании свойств функций, имеющих пределы.
		6.3.4	Понятие функции непрерывной в точке. Точки разрыва.	Уметь исследовать непрерывность функции в точке по определению. Уметь находить точки разрыва.
		6.3.5	Свойства непрерывных функций. Непрерывность суммы произведения частного непрерывных функций. Непрерывность композиции непрерывных функций. Непрерывность элементарных функций нескольких переменных.	Уметь исследовать непрерывность функций нескольких переменных на основании свойств непрерывных функций.

Таблица 6. Продолжение

		6.3.6	Свойства непрерывных функций на замкнутом ограниченном множестве. Теорема Вейерштрасса об ограниченности непрерывной функции и о достижении непрерывной функции своих точных границ на замкнутом ограниченном множестве. Теорема Коши о промежуточном значении непрерывной функции.	Уметь исследовать свойства непрерывных функций на замкнутом ограниченном множестве.
	6.4		Дифференцируемость функции нескольких переменных	
		6.4.1	Частные производные функций нескольких переменных. Геометрический и физический смысл частных производных.	Уметь находить частные производные функций нескольких переменных по определению. Уметь применять геометрический и физический смысл производных к исследованию поведения функции вдоль координатных осей. Уметь применять правила дифференцирования функций 1-го аргумента к нахождению частных производных функций нескольких переменных.
		6.4.2	Касательная плоскость и нормаль к графику функций двух переменных.	Уметь составлять уравнение касательной плоскости и нормали к графику функций двух аргументов.
		6.4.3	Определение дифференцируемой функции нескольких переменных.	Уметь исследовать по определению дифференцируемость функции нескольких переменных.

Таблица 6. Продолжение

		6.4.4	Дифференциал функции нескольких переменных, его геометрический смысл, применение к приближенным вычислениям.	Уметь находить дифференциал функции нескольких переменных по определению и по формуле. Знать геометрический смысл дифференциала функций нескольких переменных. Уметь применять дифференциал к приближенным вычислениям.
		6.4.5	Свойства дифференцируемой функции: непрерывность и существование частных производных.	Уметь исследовать необходимые условия дифференцируемости функции нескольких переменных. Уметь применять необходимые условия дифференцируемости к исследованию дифференцируемости функции.
		6.4.6	Достаточные условия дифференцируемости функции нескольких переменных.	Уметь исследовать дифференцируемость функции нескольких переменных с использованием достаточных условий дифференцируемости.
		6.4.7	Дифференцирование композиций функций. Инвариантность формы 1-го дифференциала.	Уметь дифференцировать композиции функций нескольких переменных. Уметь находить дифференциал 1-го порядка от сложной функции, используя инвариантность его формы.
		6.4.8	Производная по направлению, ее вычисление.	Уметь находить производную по направлению и применить ее к исследованию поведения функции в заданном направлении.

Таблица 6. Продолжение

		6.4.9	Градиент и его свойства.	Уметь находить градиент функции и применять его к отысканию направления наискорейшего изменения функции и максимальной скорости изменения функции. Уметь применять градиент к составлению уравнений касательной плоскости и нормали к поверхности уровня.
		6.4.10	Неявные функции одного и нескольких аргументов. Теоремы существования, единственности и дифференцируемости.	Знать и уметь применять условия теорем к исследованию вопросов существования, единственности и дифференцируемости неявных функций одного и нескольких аргументов. Уметь дифференцировать неявно заданные функции.
	6.5		Формула Тейлора	
		6.5.1	Частные производные высших порядков. Условия независимости частных производных от порядка дифференцирования.	Уметь находить производные высших порядков. Уметь проверять условие независимости смешанных частных, производных от порядка их дифференцирования.
		6.5.2	Понятие n-раз дифференцируемой функции, бесконечно дифференцируемой функции. Дифференциалы высших порядков.	Уметь находить дифференциалы высших порядков.
		6.5.3	Формула Тейлора с остаточным членом в формах Пеано и Лагранжа.	Уметь представлять функцию нескольких переменных по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано и в форме Лагранжа.

Таблица 6. Окончание

	6.6		Экстремумы функций	

			нескольких переменных	
		6.6.1	Определение точек локального экстремума.	Уметь, следуя определению точек локального экстремума функций нескольких переменных, ответить на вопрос «Является ли данная точка точкой локального экстремума функции?». Уметь привести геометрическую иллюстрацию поведения функции в точке локального экстремума.
		6.6.2	Необходимые условия локального экстремума.	Уметь находить точки возможного экстремума. Уметь отличать необходимые условия локального экстремума от достаточных.
		6.6.3	Достаточные условия локального экстремума. Критерий Сильвестра.	Уметь исследовать функцию нескольких переменных на экстремум.
		6.6.4	Условный экстремум функции нескольких переменных. Сведение к безусловному. Метод множителей Лагранжа.	Уметь находить точки условного экстремума методом сведения к безусловному экстремуму. Уметь находить точки условного экстремума, используя необходимый признак Лагранжа локального экстремума.
		6.6.5	Наибольшее и наименьшее значения функции на множестве.	Уметь находить наибольшее и наименьшее значения функции на замкнутом ограниченном множестве.