МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

Э.Н. Подскребко, Н.Ф. Пестова, Л.А. Кан

Высшая математика

Контролирующие материалы для организации самостоятельной работы студентов

Учебно-методическое пособие

Издание второе, переработанное

Издательство
Томского политехнического университета
2011

РАЗДЕЛ IV

Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Введение

«Лишь дифференциальное исчисление дает естествознанию возможность изображать математически не только состояния, но и процессы: движение».

Ф.Энгельс

Основной математический аппарат, изучаемый в разделе математики «Дифференциальное исчисление» – это производная функции, ее свойства и применение. Если какой-то процесс описывается функцией $y = f(x)$, то производная $f'(x)$ есть скорость изменения функции. Это абстрактное математическое понятие $f'(x)$ в разных областях знания позволяет найти скорость, проанализировать результат, построить математическую модель, исследовать ее. Насколько основательным будет фундамент, построенный из математических понятий, зависит качество овладения и естественнонаучными, и техническими дисциплинами.

В каждом варианте содержится 11 задач, все задачи снабжены ответами. Поясним решение некоторых из них.

1. Задачи на иллюстрацию физического смысла производной (см. кодификатор 4.1.4, табл. 4).

Если $s(t)$ – закон движения материальной точки, то $\frac{ds}{dt} = v(t)$ – мгновенная скорость неравномерного движения в момент t.

Если $m(x)$ – масса неоднородного стержня $[0,\ x]$, то $\frac{dm}{dx} = \rho(x)$ – локальная плотность стержня в точке x.

Если $q(t)$ – количество электричества, протекающее за время $[0,\ t]$, то $\frac{dq}{dt} = J(t)$ – сила переменного тока в момент t.

Если $\alpha(t)$ – угол поворота шкива, то $\frac{d\alpha}{dt} = \omega(t)$ – угловая скорость вращения.

Если $m = f(t)$ – количество вещества, вступившего в реакцию за время t, то $\frac{dm}{dt}$ – скорость химической реакции в момент t.

2. Задача на геометрический смысл производной (А3).

Постройте схематично график функции $y = f(x)$ в окрестности точки x_0, если $f(x_0) = y_0$ и (3 варианта второго условия задачи)

а) $f'(x_0) = k$; б) $f'(x_0) = \infty$; в) $f'(x_0)$ не существует.

Решение. Для решения задачи необходимо знать:

– геометрический смысл равенства $f(x_0) = y_0$;

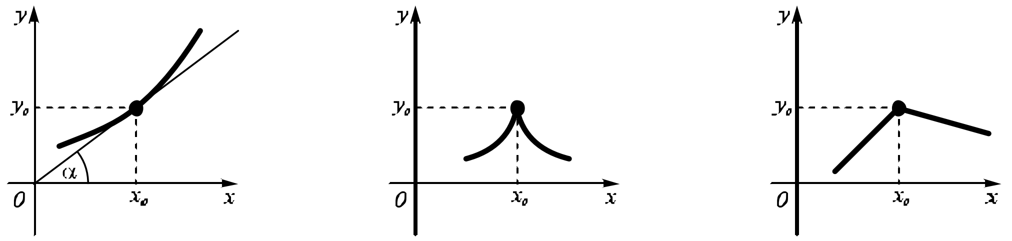
– геометрический смысл производной $f'(x_0)$.

Если $f(x_0) = y_0$, то график функции проходит через точку плоскости с координатами (x_0, y_0).

Если $f'(x_0) = k$, то касательная к кривой $y = f(x)$ в точке (x_0, y_0) наклонена к оси Ox под углом α, для которого $\text{tg}\alpha = k$.

Если $f'(x_0) = \infty$, то касательная к кривой $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ есть вертикальная прямая ($\text{tg}\alpha = \infty$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$).

Если $f'(x_0)$ не существует, то не существует $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, в частности, $\lim\limits_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \neq \lim\limits_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ и значению $x = x_0$ на кривой соответствует угловая точка.



$f'(x) = \text{tg}\alpha = k$ $f'(x_0) = \infty$ $f'(x_0)$ не существует

Вариантов расположения кривой, проходящей через точку (x_0, y_0) с заданной информацией о значении производной может быть много. Среди предложенных Вам вариантов для ответа выберите правильный, отвечающий условиям Вашей задачи.

3. Приведем решение задачи, которая должна помочь в выборе ответа для задания А5.

Задача 3. Найдите Δy и dy для функции $y = x^3$. Выполните геометрическую иллюстрацию при $x = 1$.

Решение

а) $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^3 - x^3 = (x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + + (\Delta x)^3) - x^3 = 3x^2\Delta x + (3x + \Delta x)(\Delta x)^2$;

б) $dy = 3x^2 dx$ (по определению dy – линейная относительно Δx часть приращения функции);

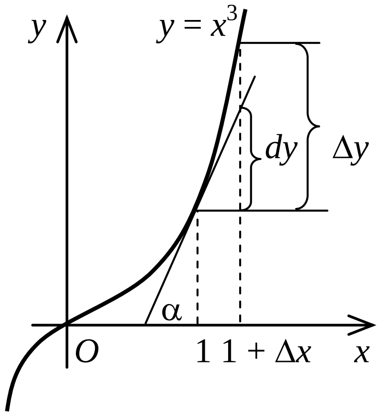
в) если воспользоваться формулой вычисления дифференциала, то $dy = f'(x)\Delta x$. Для заданной функции $dy = 3x^2(\Delta x)$.

Геометрическая иллюстрация:

1. Строим кривую $y = x^3$ и касательную к ней в точке $x_0 = 1$.

2. Обозначаем отрезок, соответствующий разности $\Delta y = f(1 + \Delta x) - f(1)$. В нашем случае $\Delta y > 0$.

3. Выделяем отрезок, соответствующий dy. Он равен приращению ординаты касательной, проведенной к кривой в точке $x_0 = 1$.



$$dy = y' \cdot \Delta x = \mathrm{tg}\alpha \Delta x$$

4. При изучении любого раздела математики не последнее место занимает такая цель как развитие логического мышления, умения различать необходимые и достаточные условия в формулировке любой теоремы, умения сформулировать теорему, обратную к данной, записать теорему в форме условного суждения, умения привести иллюстрирующие примеры и контрпримеры. Проверке сформированности этих умений способствует задание А7.

Решим задачу на построение диаграмм расположения заданных множеств, тем более ни в одном стандартном учебнике таких задач нет.

Задача 4. Постройте диаграмму взаимного расположения множества непрерывных функций (B) и множества дифференцируемых функций (A). Ответ обоснуйте.

Решение. Известна теорема «Если функция дифференцируема в точке (или на интервале), то она непрерывна в этой точке (на интервале)». Из этой теоремы следует, что множество A дифференцируемых функций есть подмножество множества B непрерывных функций.

Обратное утверждение к этой теореме уже не является теоремой, т. к. существуют функции непрерывные, но не дифференцируемые в точке. Приведем пример такой функции: $f(x) = |\sin x|$ непрерывна в точке $x = 0$, но $f'(0)$ не существует, т. е. функция не дифференцируема в точке $x = 0$ (критерий дифференцируемости, 4.1.2, табл. 4).

Исследуем функцию $f(x) = |\sin x|$ на непрерывность:

$$f(0-0) = \lim_{\substack{x \to 0, \\ x<0}} |\sin x| = \lim_{\substack{x \to 0, \\ x<0}} |-\sin x| = 0;$$

$$f(0+0) = \lim_{\substack{x \to 0, \\ x>0}} |\sin x| = \lim_{\substack{x \to 0, \\ x>0}} |\sin x| = 0;$$

$$f(0) = |\sin 0| = 0.$$

Поскольку $f(0-0) = f(0) = f(0+0)$, функция $f(x) = |\sin x|$ непрерывна в точке $x = 0$.

Исследуем функцию $f(x) = |\sin x|$ на дифференцируемость в точке $x = 0$.

Найдем $f'(0)$ по определению, поскольку $f(x) = |\sin x|$ не элементарная функция.

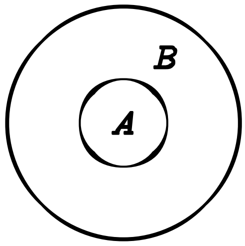
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x};$$

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\sin x|}{\Delta x} = \begin{cases} +1 & \text{при } \Delta x > 0; \\ -1 & \text{при } \Delta x < 0, \end{cases}$$

т. е. $f'(0)$ не существует.

Подведем итог исследованию:

$$A \subset B \text{ и } B \cap A \neq \varnothing$$



З а м е ч а н и е: Задача В3 решается аналогично исследованию на непрерывность и дифференцируемость функции $f(x) = |\sin x|$ в точке $x = 0$.

Таблица 4

Кодификатор раздела
«Дифференциальное исчисление функций одной переменной»

Код			Содержание	Проверяемое умение
раздел	тема	вопрос		
4			Дифференциальное исчисление функций одной переменной	
	4.1		Производная и дифференциал первого порядка	
		4.1.1	Задачи, приводящие к понятию производной. Определение производной	Уметь сформулировать определение производной, найти по определению производные 1-2-х элементарных функций, уметь привести пример производной в 2-3-х прикладных задачах.
		4.1.2	Понятие функции, дифференцируемой в точке. Критерий дифференцируемости. Дифференциал функции.	Уметь доказать критерий дифференцируемости функции. Уметь в простейших случаях ($y = x^2$, $y = x^3$) найти дифференциал функции по определению и по формуле для вычисления.
		4.1.3	Геометрический смысл производной и дифференциала функции.	Уметь находить уравнения касательной прямой к плоским кривым. Уметь иллюстрировать на чертеже приращение и дифференциал функции.
		4.1.4	Физический смысл производной и дифференциала функции.	Уметь применять производную, определяя ее смысл в различных прикладных задачах.

Таблица 4. Продолжение

		4.1.5	Свойства	Уметь доказать теорему,

			дифференцируемой функции (о непрерывности дифференцируемой функции, о дифференцируемости суммы, произведения, частного).	уметь сформулировать утверждение, обратное этой теореме и исследовать верно ли оно. Овладеть начальными этапами техники дифференцирования.
		4.1.6	Производная и дифференциал сложной функции. Инвариантность формы дифференциала. Производная обратной функции.	Уметь находить производные и дифференциалы сложных функций, применять теорему о производной обратной функции.
		4.1.7	Производные и дифференциалы основных элементарных функций.	Уметь вывести формулы для производных основных элементарных функций, основываясь на определении и свойствах производных.
		4.1.8	Параметрически заданные функции. Определение, примеры. Производная параметрически заданной функции.	Уметь строить кривые, заданные параметрически (эллипс, циклоида, астроида и др.), уметь находить производные от параметрически заданных функций.
		4.1.9	Неявно заданные функции. Определение, примеры. Правило дифференцирования неявно заданных функций. Логарифмическое дифференцирование.	Уметь строить кривые по их уравнениям, находить уравнения касательных.

Таблица 4. Продолжение

		4.1.10	Применение производной и дифференциала при	Уметь применить в конкретных задачах свои знания о том, что $f'(x_0)$

			решении геометрических и физических задач.	есть: а) тангенс угла наклона касательной в точке $x = x_0$; б) скорость изменения функции $y = f(x)$ в точке x_0.
	4.2		Производные и дифференциалы высших порядков	
		4.2.1	Производные высших порядков. Определение, свойства. Правила отыскания производных для $y = f(x)$, для параметрически и неявно заданных функций.	Освоить технику дифференцирования. Уметь применять метод математической индукции при отыскании производной порядка n.
		4.2.2	Дифференциалы высших порядков. Определения, правило отыскания.	Уметь находить дифференциалы 2-го, 3-го порядка.
		4.2.3	Некоторые свойства производных и дифференциалов высших порядков (формула Лейбница для производной произведения, теорема о неинвариантности формы дифференциалов порядка выше первого).	Уметь применять формулу Лейбница и находить дифференциалы второго, третьего порядка для сложной функции.
	4.3		Основные теоремы о дифференцируемых функциях.	

Таблица 4. Продолжение

		4.3.1	Определение экстремума функции. Теорема Ферма. Необходимое условие	Уметь проанализировать, является ли истинным утверждение, обратное теореме Ферма.

			экстремума.	Уметь привести геометрическую иллюстрацию теоремы.
		4.3.2	Теорема Ролля об обращении в ноль производной.	Уметь применить теорему к конкретной функции, выполнить геометрическую иллюстрацию. Уметь доказать существенность условий теоремы.
		4.3.3	Теоремы Лагранжа и Коши о среднем значении (или о конечных приращениях).	Уметь выполнить геометрическую иллюстрацию, уметь доказать существенность условий теоремы, уметь показать, к какой функции применима теорема Лагранжа, к какой – нет.
		4.3.4	Теорема Лопиталя и правило Лопиталя раскрытия неопределенностей.	Уметь применять правило Лопиталя. Уметь сравнить порядок роста показательной, степенной и логарифмической функций.
		4.3.5	Формула Тейлора и формула Маклорена с остаточным членом в форме Пеано и в форме Лагранжа.	Уметь записать каждую из этих формул.
		4.3.6	Разложение основных элементарных функций по формуле Тейлора и по формуле Маклорена.	Уметь записать формулы для e^x, $\sin x$, $\cos x$, $(1 + x)^m$ и т.д.

Таблица 4. Окончание

		4.3.7	Применение формулы Тейлора. Выделение главной части функции.	Уметь применять формулы Тейлора и Маклорена при раскрытии неопределенностей в приближенных вычислениях.
	4.4		Исследование	

			функций и построение их графиков	
		4.4.1	Теоремы о возрастании и убывании функции на интервале.	Уметь находить интервалы монотонности функции.
		4.4.2	Первый достаточный признак экстремума.	Уметь исследовать функцию на экстремум с помощью производной первого порядка.
		4.4.3	Отыскание наименьшего и наибольшего значений функции на отрезке.	Уметь находить наименьшее и наибольшее значения функции на отрезке.
		4.4.4	Второй достаточный признак экстремума. Исследование на экстремум с помощью производных высшего порядка.	Уметь строить схематичный график функции в окрестности точки x_0, если известны значения: $f(x_0)$, $f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots$ $\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$, $f^{(n)}(x_0)\neq 0$.
		4.4.5	Определение выпуклости, вогнутости графика функции, точки перегиба. Аналитические признаки выпуклости и вогнутости.	Уметь находить интервалы выпуклости, вогнутости кривой
		4.4.6	Асимптоты графика функции. Виды асимптот. Критерий существования наклонной асимптоты.	Уметь находить уравнения вертикальных и наклонных асимптот графика функции в случае, если они существуют.
		4.4.7	Общая схема исследования функции и построение ее графика	Уметь провести полное исследование функции и построить ее график