1. Понятие числовой последовательности

В курсе математического анализа изучаются переменные величины и зависимость между ними. Простейшими переменными величинами являются числовые последовательности.

Определение. Если каждому натуральному числу по некоторому закону ставится в соответствие действительное число, то говорят, что задана числовая ***последовательность***.

Приняты следующие способы записи числовых последовательностей:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots; \quad \{x_n\}; \qquad (x_n),$$

При этом x_n называется n-ым (общим) членом последовательности, а n – его номером.

Последовательность считается заданной, если известен закон образования ее n-ого (общего) члена. Такими законами могут быть:

а) формула ее общего члена, например: $x_n = \dfrac{n}{n+1}, n \in N$;

б) рекуррентная формула, определяющая ее n- ый член как функцию членов с меньшими номерами. Примерами таких последовательностей являются:
бесконечная арифметическая прогрессия

$$\begin{cases} x_1 = a \\ x_n = x_{n-1} + d, \end{cases} \text{ где } a \text{ и } d \text{ – заданные числа;}$$

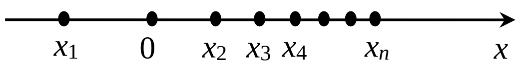
бесконечная геометрическая прогрессия

$$\begin{cases} x_1 = b \\ x_n = x_{n-1} q, \end{cases} \text{ где } b \text{ и } q \text{ – заданные числа;}$$

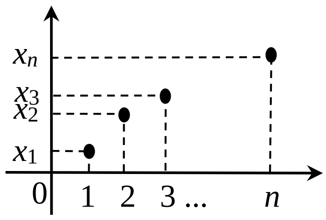
в) словестная форма задания. Например, последовательность десятичных приближений числа π:

3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415, 3.14159, … .

Геометрически члены числовой последовательности изображаются точками числовой прямой



или точками плоскости с координатами (n, x_n)



2. **Монотонные последовательности**

Монотонность является одной из характеристик поведения переменной величины, в том числе и числовой последовательности. Различают следующие виды монотонных последовательностей:

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется ***возрастающей*** (***убывающей***), если для $\forall n \in N$ выполняется неравенство

$$x_{n+1} > x_n \ (x_{n+1} < x_n).$$

Пример 1. Доказать, что последовательность $x_n = \sqrt{n}$ является возрастающей.

Найдем отношение

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = \sqrt{1+\frac{1}{n}}$$

Так как для $\forall n \in N$ $0 < \frac{1}{n} \le 1$, то $\sqrt{1+\frac{1}{n}} > 1$. Следовательно,

для $\forall n \in N$ $\frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$ или

для $\forall n \in N$ $x_{n+1} > x_n$, т.е. последовательность возрастающая.

Пример 2. Доказать, что последовательность $x_n = \frac{2n+1}{n}$ является убывающей.

Рассмотрим разность

$x_{n+1} - x_n = \frac{2(n+1)+1}{n+1} - \frac{2n+1}{n} = -\frac{1}{n(n+1)} < 0$ для $\forall n \in N$. Так как для $\forall n \in N$ $x_{n+1} < x_n$, то данная последовательность является убывающей.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется ***неубывающей*** (***невозрастающей***), если для $\forall n \in N$ выполняется неравенство

$$x_{n+1} \ge x_n \ (x_{n+1} \le x_n).$$

Пример 3. Доказать, что последовательность $x_n = \left[\sqrt{2n}\right]$, где $\left[\sqrt{2n}\right]$ - целая часть числа $\sqrt{2n}$, является неубывающей.

Найдем несколько первых членов последовательности. Предавая n значения 1,2,3,4,5,6, и т.д., получим:

$$1,2,2,2,3,3,3,4,4,4,4,4,5,5,5,...$$

Рассмотрим разность $x_{n+1} - x_n = \left[\sqrt{2(n+1)}\right] - \left[\sqrt{2n}\right] \ge 0$.

Получаем, что для $\forall n \in N$ $x_{n+1} \ge x_n$ и, следовательно, данная последовательность является неубывающей.

Пример 4. Доказать, что последовательность $x_n = \frac{1}{\left[\sqrt{2n}\right]}$ является невозрастающей.

Заданная последовательность имеет вид:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, ...$$

Так как для $\forall n \in N$ справедливо неравенство $\frac{1}{\left[\sqrt{2(n+1)}\right]} \le \frac{1}{\left[\sqrt{2n}\right]}$, то последовательность является невозрастающей.

Определение. Последовательность, члены которой в процессе изменения номеров ее членов остаются неизменными, называется ***постоянной*** или ***стационарной последовательностью***.

$$\{x_n\} \text{ – стационарная } \Leftrightarrow \forall n : x_n = const$$

Примером стационарной последовательности является длина вращающегося радиус-вектора окружности. Стационарные последовательности удовлетворяют определениям невозрастающей и неубывающей последовательностей. Принята следующая терминология: неубывающие, невозрастающие, возрастающие, убывающие последовательности называются ***монотонными последовательностями***.

Введем следующие обозначения:

A – множество всех неубывающих последовательностей;

B – множество всех невозрастающих последовательностей;

C – множество всех стационарных последовательностей;

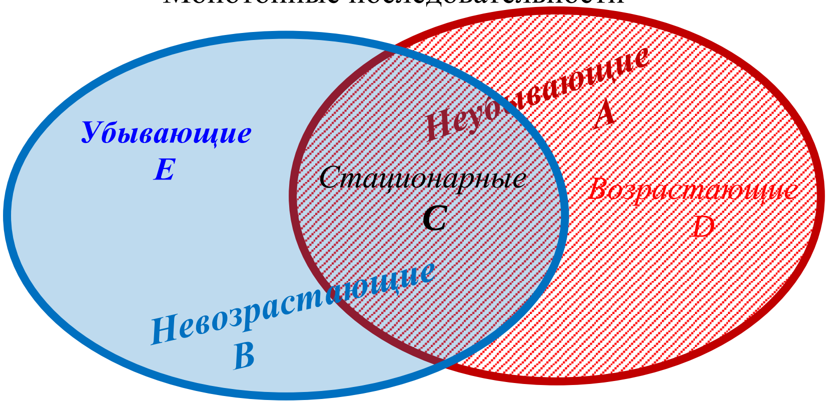
D – множество всех возрастающих последовательностей;

E – множество всех убывающих последовательностей.

Тогда соотношение между множествами перечисленных последовательностей можно проиллюстрировать следующей диаграммой.

Здесь $C = A \cap B$, $D = A \setminus C$, $E = B \setminus C$.

Монотонные последовательности



Заметим, что для каждого вида монотонных последовательностей определяющие их неравенства $x_{n+1} \geq x_n$ ($x_{n+1} \leq x_n$), $x_{n+1} > x_n$ ($x_{n+1} < x_n$) выполняются для $\forall n \in N$. Однако, для некоторых последовательностей вышеперечисленные неравенства могут выполняться, начиная с некоторого номера n_0 ($n_0 > 1$). В этом случае имеют место следующие определения:

Название последовательности	Определяющее условие
Неубывающая, начиная с номера n_0	$\forall n > n_0 : x_{n+1} \geq x_n$
Невозрастающая, начиная с номера n_0	$\forall n > n_0 : x_{n+1} \leq x_n$
Возрастающая, начиная с номера n_0	$\forall n > n_0 : x_{n+1} > x_n$
Убывающая, начиная с номера n_0	$\forall n > n_0 : x_{n+1} < x_n$

Определение. Член последовательности x_0 называется ***наибольшим*** (***наименьшим***), если $x_0 \ge x_n \quad \forall n \in N$ ($x_0 \le x_n \quad \forall n \in N$).

Очевидно, что неубывающая последовательность не имеет наибольшего члена, а невозрастающая последовательность – наименьшего.

Пример 1. Доказать, что последовательность $x_n = \dfrac{2n+3}{3n-4}$ является убывающей, начиная с некоторого номера, и найти ее наибольший член.

Рассмотрим разность $x_{n+1} - x_n =$

$$= \frac{2(n+1)+3}{3(n+1)-4} - \frac{2n+3}{3n-4} = \frac{-17}{(3n-1)(3n-4)}.$$

Решим неравенство $x_{n+1} - x_n < 0$.

$$\frac{-17}{(3n-1)(3n-4)} < 0 \Leftrightarrow$$

$$(3n-1)(3n-4) > 0 \Leftrightarrow$$

$$n \in (-\infty; \frac{1}{3}) \cup (\frac{4}{3}; +\infty).$$

Следовательно, неравенство $x_{n+1} < x_n$ выполняется, начиная с номера $n_0 = 2$, т.е. для $\forall n : n \ge 2$. Значение $x_{n_0} = x_2 = \dfrac{7}{2}$ – наибольший член последовательности.

Пример 2. Доказать, что последовательность $x_n = n + \dfrac{100}{n}$ является возрастающей, начиная с некоторого номера, и найти ее наименьший член.

Рассмотрим неравенство $x_{n+1} - x_n > 0$ и решим его.

$$\left(n+1+\frac{100}{n+1}\right) - \left(n+\frac{100}{n}\right) = \frac{(n+1)^2+100}{n+1} - \frac{n^2+100}{n} =$$

$$= \frac{n^2+n-100}{n(n+1)} > 0.$$

Учитывая, что $n \ge 1$, получаем

$$n^2 + n - 100 > 0 \Leftrightarrow$$

$$n \in (-\infty; \frac{-1-\sqrt{101}}{2}) \cup (\frac{-1+\sqrt{101}}{2}; +\infty)$$

Следовательно, неравенство выполняется для $\forall n \ge n_0 = 10$, т.е. последовательность является возрастающей, начиная с номера $n_0 = 10$, и ее наименьший член $x_{n_0} = x_{10} = 20$.

Пример 3. Найти наибольший член последовательности $x_n = \dfrac{n^2}{2^n}$.

Докажем, что последовательность является убывающей.

Составим и решим неравенство $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} < 1$ для $\forall n \in N$. Имеем:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)^2 \cdot 2^n}{2^{n+1} \cdot n^2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 < 1 \Leftrightarrow$$

$$1 + \frac{1}{n} < \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \sqrt{2} - 1$$

Обращая обе части неравенства, получаем

$$n > \frac{1}{\sqrt{2} - 1} > \frac{1}{0.5} = 2.$$

Следовательно, для $\forall n \geq n_0 = 3$ $x_{n+1} < x_n$ и последовательность является убывающей. Ее наибольший член $x_{n_0} = x_3 = \dfrac{9}{8}$.

3. Ограниченные последовательности

Как и всякое числовое множество числовая последовательность может быть ограничена сверху (снизу), а так же одновременно сверху и снизу.

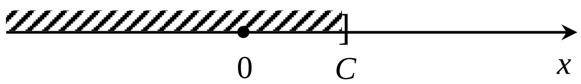
Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется ***ограниченной сверху*** (***снизу***), если существует такое число C (c) что для $\forall n \in N$ $x_n \leq C$ $(x_n \geq c)$.

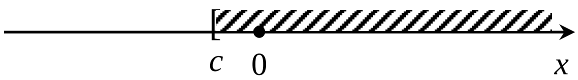
Краткая запись определения с использованием кванторов имеет вид:

$$\{x_n\} \text{ – ограничена сверху} \Leftrightarrow \exists C \ \forall n: \ x_n \leq C$$

$$\{x_n\} \text{ – ограничена снизу} \Leftrightarrow \exists c \ \forall n: \ x_n \geq c$$

Геометрически ограниченность сверху (снизу) означает принадлежность всех членов последовательности промежутку $(-\infty, C]$ а снизу – промежутку $(c, +\infty]$.

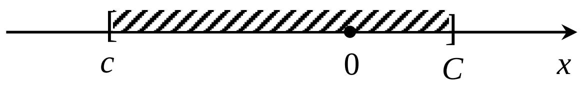




Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется ***ограниченной***, если она ограничена сверху и снизу, т.е. существует такие числа C и c, что для $\forall n \in N$ $c \leq x_n \leq C$.

Кратко: $\{x_n\}$ – ограничена $\Leftrightarrow \exists\, c, C \ \forall n \in N \ c \leq x_n \leq C$

Геометрически это означает, что все члены последовательности могут быть заключены в промежуток $[c, C]$.

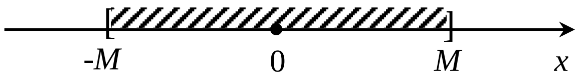


Возможно другое определение ограниченной последовательности.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется ***ограниченной***, если существует такое число $M > 0$, что для $\forall n \in N$ выполняется неравенство $|x_n| \le M$.

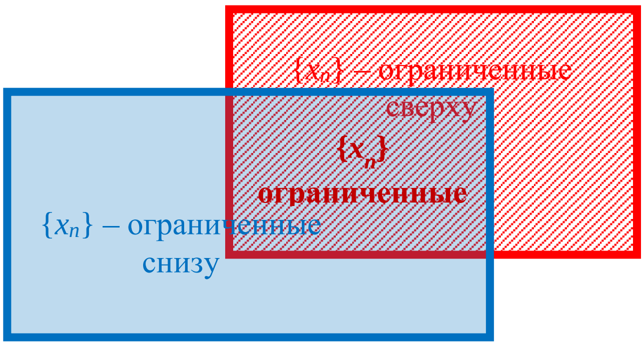
Кратко: $\boxed{\{x_n\} \text{ – ограничена} \Leftrightarrow \exists M > 0 \;\; \forall n \in N \;\; |x_n| \le M}$

Геометрически это означает, что все члены последовательности могут быть заключены в промежуток $[-M, M]$.



Поскольку для $\forall M > 0$ интервал $(-M, M) \subset [-M, M]$, то говорят, что все члены ограниченной последовательности принадлежат M – окрестности точки ноль ($\forall n \;\; x_n \in U(0,M)$).

Приведем диаграмму, иллюстрирующую взаимное соотношение классов ограниченных и ограниченных сверху и снизу последовательностей.



Рассмотрим примеры на исследование ограниченности числовой последовательности.

Пример 1. Доказать, что последовательность $x_n = \dfrac{n^2 \cos n\pi + 50}{\sqrt{n^4 + 1}}$ ограничена сверху и снизу.

а) Ограниченность сверху.

По определению числовой последовательности ограниченной сверху:

$$\exists C \;\; \forall n: \; x_n \le C$$

следует указать хотя бы одну из верхних границ множества ее значений. Используя свойство ограниченности известных функций и правила сравнения дробей, попробуем организовать цепочку неравенств вида:

$$x_n \le y_n \le \ldots \le z_n \le C, \; \forall n \in N.$$

Воспользуемся тем, что $\forall n \in N \;\; |\cos n\pi| \le 1$. Тогда для $\forall n \in N$

$$x_n = \frac{n^2 \cos n\pi + 50}{\sqrt{n^4 + 1}} \le \frac{n^2 + 50}{\sqrt{n^4 + 1}}.$$

Поскольку для $\forall n \ge N: \; \sqrt{n^4 + 1} > n^2$, то

$$x_n = \frac{n^2 \cos n\pi + 50}{\sqrt{n^4 + 1}} \le \frac{n^2 + 50}{\sqrt{n^4 + 1}} < \frac{n^2 + 50}{n^2} = 1 + \frac{50}{n^2} \le 51,$$

т.к. $\max\limits_{\forall n \in N} \dfrac{50}{n^2} \le \dfrac{50}{1} = 50$.

Таким образом, для $\forall n \in N$ C=51 – одна из верхних границ, и определение ограниченного сверху множества выполнено. Геометрически это означает, что для $\forall n \in N$ $x_n \in (-\infty, 51]$.

б) Ограниченность снизу.

Аналогично используя уже указанные свойства, докажем ограниченность последовательности снизу. Для этого составим цепочку неравенств вида

$$x_n \ge y_n \ge \ldots \ge z_n \ge c,\ \forall n \in N.$$

С учетом того, что $\forall n \in N$ $\cos n\pi \ge -1$ и $\sqrt{n^4+1} < \sqrt{(n^2+1)^2} = n^2+1$, получим

$$x_n = \frac{n^2 \cos n\pi + 50}{\sqrt{n^4+1}} \ge \frac{50-n^2}{\sqrt{n^4+1}} > \frac{50-n^2}{n^2+1} = -1 + \frac{51}{n^2+1} \ge -1.$$

Таким образом, $\forall n \in N$: $x_n > -1$, и в качестве c можно взять $c = -1$. Геометрически это означает, что все члены последовательности принадлежат промежутку $x_n \in [-1, +\infty)$.

Рассматривая результаты решения а) и б) совместно, находим пересечение двух полуинтервалом и получаем

$$\exists\, c = -1,\, C = 51\ \ \forall n \in N\ \ -1 \le x_n \le 51.$$

с) Можно было доказать ограниченность последовательности одновременно сверху и снизу, т.е. просто ограниченность

$$\exists\, M > 0\ \ \forall n \in N\ \ |x_n| \le M.$$

Действуя как и в пункте а), получаем для $\forall n \in N$

$$|x_n| = \left|\frac{n^2 \cos n\pi + 50}{\sqrt{n^4+1}}\right| \le \frac{n^2+50}{\sqrt{n^4+1}} < \frac{n^2+50}{\sqrt{n^4}} < \frac{n^2+50}{n^2} = 1 + \frac{50}{n^2} \le 51.$$

Следовательно, M=51, последовательность ограничена, и все ее члены принадлежат промежутку [– 51,51].

В некоторых случаях ограниченность последовательности сверху (снизу) может быть установлена, если известен наибольший (наименьший) член последовательности.

Пример 2. Докажите, что последовательность $x_n = \dfrac{100^n}{n!}$ ограничена сверху.

Судя по поведению первых членов последовательности, например, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, можно предположить, что с ростом номера и члены последовательности растут. Так ли это?

Последовательность будет возрастать тогда и только тогда, когда $\forall n$: $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} \ge 1$. Найдем отношение

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{100^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot 100^n} = \frac{100}{n+1}.$$

Решаем неравенство $\dfrac{100}{n+1} \geq 1$, получаем $1 \leq n \leq 99$. Это означает, что для найденных значений n $x_{n+1} \geq x_n$. Но тогда $x_{n+1} \leq x_n$ при $n \geq 99$. Следовательно, $x_{99} = \dfrac{100^{99}}{99!}$ – наибольший член последовательности, и для $\forall n \in N$ $x_n \leq \dfrac{100^{99}}{99!} = C$.

Пример 3. Докажите, что последовательность $x_n = \dfrac{n-7}{n+4}$ ограничена снизу.

Если последовательность монотонно возрастающая, то достаточно найти ее наименьший элемент. Для этого рассмотрим разность

$$x_{n+1} - x_n = \frac{n-6}{n+5} - \frac{n-7}{n+4} = \frac{11}{(n+5)(n+4)} > 0.$$

Отсюда следует, что для $\forall n \in N$ $x_{n+1} > x_n \Leftrightarrow$ последовательность монотонно возрастает и ее наименьший член есть $x_1 = -\dfrac{6}{5}$. Значит она ограничена снизу, т.е. для $\forall n \in N$: $x_n \geq -\dfrac{6}{5} = c$.

4. Неограниченные последовательности

Используя правило отрицания высказываний, запишем определения следующих последовательностей.

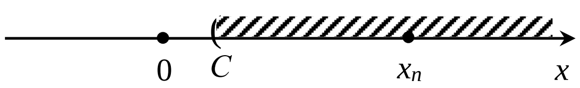
Определение.

а) $\{x_n\}$ – ***неограниченная сверху*** $\Leftrightarrow \forall C \ \exists n \in N: \ x_n > C$;

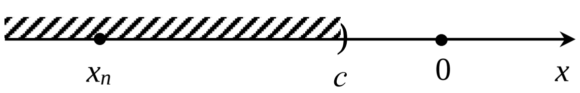
б) $\{x_n\}$ – ***неограниченная снизу*** $\Leftrightarrow \forall c \ \exists n \in N: \ x_n < c$;

в) $\{x_n\}$ – ***неограниченная*** $\Leftrightarrow \forall M > 0 \ \exists n \in N: |x_n| > M$.

Для каждого вида последовательностей приведем геометрическую иллюстрацию и интерпретацию.

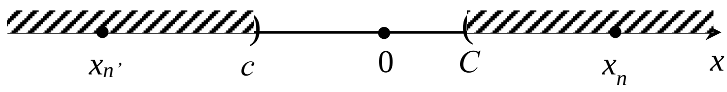
а) 

В любой окрестности бесконечно удаленной точки +∞ содержится бесконечное множество членов последовательности.

б) 

В любой окрестности бесконечно удаленной точки –∞ содержится бесконечное множество членов последовательности.

в)



В любой окрестности бесконечно удаленной точки ∞ содержится бесконечное множество членов последовательности.

Пример 1. Докажите, что последовательность $x_n = 2^{n-100}$ не является ограниченной сверху.

Действуем в соответствии с алгоритмом, заложенным в определении.

1) Задаем произвольное число C.

2) Составляем неравенство $x_n > C$: $2^{n-100} > C$.

3) Решаем неравенство относительно n.

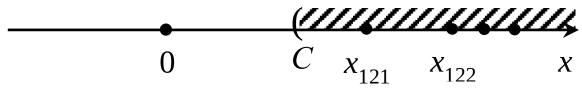
а) Если $C \le 0$, то $2^{n-100} > C$ для $\forall n \in N$.

б) Если $C > 0$, то $2^{n-100} > C \Leftrightarrow n - 100 > \log_2 C \Leftrightarrow$

$$n > \log_2 C + 100 \Rightarrow n > [\log_2 C + 100]$$

Таким образом, для $\forall C$ бесконечное множество членов последовательности попадает в произвольную C-окрестность бесконечно удаленной точки $+\infty$.

Например, для C=1048576 $n \ge 120$ и соответствующая иллюстрация имеет вид:



Пример 2. Докажите, что последовательность $x_n = \dfrac{2-n}{\sqrt{1+n}}$ не является ограниченной снизу.

Следуем определению неограниченной снизу последовательности.

1) Задаем произвольное число c.

2) Составляем неравенство $x_n < c$: $\dfrac{2-n}{\sqrt{1+n}} < c$.

3) Так как непосредственное нахождение n затруднительно, то прибегаем к предварительной оценке $x_n = \dfrac{2-n}{\sqrt{1+n}}$ сверху. Если при этом большая величина y_n будет меньше c, то меньшая величина x_n будет и подавно меньше c.

Для $\forall n \in N$ имеем

$$\frac{2-n}{\sqrt{1+n}} < \frac{2-n}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n}} - \sqrt{n} \le 2 - \sqrt{n} < c.$$

Откуда для $\forall n \in N$: $\sqrt{n} > 2 - c$.

а) Если $c \ge 2$, то неравенство выполняется для $\forall n \in N$.

б) Если $c < 2$, то $n > (2-c)^2$. Откуда следует, что $n > [(2-c)^2]$.

Таким образом, для любого числа c найдется бесконечное множество членов последовательности x_n, принадлежащих произвольной c-окрестности бесконечно удаленной точки $-\infty$. Последнее означает, что данная последовательность не ограничена снизу.

Пример 3. Докажите, что последовательность $x_n = (-1)^n 2^n$ является неограниченной.

Используем определение неограниченной последовательности.

1) Задаем произвольное число $M>0$.

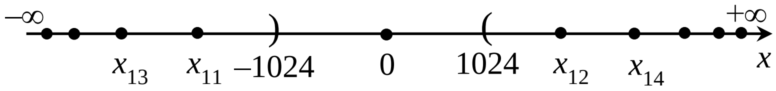
2) Составляем неравенство $|x_n| > M$: $|(-1)^n 2^n| > M$.

3) Находим n.

$$2^n > M \iff n > \log_2 M \Rightarrow n \geq [\log_2 M]+1$$

Для полученных значений n члены последовательности для $\forall M > 0$ удовлетворяют условию $|x_n| > M$. Следовательно, данная последовательность является неограниченной. В частности, при M=1024 члены последовательности $\{x_n\}$ принадлежат M-окрестности бесконечно удаленной точки ∞ для $\forall n \geq 11$.

Соответствующая геометрическая иллюстрация имеет вид

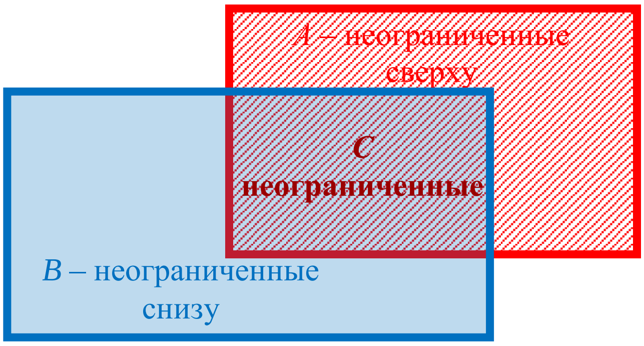


В заключении приведем диаграмму, характеризующую взаимное соотношение классов рассмотренных последовательностей. Пусть

A – множество всех последовательностей, неограниченных сверху;

B – множество всех последовательностей, неограниченных снизу;

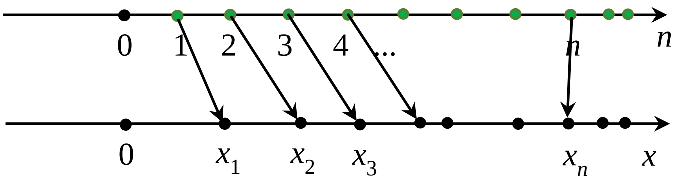
C – множество всех неограниченных последовательностей,



5. Предел числовой последовательности

1⁰. Изучение переменных величин начинается с изучения числовых последовательностей.

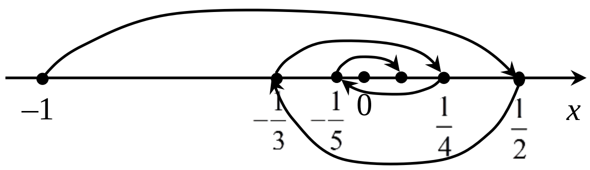
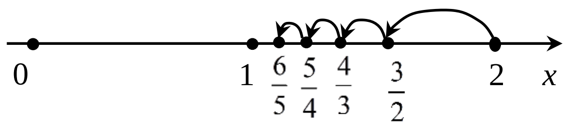
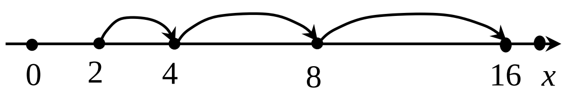
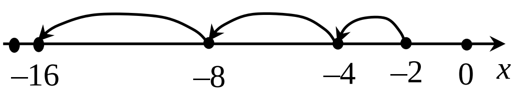
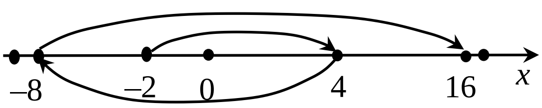
В соответствии с определением числовая последовательность представляет собой отображение $f: N \xrightarrow{в} R$ по правилу $x_n = f(n)$.



Поскольку натуральных чисел – бесконечное (счетное) множество, то множества значений числовой последовательности $\{x_n\}$ так же бесконечное (счетное) множество.

Для анализа поведения числовой последовательности мы пока можем использовать формулу ее общего члена только для подсчета значений ее конкретных членов. Но дело в том, что в силу бесконечности множества ее членов, мы не в состоянии даже все их вычислить. Нужен новый математический инструмент, который позволил бы анализировать поведение числовой последовательности как единого множества.

Обратимся сначала к своей интуиции. На следующих примерах проанализируем характер поведения некоторого числа первых членов последовательности и попытаемся высказать гипотезу о поведении последовательности $\{x_n\}$ при $n \to \infty$.

№	Последова-тельность $\{x_n\}$	Геометрическая иллюстрация	Гипотеза $x_n \to ?$
1	$x_n = \frac{(-1)^n}{n}$		$x_n \to \boxed{?}$
2	$x_n = \frac{n+1}{n}$		$x_n \to \boxed{?}$
3	$x_n = 2^n$		$x_n \to \boxed{?}$
4	$x_n = -2^n$		$x_n \to \boxed{?}$
5	$x_n = (-1)^n \cdot 2^n$		$x_n \to \boxed{?}$

2^0. Бесконечно малая последовательность (БМП)

Обратимся к последовательности $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$. Интуиция нас не подвела, при $n \to \infty$ $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n} \to 0$. Но это всего лишь гипотеза, основанная на поведении нескольких первых членов последовательности. Алгоритм, позволяющий исследовать поведение последовательности $\{x_n\}$ при $n \to \infty$ как единого бесконечного множества содержится в следующем определении.

> Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется ***бесконечно малой***, если для любого ε > 0 (в том числе и сколь угодно малого) можно указать такой номер *N*, зависящий от ε (*N*(ε)), что для всех *n* > *N*(ε) выполняется неравенство $|x_n| < \varepsilon$.

Краткая запись определения с использованием кванторов имеет вид

$$\boxed{\{x_n\} - \text{БМП} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N(\varepsilon) \;\; \forall n > N(\varepsilon) : |x_n| < \varepsilon}$$

В этом случае также говорят, что предел числовой последовательности $\{x_n\}$ равен нулю. При этом пишут:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = 0 \quad \text{или} \quad x_n \to 0$$

Комментарии к определению.

Символическая запись	Контроль за поведением всей последовательности
$\forall \varepsilon > 0 \; \lvert x_n \rvert = \lvert x_n - 0 \rvert < \varepsilon$	Какую бы степень близости $(\forall \varepsilon > 0)$ x_n к нулю $(\lvert x_n - 0 \rvert < \varepsilon)$ не задали, в том числе и сколь угодно малую.
$\exists N(\varepsilon)$	Найдется номер *N*, зависящий от ε, такой,
$\forall n > N(\varepsilon) : \lvert x_n \rvert < \varepsilon$	что <u>все члены последовательности $\{x_n\}$ с номерами *n* > *N*(ε) преодолеют эту степень близости</u>. Исключение составят только *N* первых членов

Подчеркнутая часть фразы характеризует поведение всей бесконечной части последовательности, начиная с некоторого номера *N*(ε)+1.

Геометрический смысл определения

Символическая запись	Контроль за поведением всей последовательности
$\forall \varepsilon > 0$	Произвольное ε > 0 позволяет определить произвольную ε-окрестность точки *x*=0 (*U*(0, ε)), в том числе и сколь угодно малую.
$\exists N(\varepsilon)$	Найдется номер *N*, зависящий от ε, такой,
$\forall n > N(\varepsilon) : \lvert x_n \rvert < \varepsilon$	что <u>все члены последовательности $\{x_n\}$ с номерами *n* > *N*(ε) попадут в произвольную ε-окрестность</u> точки *x*=0, за пределами которой останется лишь конечное число ее членов: $x_1, x_2, \ldots, x_N$

Приведем другое определение бесконечно малой последовательности

Определение (геометрическое). Последовательность $\{x_n\}$ называется ***бесконечно малой***, если начиная с некоторого номера $n > N(\varepsilon)$, все члены последовательности $\{x_n\}$ попадают в произвольную ε-окрестность точки x=0, а за ее пределами <u>остаются лишь</u> N первых членов.

Кратко:

$$\{x_n\} - \text{БМП} \Leftrightarrow \forall U(0,\varepsilon)\ \exists N(\varepsilon)\ \forall n > N(\varepsilon):\ x_n \in U(0,\varepsilon)$$

Подчеркнутая часть фразы указывает на то что любая окрестность точки x=0, (в том числе и сколь угодно малая) способна улавливать все члены последовательности, начиная с некоторого номера, тем самым контролировать поведение всей бесконечной части последовательности, начиная с некоторого номера $N(\varepsilon)+1$.

Покажем на примерах, как определение БМП используется на практике.

Пример 1. Докажите, что $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ – БМП.

Используем определение бесконечно малой последовательности.

1) Берем произвольное положительное ε.

2) Составляем неравенство $|x_n| < \varepsilon$: $\left|\dfrac{(-1)^n}{n}\right| = \dfrac{1}{n} < \varepsilon$.

3) Разрешаем его относительно n. Получаем $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$.

4) Указываем номер $N(\varepsilon)=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$.

Таким образом, все требования определения БМП выполнены.

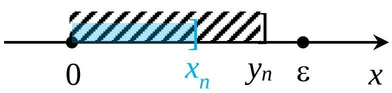
Пример 2. Докажите, что $x_n = \dfrac{n+\sin n}{n^2+n+1}$ – БМП.

1) Задаем произвольное положительное ε.

2) Составляем неравенство $|x_n| < \varepsilon$: $\left|\dfrac{n+\sin n}{n^2+n+1}\right| = \dfrac{n+\sin n}{n^2+n+1} < \varepsilon$

$(n+\sin n \geq 0\ \ \forall n \in N)$.

3) Непосредственное отыскание n затруднительно, поэтому предварительно оцениваем дробь сверху, переходя для всех n от x_n к большей величине y_n: $x_n \leq y_n < \varepsilon$. Если $y_n < \varepsilon$, то $x_n < \varepsilon$ и подавно.



Имеем

$$\frac{n+\sin n}{n^2+n+1} \leq \frac{n+1}{n^2+n+1} < \frac{2n}{n^2+n+1} < \frac{2n}{n^2} < \frac{2}{n} < \varepsilon.$$

Откуда $n > \dfrac{2}{\varepsilon}$

4) Указываем номер $N(\varepsilon)=\left[\dfrac{2}{\varepsilon}\right]$.

Таким образом, все условия определения БМП выполнены.

3^0. Последовательность, не являющаяся бесконечно малой

Поскольку сейчас мы должны записать отрицание определения БМП, то приведем это определение:

$$\{x_n\} - \text{БМП} \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0 \;\; \exists N(\varepsilon) \;\; \forall n>N(\varepsilon): |x_n|<\varepsilon .$$

Тогда отрицание определения БМП будет выглядеть так:

$$\boxed{\neg(\{x_n\} - \text{БМП}) \Leftrightarrow \exists\varepsilon>0 \;\; \forall N \;\; \exists n>N: |x_n|\le\varepsilon .}$$

Также приведем геометрическое определение БМП

$$\{x_n\} - \text{БМП} \Leftrightarrow \forall U(0,\varepsilon) \;\; \exists N(\varepsilon) \;\; \forall n>N(\varepsilon): \; x_n \in U(0,\varepsilon)$$

и его отрицание:

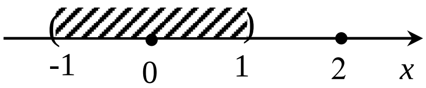
$$\boxed{\neg(\{x_n\} - \text{БМП}) \Leftrightarrow \exists U(0,\varepsilon) \;\; \forall N(\varepsilon) \; \exists n>N: \; x_n \in R\setminus U(0,\varepsilon).}$$

На языке окрестностей это звучит так:

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ ***не является бесконечно малой*** тогда и только тогда, когда найдется такая ε-окрестность точки x=0, за пределами которой находится бесконечное множество ее членов.

Пример 1. Докажите, что последовательность $x_n = 1+(-1)^n$ не является бесконечно малой.

Воспользуемся геометрическим определением последовательности, не являющейся бесконечно малой. Заметим, что все члены последовательности с четными номерами $x_{2k}=2$, а с нечетными номерами $x_{2k-1}=0$. Тогда расстояние между двумя любыми членами последовательности $|x_{n+1}-x_n|=2$.



Поэтому можно взять любую окрестность точки x=0 с радиусом ε < 2, например, U(0,1). За пределами этой окрестности находится бесконечное множество членов последовательности: все члены с четными номерами $x_{2k}=2$.

Следовательно, существует такая окрестность точки x=0 U(0,1), за пределами которой находится бесчисленное множество челнов последовательности.

Пример 2. Докажите, что последовательность $x_n = n^{(-1)^n}$ не является бесконечно малой.

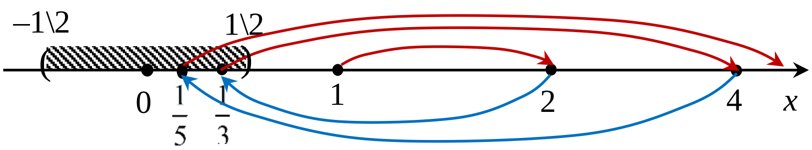
Как и в предыдущем примере, воспользуемся геометрическим определением последовательности, не являющейся бесконечно малой.

Заметим, для нечетных номеров n=2k-1 $x_{2k-1}=\dfrac{1}{2k-1}$, а для четных n=2k $x_{2k}=2k\ge 2$.

Оценим расстояние между двумя любыми членами последовательности

$$|x_{2k}-x_{2k-1}|=2k-\frac{1}{2k-1}\geq 1.$$

Поэтому можно взять любую окрестность точки x=0 с радиусом ε < 1, например U(0,1/2), за пределами которой будет находиться бесконечное множество членов последовательности с четными номерами. Приведем геометрическую иллюстрацию.



4[0]. Сходящаяся числовая последовательность

Если Вы хорошо усвоили понятие бесконечно малой последовательности ($\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$), то без труда разберетесь со случаем $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\cdot$

> Определение. **Число *a*** называется ***пределом*** числовой последовательности $\{x_n\}$, если по произвольному положительному ε можно указать такой номер N(ε), что для всех n > N(ε) выполняется неравенство $|x_n-a|<\varepsilon$. Записывают: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ или $x_n\to a$

Краткая запись определения с использованием кванторов имеет вид:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0\ \ \exists N(\varepsilon)\ \ \forall n>N(\varepsilon):|x_n-a|<\varepsilon}$$

Последовательность, имеющая предел, называется ***сходящейся***. В противном случае – последовательность расходящаяся.

Комментарии к определению

Символическая запись	Наблюдение за поведением всей последовательности
$\forall\varepsilon\,|x_n-a|<\varepsilon$	Какую бы степень близости ($\forall\varepsilon>0$) x_n к числу a ($|x_n-a|<\varepsilon$) не задали, в том числе и сколь угодно малую,
$\exists N(\varepsilon)$	найдется номер N, зависящий от ε, такой,
$\forall n>N(\varepsilon):|x_n-a|<\varepsilon$	что все члены последовательности $\{x_n\}$ с номерами n > N(ε) преодолеют эту степень близости. Исключение составят только N первых членов

Таким образом, алгоритм, заложенный в определение, позволяет охарактеризовать поведение всей бесконечной части последовательности за исключением может быть лишь конечного числа ее первых членов.

Приведем геометрическое определение сходящейся последовательности

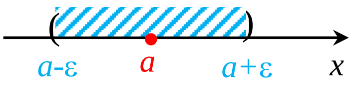
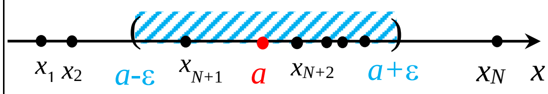
> Определение (геометрическое). Последовательность $\{x_n\}$ называется сходящейся к числу a ($\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$), если начиная с некоторого номера n ≥ N(ε)+1, все члены последовательности $\{x_n\}$ попадают в произвольную ε-окрестность точки a.

Кратко:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow\forall U(a,\varepsilon)\ \ \exists N(\varepsilon)\ \ \forall n>N(\varepsilon):\ x_n\in U(a,\varepsilon)}$$

Комментарии к определению

а) Геометрический смысл

Символическая запись	Контроль за поведением всей последовательности
$\forall U(a,\varepsilon) \Leftrightarrow \lvert x_n - a \rvert < \varepsilon$ 	Какую бы произвольную ε-окрестность точки $x=a$ ни задали, в том числе и сколь угодно малую,
$\exists N(\varepsilon)$	Найдется номер N, зависящий от ε, такой,
$\forall n > N(\varepsilon): \lvert x_n \rvert \in U(a,\varepsilon)$ 	что все члены последовательности $\{x_n\}$ с номерами $n > N(\varepsilon)$ попадут в произвольную ε-окрестность точки $x=a$, за пределами которой останется лишь конечное число ее первых членов: $x_1, x_2, \ldots, x_N$

б) Определение предела числовой последовательности позволяет подтвердить некоторую стабилизацию в ее поведении при $n\to\infty$, а именно, стремление $x_n \to a$, которое с точки зрения развития последовательности проявляется в том, что все ее члены x_n начиная с некоторого номера $N(\varepsilon)+1$, преодолевают любую степень близости x_n к a: $|x_n - a| < \varepsilon$. С точки зрения геометрической интерпретации точка a является пределом последовательности x_n при $n\to\infty$, характеризуется тем, что любая ее ε-окрестность $U(a,\varepsilon)$ способна улавливать все ее члены, начиная с номера $N(\varepsilon)+1$.

Определение предела числовой последовательности позволяет доказывать равенство вида $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Пример 1. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n} = 1$.

Следуем алгоритму, соответствующему определению предела.

1) Задаем $\forall \varepsilon > 0$ (в том числе и сколь угодно малое).

2) Составляем неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$: $\left|\dfrac{n+1}{n} - 1\right| < \varepsilon$.

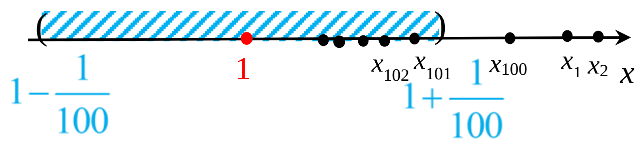
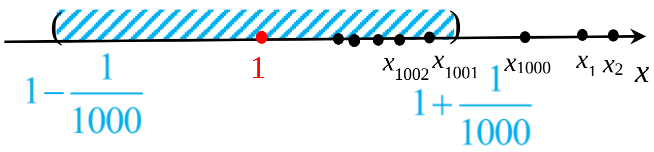
3) Решаем неравенство

$$\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

4) Указываем номер $N(\varepsilon) = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$.

5) Вывод: неравенство $\left|\dfrac{n+1}{n} - 1\right| < \varepsilon$ выполняется для $\forall n \geq \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n} = 1$.

Приведем геометрическую иллюстрацию для $\varepsilon = \dfrac{1}{100}$ и $\varepsilon = \dfrac{1}{1000}$.

<table>
<tr><td>$U(a,\varepsilon)$</td><td>$N(\varepsilon)+1$</td><td>Иллюстрация</td></tr>
<tr><td>$U\left(1,\dfrac{1}{100}\right)$</td><td>101</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$U\left(1,\dfrac{1}{1000}\right)$</td><td>1001</td><td>
</td></tr>
</table>

Пример 2. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}} = 1$.

1) Задаем $\forall \varepsilon > 0$.

2) Составляем неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$: $\left|\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}} - 1\right| < \varepsilon$.

3) Решаем неравенство

$$\left|\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} - 1\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{-n}{n^2+n+n\sqrt{n^2+n}}\right| < \varepsilon.$$

Оценим выражение под знаком модуля сверху, удерживая в знаменателе слагаемые с наибольшей степенью. Получим:

$$\left|\frac{-n}{n^2+n+n\sqrt{n^2+n}}\right| < \frac{n}{2n^2} = \frac{1}{2n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{2\varepsilon}.$$

4) Указываем номер $N(\varepsilon) = \left[\dfrac{1}{2\varepsilon}\right]$.

5) Вывод: неравенство $\left|\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}} - 1\right| < \varepsilon$ выполняется для $\forall n \geq \left[\dfrac{1}{2\varepsilon}\right] + 1$, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}} = 1$.

Укажем $N(\varepsilon)$ для $\varepsilon = \dfrac{1}{100}$: $N(\varepsilon) = 50$.

Геометрическую иллюстрацию приведите самостоятельно.

Пример 3. Докажите, что предел стационарной последовательности $x_n = a$ равен a.

1) Задаем $\forall \varepsilon > 0$.

2) Составляем неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$: $|a - a| < \varepsilon$.

3) Решаем неравенство $0 < \varepsilon$, которое верно для любого n.

Геометрически это означает, что любая ε-окрестность точки a улавливает все ее члены, начиная с номера $n = 1$.

Заметим, что можно указать три вида сходящихся последовательностей: бесконечно малые, стационарные и все остальные. Установим связь между ними.

Теорема о структуре множества сходящихся последовательностей

Следующие утверждения равносильны:

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $x_n - a = \alpha_n$ есть бесконечно малая последовательность.

Доказательство.

1) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \ \ \exists N(\varepsilon) > 0 \ \ \forall n > N(\varepsilon): |x_n - a| < \varepsilon$.

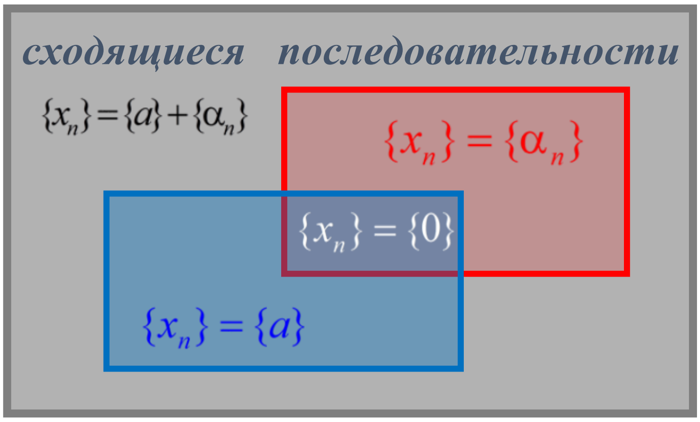
Обозначим $x_n - a = \alpha_n$. В силу записанного выше определения имеем:

$$\forall\varepsilon > 0 \ \ \exists N(\varepsilon) > 0 \ \ \forall n > N(\varepsilon): |\alpha_n| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0 \Leftrightarrow \alpha_n - \text{БМП}.$$

2) Пусть $x_n - a = \alpha_n$ есть БМП. Это значит, что для $\forall\varepsilon > 0 \ \ \exists N(\varepsilon) \ \ \forall n > N(\varepsilon): |\alpha_n| < \varepsilon$. Заменив в последнем неравенстве α_n на $x_n - a$, получим определение последовательности, сходящейся к a.

Из сказанного следует, что в достаточно малой окрестности точки a сходящаяся к a последовательность $\{x_n\}$ представима в виде $x_n = a + \alpha_n$.

Структура множества всех сходящихся последовательностей может быть изображена на диаграмме



5[0]. Расходящаяся числовая последовательность

Как было указано ранее, определение предела числовой последовательности с использованием логической символики может быть записано в виде:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \ \ \exists N(\varepsilon) \ \ \forall n > N(\varepsilon): |x_n - a| < \varepsilon$$

Применяя правило отрицания кванторов, запишем определение того факта, что число a не является пределом последовательности:

$$\neg(\lim_{n\to\infty} x_n = a) \Leftrightarrow \neg\,(\forall\varepsilon > 0 \ \ \exists N(\varepsilon) \ \ \forall n > N(\varepsilon): |x_n - a| < \varepsilon)$$

$$\Leftrightarrow \exists\varepsilon>0 \quad \forall N \quad \exists n>N: |x_n-a|\geq\varepsilon$$

Аналогично, из определения предела числовой последовательности на языке окрестностей:

$$(\lim_{n\to\infty}x_n=a) \Leftrightarrow \forall U(a,\varepsilon) \quad \exists N(\varepsilon) \quad \forall n>N(\varepsilon):\ x_n\in U(a,\varepsilon)$$

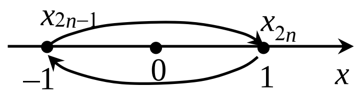
можно получить высказывание «число a не является пределом числовой последовательности»:

$$\neg(\lim_{n\to\infty}x_n=a) \Leftrightarrow \quad \exists U(a,\varepsilon) \quad \forall N \quad \exists n>N:\ x_n\notin U(a,\varepsilon)$$

Это означает, что найдется по крайней мере одна такая окрестность точки a $U(a,\varepsilon)$, за пределами которой содержится бесконечное множество ее членов.

Пример 1. Докажите, что число a = 1 не является пределом числовой последовательности $x_n=\cos n\pi,\ n\in N$.

Анализируя поведение последовательности, заметим, что для нечетных номеров n = 2 k –1: $x_{2k-1}=-1$, а для четных n=2 k: $x_{2k}=1$.



Воспользуемся определением отрицания высказывания $\lim_{n\to\infty}x_n=a$ на языке окрестностей, в соответствии с которым нам следует показать существование по крайней мере одной такой окрестности точки x = 1 $U(1,\varepsilon)$, за пределами которой находится бесконечное множество ее членов.

Очевидно, что расстояние между двумя любыми членами последовательности x_{2k} и x_{2k-1} для $\forall n\in N$ равно $|x_{2k}-x_{2k-1}|=2$. Поэтому, можно указать бесконечное множество ε-окрестностей точки x = 1 $U(1,\varepsilon)$, где $0<\varepsilon<2$, за пределами любой из которых находится бесконечное множество членов последовательности – все ее члены с нечетными номерами.

Таким образом, точка x = 1 не обладает тем свойством, что любая ее ε-окрестность начиная с некоторого номера $[N(\varepsilon)]+1$ улавливает все члены данной последовательности. Поэтому $\lim_{n\to\infty}\cos n\pi\neq 1$.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется ***расходящейся***, если никакое число a не является ее пределом.

Кратко: $\{x_n\}$ – расходящаяся последовательность ⇔

$$\forall a \quad \exists\varepsilon \quad \forall N \quad \exists n>N: |x_n-a|\geq\varepsilon$$

На языке окрестностей это звучит так:

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется ***расходящейся***, если для любого числа a можно указать по крайней мере одну такую ε-окрестность за пределами которой находятся все члены последовательности, начиная с номера n>N.

$\{x_n\}$ – расходящаяся последовательность ⇔

$$\forall a \quad \exists U(a,\varepsilon) \quad \forall N \quad \exists n>N:\ x_n\in R\setminus U(a,\varepsilon)$$

Пример. Докажите, что последовательность $x_n = 5 + \dfrac{(-1)^n n}{n+1}$

не имеет предела.

1) Попытаемся оценить снизу расстояние между двумя любыми соседними членами последовательности, т.е. величину $|x_n - x_{n-1}|$. Поскольку из любых двух соседних членов один – нечетный, другой – четный, найдем их. При $n = 2k-1$ имеем:

$$x_{2k-1} = 5 - \frac{2k-1}{2k} = 4 + \frac{1}{2k}$$

При $n = 2k$:

$$x_{2k} = 5 + \frac{2k}{2k+1} = 5 + \frac{2k+1-1}{2k+1} = 6 - \frac{1}{2k+1}.$$

2) Оценим расстояние

$$|x_n - x_{n-1}| = \left|2 - \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k}\right| = \left|2 - \frac{4k+1}{2k(2k+1)}\right| > 1 \text{ для } \forall k.$$

Следовательно, для любого числа a можно взять окрестность с радиусом, например, $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, т.е. $(a - \dfrac{1}{2}, a + \dfrac{1}{2})$. Никакие два члена последовательности не находятся в этой окрестности, а значит, бесконечное множество членов последовательности находятся за пределами указанной окрестности, что соответствует ее расходимости.

6⁰.Свойства последовательностей

Теорема.

Всякая сходящаяся последовательность имеет только один предел.

Доказательство. (от противного)

Пусть сходящаяся последовательность $\{x_n\}$ имеет два различных предела, т.е.
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, причем $a \neq b$.

Запишем определение для этих двух пределов:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N_1(\frac{\varepsilon}{2}) \;\; \forall n > N(\varepsilon) : |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2};$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N_2(\frac{\varepsilon}{2}) \;\; \forall n > N(\varepsilon) : |x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Рассмотрим выражение $|a - b|$ и преобразуем его:

$$|a - b| = |a - x_n + x_n - b| \le |a - x_n| + |x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким образом, имеем определение БМП для $\{a-b\}$:

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists N=max(N_1,N_2)\ \ \forall n>N(\varepsilon):|a-b|<\varepsilon$$

Заметим, что последовательность $\{a-b\}$ – стационарная. А если бесконечно малая последовательность стационарная, то члены этой последовательности равны нулю (докажите это свойство БМП самостоятельно), т.е.

$$\{a-b\}=\{0\}\Leftrightarrow a=b.$$

Это противоречит первоначальному предположению о неравенстве *a* и *b*. Получили противоречие, теорема доказана.

Определим место сходящихся последовательностей в общей структуре множества всех последовательностей.

Теорема.

Всякая сходящаяся последовательность ограничена.

Доказательство.

Учтем, что все члены сходящейся к числу *a* последовательности, начиная с некоторого номера $[N(\varepsilon)]+1$, попадают в произвольную ε-окрестность точки *a*, т.е. для $\forall n\geq[N(\varepsilon)]+1$ $x_n\in(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$, за пределами которой остается лишь конечное число первых членов, т.е. множество $\{x_1,x_2,...,x_N\}$.

В силу ограниченности указанных множеств их объединение также будет ограниченным множеством. Следовательно, если $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, то $\exists M>0$, что для $\forall n\ \ |x_n|\leq M$.

Замечания к теореме.

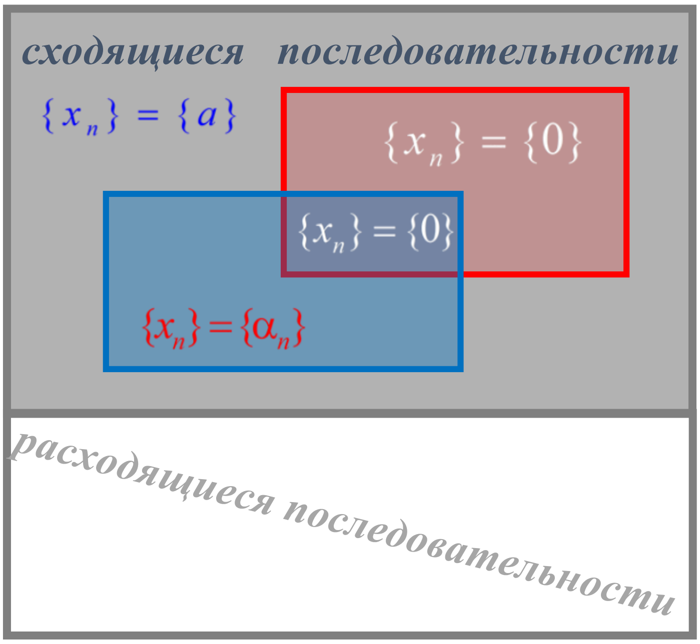
1. Ограниченность последовательности есть необходимое условие ее сходимости (условие, которое нельзя обойти): множество сходящихся последовательностей принадлежит только множеству ограниченных последовательностей.
2. Обратное утверждение:

   «всякая ограниченная последовательность сходится»

   не является теоремой. Существуют ограниченные последовательности как сходящиеся так и расходящиеся.

   Обратимся к ранее рассмотренному примеру числовой последовательности $x_n=\cos n\pi$. Поскольку для $n\in N$ члены последовательности удовлетворяют неравенству $|\cos n\pi|\leq 1$, то последовательность – ограниченная по определению.

   С другой стороны, она является расходящейся в силу того, что никакое число не является ее пределом, поскольку для любого числа $a\in R$ существует окрестность $U(a,\varepsilon)$, например $0<\varepsilon<1$, за пределами которой находится бесконечное множество членов последовательности.
3. Таким образом, углубляясь в структуру изучаемого множества – числовых последовательностей, мы установили, что множество всех ограниченных последовательностей состоит из двух, не имеющих общих элементов множеств: сходящихся и расходящихся ограниченных последовательностей.



4. По правилу контрапозиции к теореме об ограниченности сходящейся последовательности можно сформулировать равносильное утверждение.

   «Если последовательность не ограничена, то она расходится».

   Неограниченная последовательность не может сходится, поскольку сходящаяся последовательность является ограниченной.

Пример. Докажите, что последовательность $x_n = 5n - 3$ расходится.

1) Сначала проверим необходимый признак сходимости, т.е. принадлежность последовательности к классу ограниченных последовательностей. Очевидно, что для $n \in N$ $x_n > 0$ и $x_n = 5n - 3$ неограниченно возрастает при $n \to \infty$.

Неограниченность последовательности можно проверить и по определению.

1) Берем произвольное число M>0.

2) Составляем неравенство $x_n > M$: $5n - 3 > M$

3) Решаем неравенство относительно n:

$$n > \frac{M+3}{5} \text{ или } n \geq \left[\frac{M+3}{5}\right] + 1.$$

Следовательно, для $\forall n \geq \left[\frac{M+3}{5}\right] + 1$ выполняется неравенство $x_n > M$. Это значит, что последовательность является неограниченной сверху и, следовательно, расходится.

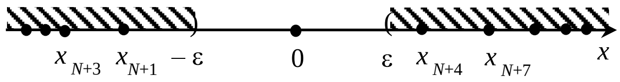
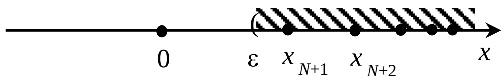
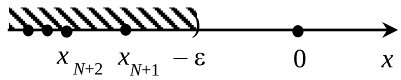
7⁰. Бесконечно большие последовательности (ББП) и их свойства.

Сейчас нас будут интересовать последовательности, члены которых, будучи взяты по модулю, неограниченно возрастают. Последовательности будем рассматривать на расширенной числовой прямой, т.е. числовой прямой, пополненной бесконечно удаленными точками: +∞, –∞, ∞.

Для $\forall \varepsilon > 0$ определены ε-окрестности этих точек

$$U(+\infty,\varepsilon)=\{x \mid x>\varepsilon\},\ U(-\infty,\varepsilon)=\{x \mid x<-\varepsilon\},\ U(\infty,\varepsilon)=\{x \mid |x|>\varepsilon\}.$$

Различают три вида бесконечно больших последовательностей: определения, символическая запись и геометрическая интерпретация приведены в следующей таблице

Определение	Краткая запись и геометрическая интерпретация
Последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно большой, если по произвольному числу ε (в том числе и сколь угодно большому), можно указать такой номер N(ε), что для всех n > N(ε) выполняется неравенство $\mid x_n \mid > \varepsilon$.	$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)\ \forall n>N(\varepsilon):\ \mid x_n\mid>\varepsilon$  Произвольная ε-окрестность точки ∞ улавливает все члены последовательности, начиная с некоторого номера N(ε)+1. $\forall U(\infty,\varepsilon)\ \exists N(\varepsilon)\ \forall n>N(\varepsilon):\ x_n\in U(\infty,\varepsilon)$
Последовательность $\{x_n\}$ называется ББП положительного знака, если по произвольному числу ε (в том числе и сколь угодно большому), можно указать такой номер N(ε), что для всех n > N(ε) выполняется неравенство $x_n > \varepsilon$.	$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)\ \forall n>N(\varepsilon):\ x_n>\varepsilon$  Произвольная ε-окрестность точки +∞ улавливает все члены последовательности, начиная с некоторого номера N(ε)+1. $\forall U(+\infty,\varepsilon)\ \exists N(\varepsilon)\ \forall n>N(\varepsilon):\ x_n\in U(+\infty,\varepsilon)$
Последовательность $\{x_n\}$ называется ББП отрицательного знака, если по произвольному числу ε (в том числе и сколь угодно большому), можно указать такой номер N(ε), что для всех n > N(ε) выполняется неравенство $x_n < -\varepsilon$.	$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=-\infty \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)\ \forall n>N(\varepsilon):\ x_n<-\varepsilon$  Произвольная ε-окрестность точки –∞ улавливает все члены последовательности, начиная с некоторого номера N(ε)+1. $\forall U(-\infty,\varepsilon)\ \exists N(\varepsilon)\ \forall n>N(\varepsilon):\ x_n\in U(-\infty,\varepsilon)$

Пример 1. Докажите, что $x_n=(-1)^n n$ есть ББП.

1) Берем ∀ ε >0 (в том числе и сколь угодно большое).

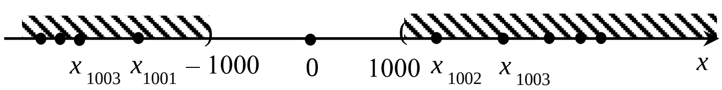
2) Составляем неравенство $x_n>\varepsilon:\ \mid(-1)^n n\mid>\varepsilon$.

3) Решаем неравенство относительно n: $\mid n\mid>\varepsilon$

4) Указываем номер N(ε)=[ε]

5) Приведем геометрическую иллюстрацию, например, для ε=1000.

В этом случае N(ε)=1000 и для $\forall n\geq 1001\ x_n\in U(\infty,1000)$.



Пример 2. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty}\log_2 n = +\infty$.

1) Берем $\forall$ ε >0 (в том числе и сколь угодно большое).

2) Составляем неравенство $x_n > \varepsilon$: $\log_2 n > \varepsilon$.

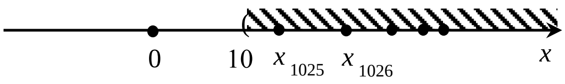
3) Решаем неравенство относительно *n*:

$$\log_2 n > \varepsilon \Leftrightarrow n > 2^{\varepsilon}$$

4) Указываем номер $N(\varepsilon)=[2^{\varepsilon}]$

5) Приведем геометрическую иллюстрацию, например, для ε=10.

В этом случае $N(\varepsilon)=2^{10}=1024$.



Пример 3. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\sqrt[3]{n}) = -\infty$.

1) Берем $\forall$ ε >0 (в том числе и сколь угодно большое).

2) Составляем неравенство $x_n < -\varepsilon$: $1-\sqrt[3]{n} < -\varepsilon$.

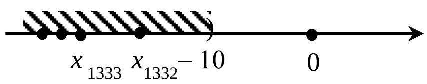
3) Решаем неравенство относительно *n*:

$$1-\sqrt[3]{n} < -\varepsilon \Leftrightarrow \sqrt[3]{n}-1 > \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt[3]{n} > \varepsilon+1 \Leftrightarrow n > (\varepsilon+1)^3$$

4) Указываем номер $N(\varepsilon)=[(\varepsilon+1)^3]$

5) Приведем геометрическую иллюстрацию, например, для ε=10.

В этом случае $N(\varepsilon)=1331$.



Необходимый признак ББП

Необходимый признак важен для определения места ББП в уже существующей структуре множеств всех последовательностей.

Теорема.

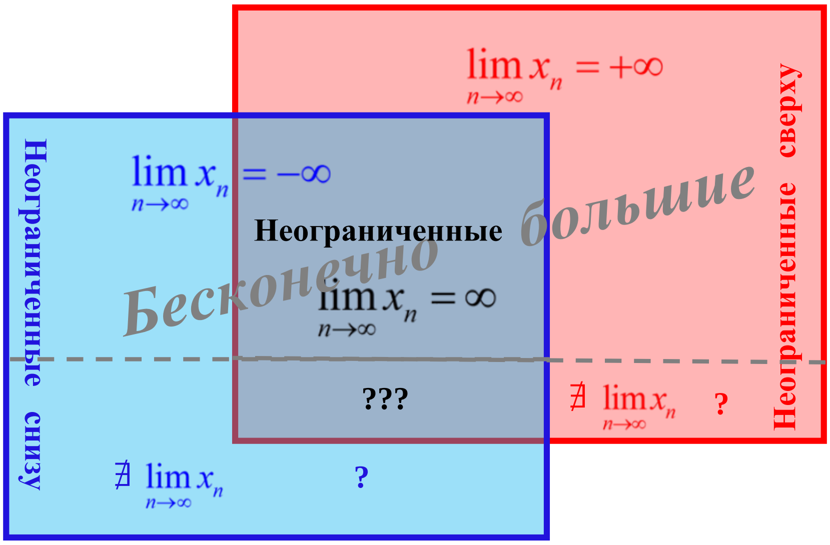
Всякая ББП есть последовательность неограниченная

Доказательство.

Если $\{x_n\}$ – ББП, то $\forall\varepsilon>0$ все ее члены, начиная с номера $N(\varepsilon)+1$ удовлетворяют условию $|x_n| > \varepsilon$, т.е. множество всех ее членов $\{x_{N(\varepsilon)+1}, x_{N(\varepsilon)+2}, \dots\}$ является неограниченным. За пределами этого множества остается разве лишь конечное число ее членов: $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, которое является ограниченным. Объединение неограниченного и ограниченного множеств есть множество неограниченное. Следовательно, ББП является неограниченной последовательностью.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, то $\{x_n\}$ – последовательность, неограниченная снизу, а если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, то $\{x_n\}$ – последовательность, неограниченная сверху.

Приведем диаграмму, иллюстрирующую соотношение множеств ББП и неограниченных последовательностей.



Таким образом, необходимый признак ББП указывает на ее принадлежность множеству неограниченных последовательностей.

Обратное утверждение
«если последовательность неограниченная, то она бесконечно большая» не является теоремой. Существуют неограниченные последовательности, не являющиеся бесконечно большими. На диаграмме они помечены знаком «?». Кроме того, пример такой последовательности был рассмотрен ранее.

Используя правило отрицания кванторов, запишем определение последовательности, не являющейся ББП.

Вид $\{x_n\}$	Определение в кванторной форме	Геометрический смысл определения
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n \ne \infty$	$\exists\varepsilon>0\ \forall N\ \exists n>N: \lvert x_n\rvert \le \varepsilon$	Существует по крайней мере одна такая ε-окрестность точки ∞ $U(\infty,\varepsilon)$, за пределами которой находится бесконечное множество ее членов.
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n \ne +\infty$	$\exists\varepsilon>0\ \forall N\ \exists n>N: x_n \le \varepsilon$	Существует по крайней мере одна такая ε-окрестность точки +∞ $U(+\infty,\varepsilon)$, за пределами которой находится бесконечное множество ее членов.
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n \ne -\infty$	$\exists\varepsilon>0\ \forall N\ \exists n>N: x_n \ge -\varepsilon$	Существует по крайней мере одна такая ε-окрестность точки –∞ $U(-\infty,\varepsilon)$, за пределами которой находится бесконечное множество ее членов.

Пример . Докажите, что $x_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{(-1)^n}$ не является бесконечно большой.

Запишем несколько первых членов последовательности:

$$1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{6}, 7, \frac{1}{8},\ \ldots\ , 2n-1, \frac{1}{2n},\ \ldots$$

а) Докажем, что она неограниченная сверху.

Берем $\forall$ ε >0 (в том числе и сколь угодно большое).

Составляем неравенство $x_n > \varepsilon : \left(\frac{1}{n}\right)^{(-1)^n} > \varepsilon$. Каким бы ни было число ε > 0, найдется член последовательности с нечетным номером такой, что будет выполняться неравенство $2n-1>\varepsilon$, справедливое для $\forall n > \frac{\varepsilon+1}{2}$, что и означает неограниченность последовательности сверху.

б) Докажем, что последовательность не является бесконечно большой, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq +\infty$. Для этого достаточно указать хотя бы одну такую окрестность точки +∞, за пределами которой находится бесчисленное множество членов последовательности, например, $U(+\infty,1)$. За ее пределами находится бесчисленное множество членов с четными номерами: $x_n = \frac{1}{2k}$. Данная последовательность не является бесконечно большой. Укажите ее место на диаграмме.