РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Зачастую плотности вероятностей и функции распределения, встречающиеся в практической деятельности, с хорошей точностью могут быть приближены некоторыми математическими функциями.

Мы познакомимся с несколькими такими «идеальными» распределениями для дискретных и непрерывных случайных переменных соответственно, а также рассмотрим распределения, встречающиеся на практике, и методы работы с ними.

.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Дискретные распределения

Биномиальное распределение.

Биномиальное распределение дает вероятность получения r успешных испытаний, если общее число испытаний равно N и вероятность успеха в одном испытании равна p. Например, число событий в одной ячейке гистограммы распределено по биномиальному закону.

Переменная r, положительное целое $\leq N$.

Параметры N, положительное целое; p, $0 \leq p \leq 1$.

.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Дискретные распределения

Функция вероятности

$$P(r) = \binom{N}{r} p^r (1-p)^{N-r}, r = 0, \dots, n. \qquad (49)$$

Здесь $\binom{N}{r} = \frac{N!}{r!(N-r)!}$ - биномиальный коэффициент.

Ожидаемое значение $E(r) = Np$. (50)

Дисперсия $D(r) = Np(1-p)$. (51)

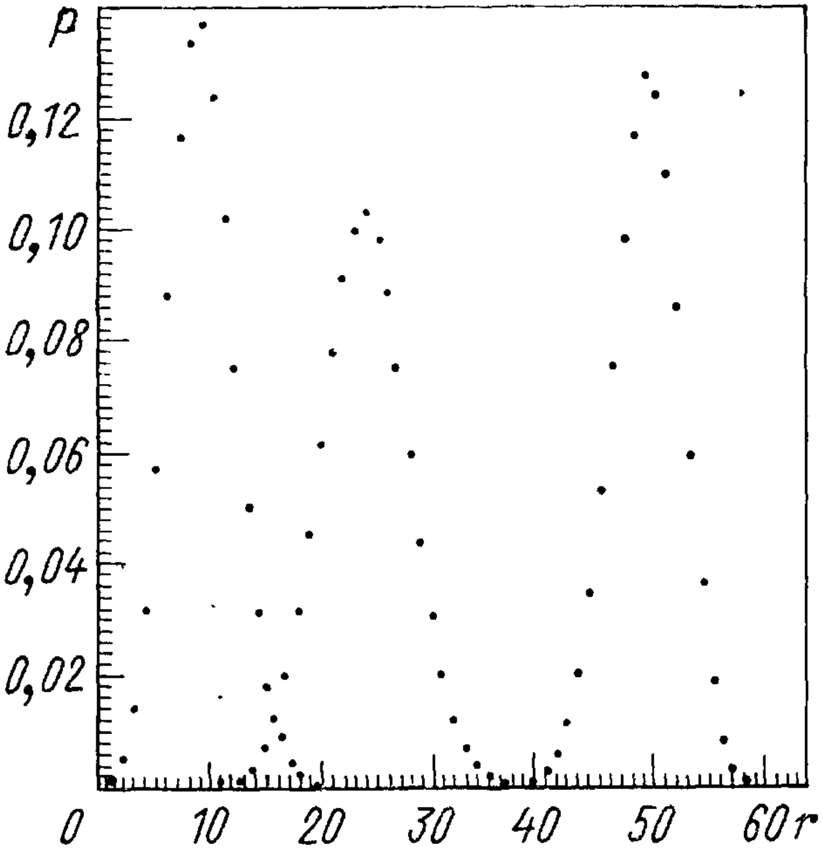
Асимметрия $\gamma_1 = \frac{1-2p}{\sqrt{Np(1-p))}}$.

Эксцесс $\gamma_2 = \frac{1-6p(1-p)}{Np(1-p)}$.

.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Дискретные распределения



Производящая функция вероятностей

$$G(Z) = [p + (1-p)Z]^N.$$

Если p неизвестно, то несмещенная оценка дисперсии

$$D(r) = \frac{N}{N-1} N \left(\frac{r}{N}\right)\left(1 - \frac{r}{N}\right).$$

Биномиальные распределения для $N = 62$
с ожидаемыми средними Np =10, 25, 50

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Дискретные распределения

Для экспериментаторов, использующих электронные методы детектирования частиц, наиболее типичный пример применения биномиального распределения встречается при измерении эффективности счетчика, включенного в схему совпадения с другими счетчиками телескопа. Пропустив заданное число N_k частиц через телескоп из k счетчиков, регистрируют число соответствующих срабатываний схемы совпадений N_{k+1}, включающей исследуемый i-й счетчик. Тогда оценка эффективности этого счетчика, включая и эффективность электронной схемы совпадений, определяется отношением

$$\eta_i = \frac{N_{k+1}}{N_k} .$$

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Дискретные распределения

Оценка стандартного отклонения для измеренного значения будет равна

$$\hat{\sigma}_i = \sqrt{\frac{N_{k+1}\left(1 - \hat{f}_i\right)}{N_k}} \,.$$

В практически важном случае, когда $f_i \sim 1$, корреляция в биномиальном распределении между случайной величиной N_{k+1} и заданной N_k приводит к значительному уменьшению погрешности измерений.

.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Дискретные распределения

Примеры:

1. Предположим, что результат A соответствует попаданию события в j-ю ячейку гистограммы, а $\overline{A}$ соответствует попаданию события в любую другую ячейку. Вероятность p получить результат A обычно равна интегралу от ф.п.в. по ячейке (иногда его можно хорошо приблизить произведением ширины ячейки на значение ф.п.в. в середине ячейки). Вероятность попадания r событий в ячейку j и $N - r$ событий во все другие ячейки дается выражением (49). Ожидаемое число событий в ячейке j равно Np в соответствии с (50), а дисперсия — $Np(1 - p)$ в соответствии с (51).

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Дискретные распределения

2. Предположим, что исследуется асимметрия вперед-назад и что эксперимент нужно закончить после набора N событий (N не случайная переменная!). Пусть F и B — числа событий в передней и задней полусферах соответственно $N = F + B$. Тогда F распределено по биномиальному закону:

$$\binom{N}{F} p^F (1-p)^B$$

со средним Np и дисперсией $Np(1-p)$. При больших N дисперсия с хорошей точностью равна $F(1-p)$, а стандартное отклонение $\sqrt{Np(1-p)}$ (не $\sqrt{F}$).

.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Дискретные распределения

Обычно асимметрия вперед-назад определяется как

$$r = \frac{F - B}{F + B} = \frac{2F}{N} - 1\,.$$

Тогда r распределено по закону

$$P(r) = \binom{N}{\frac{1}{2}(Nr - 1)} p^{\frac{1}{2}(Nr+1)} (1 - p)^{N - \frac{1}{2}(Nr+1)}$$

с дисперсией $\frac{4p(1-p)}{N}$. При больших N дисперсия равна приближенно

$$D(r) \approx \frac{4FB}{N^3} = \frac{4FB}{(F + B)^3}\,. \qquad (52)$$

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Дискретные распределения

Соответственно, стандартное отклонение

$$\sigma \approx \frac{2}{F+B}\sqrt{\frac{FB}{F+B}}$$

3. Вероятность зарегистрировать нужное событие в одном экспериментальном испытании равна p. Предположим, что нужно узнать, как много испытаний следует проделать, чтобы вероятность регистрации по крайней мере одного события была α. Пусть X число нужных событий при N испытаниях, а N неизвестно.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Дискретные распределения

Задача состоит в том, чтобы найти такое N, для которого

$$P(X \geq 1) \geq \alpha,$$

или

$$1 - P(X = 0) \geq \alpha,$$

или

$$P(X = 0) \leq 1 - \alpha.$$

Выражая левую часть неравенства с помощью (49) при $r = 0$, получаем

$$(1 - p)^N \leq 1 - \alpha.$$

Прологарифмировав неравенство с учетом того, что $(1 - p) < 1$, получим

$$N \geq \frac{\ln(1 - \alpha)}{\ln(1 - p)}.$$

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Дискретные распределения

Мультиномиальное распределение.

Обобщением биномиального распределения на случай более чем двух возможных исходов эксперимента служит мультиномиальное распределение. Оно дает вероятность получения r_i результатов типа i в N независимых испытаниях, где p_i соответствует вероятности i-го исхода в одном испытании ($i = 1, 2, \ldots, k$).

Переменные r_i ($i = 1, 2, \ldots, k$), положительные целые $\leq N$.

Параметры N, положительное целое; k, положительное целое; $p_1 \geq 0,\ p_2 \geq 0,\ \ldots,\ p_k \geq 0$ с $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$.

.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Дискретные распределения

Функция вероятности

$$P(r_1, \dots, r_k) = \frac{N!}{r_1! \cdots r_k!} p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}. \qquad (53)$$

Ожидаемое значение $E(r_i) = Np_i$. (54)

Дисперсия $D(r_i) = Np_i(1 - p_i)$. (55)

Смешанные вторые моменты $D\left(r_i, r_j\right) = -Np_i p_j, i \neq j$. (56)

Производящая функция вероятностей

$$G(Z_2, \dots, Z_k) = (p_1 + p_2 Z_2 + \dots + p_k Z_k)^N.$$

.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Дискретные распределения

Примером мультиномиального распределения является гистограмма, содержащая N событий и состоящая из k ячеек; при этом в ячейке с номером i находится r_i событий. В этом примере случайная переменная имеет вид k-мерного вектора, но область значений этого вектора ограничена $(k-1)$-мерным пространством, поскольку $\sum_{i=1}^{k} r_i = N$, Так как N фиксировано, то можно с помощью (56) показать, что коэффициент корреляции числа событий в двух ячейках i и j отрицателен:

$$\rho(r_i, r_j) = -\sqrt{\frac{p_i p_j}{(1-p_i)(1-p_j)}} \,. \qquad (57)$$

.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Дискретные распределения

Во многих экспериментальных ситуациях наблюдения r_i независимы, так что и общее число событий $N = \sum r_i$ может быть рассмотрено как случайная величина. Тогда данные можно рассматривать с двух точек зрения.

1. Ненормированный случай. Если удобно считать N случайной переменной, то рассматривают $(k + 1)$-переменную (r_i и N), из которых r_i взаимно не коррелированы, а N коррелированы с r_i.

Соответствующая матрица вторых моментов имеет

ранг k. Тогда распределение событий по ячейкам не является мультиномиальным.

.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Дискретные распределения

2. Нормированный случай. Если неудобно рассматривать N как случайную переменную (например, если не существует теории, которая предсказывает ожидаемое значение для N), то величины r_i должны быть рассмотрены как условные по отношению к фиксированному наблюдаемому значению N. В этом случае k значений r_i распределены по мультиномиальному закону, все они коррелированы друг с другом с корреляциями, вычисляемыми с помощью уравнения (57), а ранг матрицы вторых моментов равен $k-1$.

.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Дискретные распределения

Когда $p_i \ll 1$ (много ячеек), уравнение (55) может быть приближенно записано в виде

$$D_{r_i} \sim Np_i \sim r_i$$

и стандартное отклонение числа событий в ячейке становится равным:

$$\sigma_i \sim \sqrt{r_i}$$

.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Дискретные распределения

Распределение Пуассона.

Распределение Пуассона дает вероятность наблюдения r событий в заданный промежуток времени при условии, что события независимы и возникают с постоянной скоростью. Это распределение является предельным случаем биномиального распределения при $p \to 0$, но когда $Np = \mu$ — конечная константа.

Когда $\mu \to \infty$, распределение Пуассона приближается к нормальному распределению.

.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Дискретные распределения

Переменная r, положительное целое.

Параметр μ, положительное реальное число.

Функция вероятностей

$$P(r) = \frac{\mu^r \exp(-\mu)}{r!}. \qquad (58)$$

Ожидаемое значение $E(r) = \mu$.

Дисперсия $D(r) = \mu$.

Асимметрия $\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{\mu}}$.

.

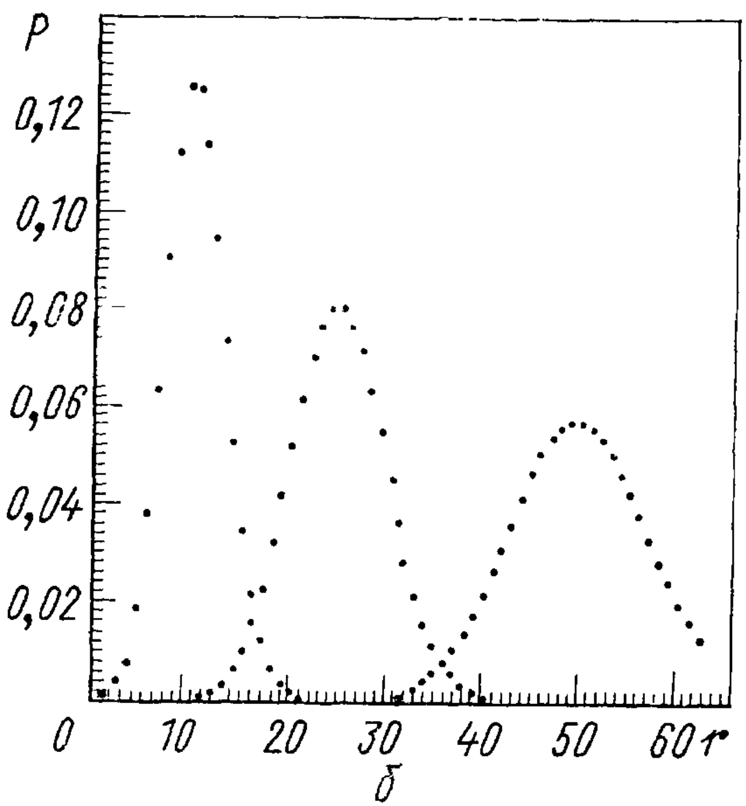
РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Дискретные распределения

Эксцесс $\gamma_2 = \frac{1}{\mu}.$

Производящая функция вероятностей

$$G(Z) = \exp\big(\mu(Z-1)\big)$$

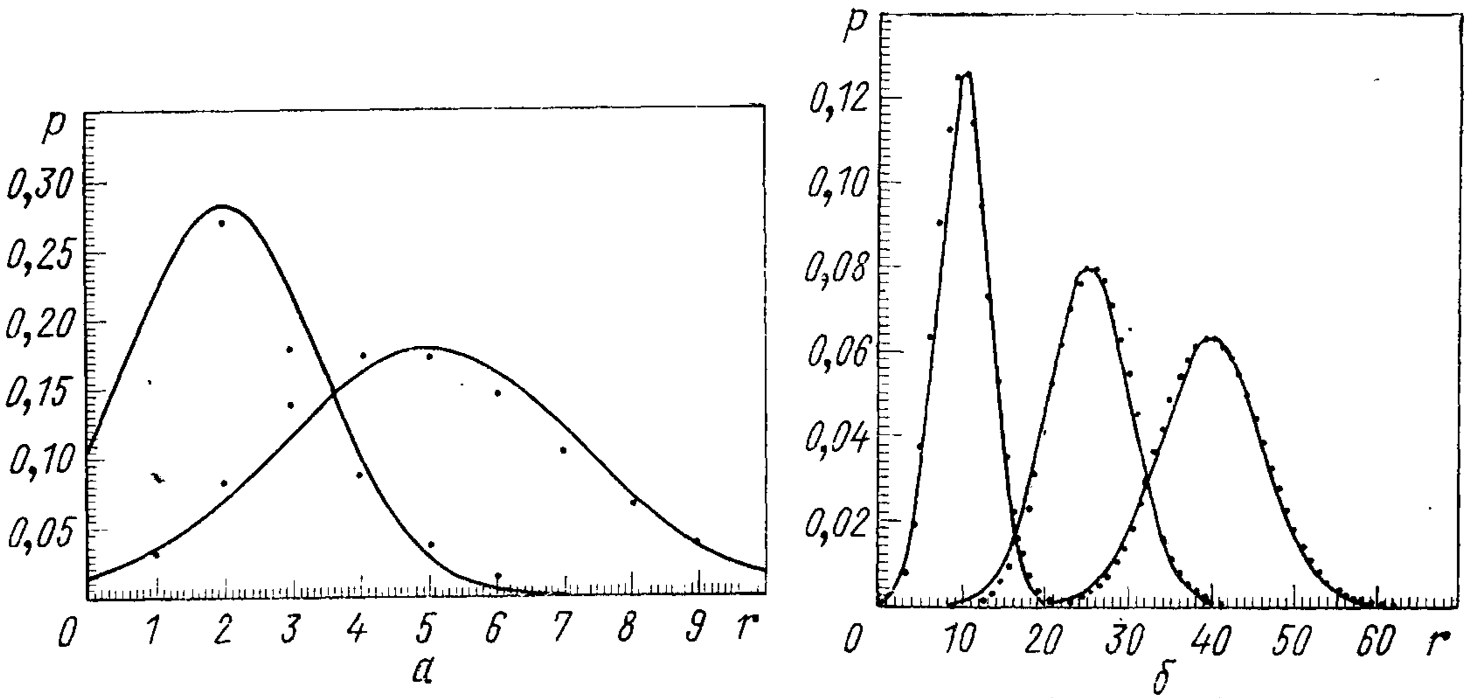


Распределения Пуассона с ожидаемыми значениями μ = 10, 25, 50

.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Дискретные распределения



Сравнение распределений Пуассона (точки) с нормальными распределениями (сплошные линии) с одинаковыми средними и дисперсиями: а – распределения Пуассона с μ=2, 5. Нормальные распределения *N* (2, 2), *N* (5, 5); б – μ=10, 25, 40. Нормальные распределения *N* (10, 10), *N* (25, 25), *N* (40, 40).

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Дискретные распределения

Примеры:

1. Предположим, что частицы испускаются радиоактивным источником со средней интенсивностью γ-частиц в единицу времени так, что вероятность испускания одной частицы за время δt равна $\nu\delta t$, а вероятность испускания более чем одной частицы за время δt есть величина второго порядка малости — $o(\delta t^2)$. Тогда распределение числа X частиц, испущенных в течение фиксированного времени t – пуассоновское со средним νt:

$$P(X = r) = \frac{(\nu t)^r \exp(-\nu t)}{r}$$

.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Дискретные распределения

2. Распределение числа пузырьков на некоторой фиксированной длине трека частицы с постоянным импульсом также обычно считается пуассоновским.

3. Рассмотрим отношение числа частиц, испущенных в переднем и заднем направлениях. Предположим, что числа F и B – независимые случайные переменные, распределенные согласно закону Пуассона.

Тогда F имеет среднее и дисперсию, равные одному и тому же числу, которое приближенно можно положить равным F. Асимметрия определяется соотношением

$$r = \frac{(F - B)}{(F + B)}.$$

.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Дискретные распределения

Предположив, что погрешности F и B малы (большое число событий), воспользуемся формулой дифференциала, чтобы получить приближенное значение для дисперсии r:

$$\frac{dr}{r} = \frac{d(F-B)}{F-B} - \frac{d(F+B)}{F+B} = 2\frac{(BdF + FdB)}{(F-B)(F+B)}.$$

Возведем обе части равенства в квадрат и вычислим ожидаемые значения

$$\frac{E(dr^2)}{r^2} \approx \frac{B^2 E(dF^2) + F^2 E(dB^2)}{(F-B)^2(F+B)^2}.$$

.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Дискретные распределения

В результате получим дисперсию

$$D(r) \approx \frac{4BF}{(F+B)^3}. \qquad (59)$$

т.е. пришли к такому же результату, что и в примере 2 к биномиальному распределению [формула (52)]. Есть здесь, однако, и отличие.

Уравнение (59) является приближенным (мы использовали дифференцирование), тогда как расчеты, приводящие к формуле (52), выполнены строго. На самом деле уравнение (59) отличалось бы от выражения (52), если бы мы не заменили μ_F на F, а μ_B на B.

.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Дискретные распределения

В случае биномиального распределения число событий фиксировано заранее. Если N не фиксировано, то полное число событий подчинено закону Пуассона $e^{-\nu}\nu^{N}$, а F и B – биномиальному закону, условному по отношению к N.

Таким образом, вероятность наблюдения N событий, из которых F частиц вылетают вперед, а B назад, равна:

$$f(N,F,B) = e^{-\nu}\frac{\nu^{N}}{N!}\binom{N}{F}p^{F}(1-p)^{B} = e^{-\nu}\frac{(\nu p)^{F}(\nu(1-p))^{B}}{F!\,B!}.$$

Это выражение имеет вид произведения двух законов Пуассона для F к B.

Конец лекции

.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Дискретные распределения

Составное распределение Пуассона.

Составное распределение Пуассона, известное также как распределение ветвящегося процесса, является распределением суммы N пуассоновских переменных n_i с одинаковым средним μ, а само N также является пуассоновской переменной со средним λ. Это распределение имеет очень широкое применение в экологии, исследовании ядерных цепных реакций, генетике и теории цепей.

.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Дискретные распределения

Переменная r, положительное целое.

Параметры μ, λ, положительные реальные числа.

Функция вероятностей

$$P(r) = \sum_{N=0}^{n} \left[\frac{(N\mu)^r \exp(-N\mu)}{r!} \cdot \frac{\lambda^N \exp(-\lambda)}{N!} \right]. \qquad (60)$$

Ожидаемое значение $E(r) = \lambda\mu$.

Дисперсия $D(r) = \lambda\mu(1 + \mu)$.

Производящая функция вероятностей

$$G(Z) = \exp\big(-\lambda + \lambda \exp(-\mu + \mu Z)\big).$$

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Дискретные распределения

Пример:

Эксперимент по поиску кварков. В качестве примера как простого, так и составного пуассоновского распределения рассмотрим процесс образования капелек заряженными частицами, проходящими через диффузионную камеру. Рассмотрим конкретный случай эксперимента по поиску кварков, выполненный с помощью этой техники.

Когда быстрые (релятивистские) заряженные частицы проходят через диффузионную камеру, то ионизация молекул, вызванная этими частицами, приводит к образованию капелек, которые выглядят, как треки.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Дискретные распределения

Предполагалось, что вероятность образования капли на единицу длины трека постоянна и пропорциональна квадрату заряда частицы. Поскольку почти все частицы, проходящие через камеру, обладают единичным зарядом, можно установить существование частиц с зарядом меньше единицы, если бы существовал трек, число капель в котором на .единицу длины было бы значительно меньше, чем у среднего трека. Цель эксперимента состояла в том, чтобы установить существование кварка – частицы с зарядом $^2/_3$ от единичного (протонного) заряда.

.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Дискретные распределения

Предполагалось также, что распределение числа капель на данной длине трека должно подчиняться закону Пуассона. Среднее этого распределения μ, определенное в результате подсчета числа капель на некоторой фиксированной длине обычных треков, оказалось равным 229. При просмотре был обнаружен трек только со 110 каплями. Возникла статистическая задача: рассчитать вероятность того, что частица с единичным зарядом образует только 110 (или меньше) капель, и сравнить ее со значением $1/_{55\,000} \approx 2 \cdot 10^{-5}$, поскольку в эксперименте было проанализировано 55 000 треков.

.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Дискретные распределения

Расчетное значение этой вероятности равно

$$P(r \le 110) = \sum_{i=0}^{110} \frac{229^i e^{-229}}{i!} \approx 1{,}6 \cdot 10^{-18},$$

откуда следует, что результат значим (т. е. практически исключено, что частица с единичным зарядом даст такое число капель).

Однако в дальнейшем физические предположения, лежащие в основе анализа, были подвергнуты сомнению. В частности, вызывал сомнение механизм образования капель. Было указано, что закону Пуассона подчинено число элементарных актов рассеяния, в каждом из которых рождается около четырех капель.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Дискретные распределения

Предполагая, что в каждом таком акте рождается в точности четыре капли, можно пересчитать вероятность возникновения 110 или меньше капель (при этом числа 229 и 110 нужно округлить до ближайших чисел, кратных четырем):

$$P(r' \le 28) = \sum_{i=0}^{28} \frac{57^i e^{-57}}{i!} \approx 6{,}7 \cdot 10^{-6}.$$

Полученное число существенно больше и это показывает, насколько чувствителен результат к тому, сколь верны предположения.

.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Дискретные распределения

Более точная модель образования капель должна была бы учесть, что в элементарных актах рассеяния рождается неодинаковое число капель, и что это число должно быть также распределено по закону Пуассона.

Очевидно, что тогда число капель будет подчинено закону составного распределения Пуассона. Полагая $\lambda\mu = 229$ и $\mu = 4$, получаем в соответствии с (60):

$$P(r \leq 110) = \sum_{i=0}^{110} \sum_{N=0}^{\infty} \left[\frac{(N\mu)^i e^{-N\mu}}{i!} \cdot \frac{\lambda^N e^{-\lambda}}{N!} \right] \approx 4{,}7 \cdot 10^{-5},$$

что еще значительнее уменьшает значимость наблюдения.

.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Дискретные распределения

Геометрическое распределение.

Геометрическое распределение дает вероятность получить r безуспешных попыток, предшествующих первой успешной попытке, при условии, что вероятность успеха в одном испытании равна p.

Переменная r, положительное целое.

Параметр p, $0 \le p \le 1$.

Функция вероятностей

$$P(r) = p(1-p)^{r-1}. \qquad (61)$$

Ожидаемое значение $E(r) = \frac{1}{p}$.

.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Дискретные распределения

Дисперсия $D(r) = \frac{1-p}{p^2}$.

Асимметрия $\gamma_1 = \frac{2-p}{\sqrt{1-p}}$.

Эксцесс $\gamma_2 = \frac{p^2-6p+6}{1-p}$.

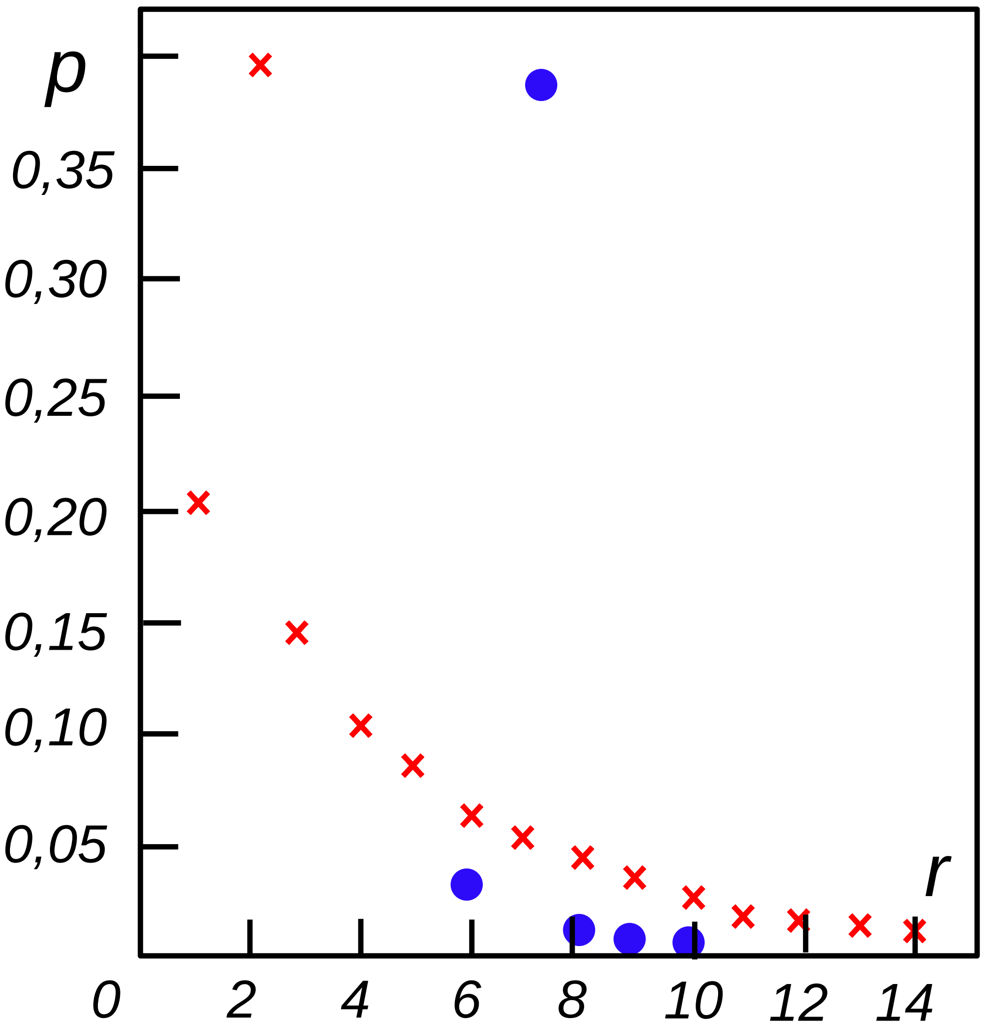
Производящая функция вероятностей

$$G(Z) = \frac{pZ}{1-(1-p)Z}$$

.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Дискретные распределения



Геометрические распределения:

× – p = 0,2

● – p = 0,4

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Дискретные распределения

Отрицательное биномиальное распределение.

Отрицательное биномиальное распределение дает вероятность затраты r попыток до тех пор, пока число успешных попыток не станет равным m при условии, что вероятность успеха в одной попытке равна p.

Переменная r, положительное целое, $r \geq m$.

Параметры m, положительное целое, p, $0 \leq p \leq 1$.

Функция вероятностей

$$P(r) = \binom{r-1}{m-1} p^m (1-p)^{r-m}. \qquad (62)$$

Ожидаемое значение $E(r) = \frac{m}{p}$.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Дискретные распределения

Дисперсия $$D(r) = \frac{m(1-p)}{p^2}.$$

Асимметрия $$\gamma_1 = \frac{2-p}{\sqrt{m(1-p)}}.$$

Эксцесс $$\gamma_2 = \frac{p^2-6p+6}{m(1-p)}.$$

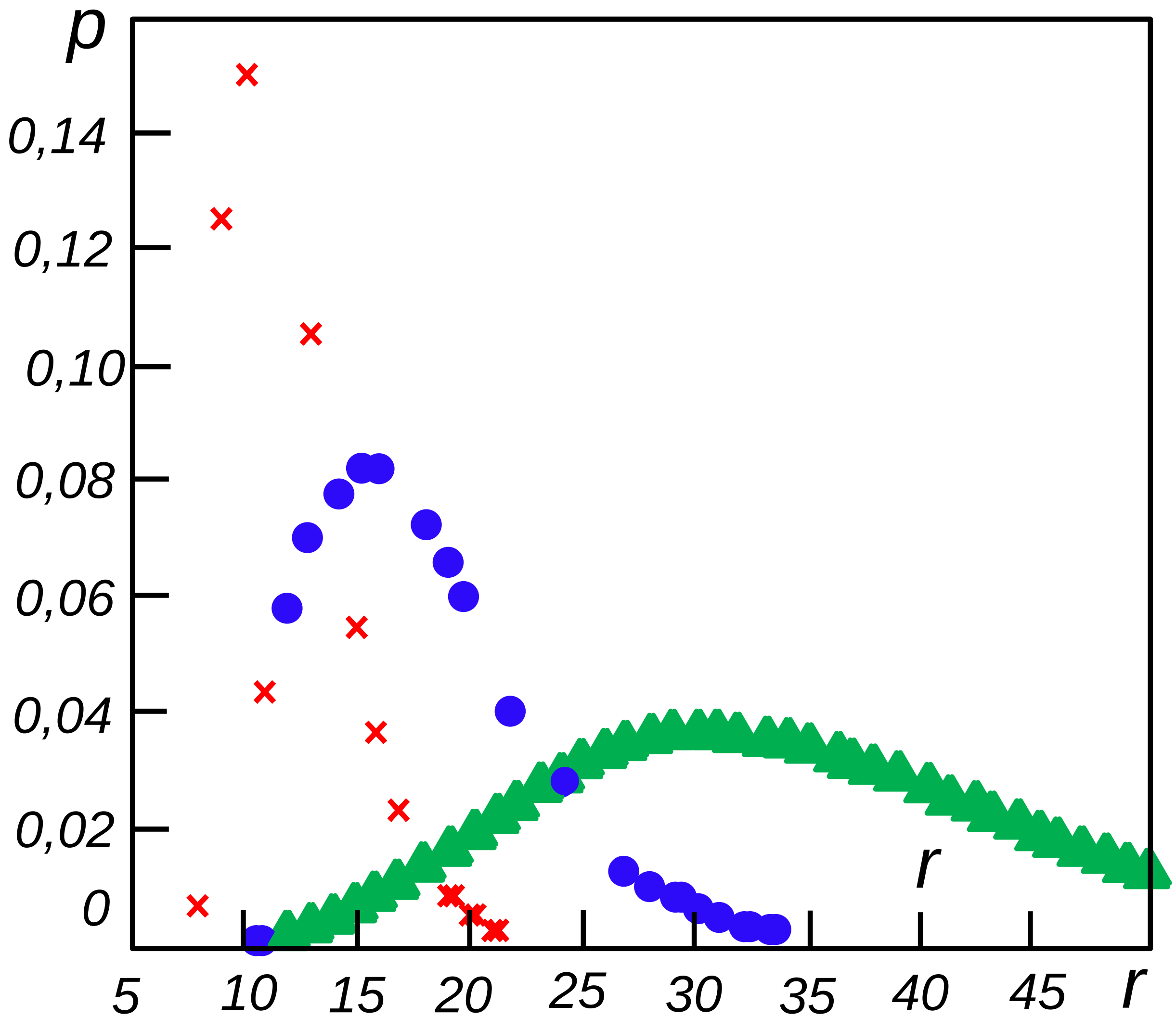
Производящая функция вероятностей

$$G(Z) = \left[\frac{pZ}{1-(1-p)Z}\right]^m$$

.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Дискретные распределения



Отрицательные биномиальные распределения, $m = 7$:

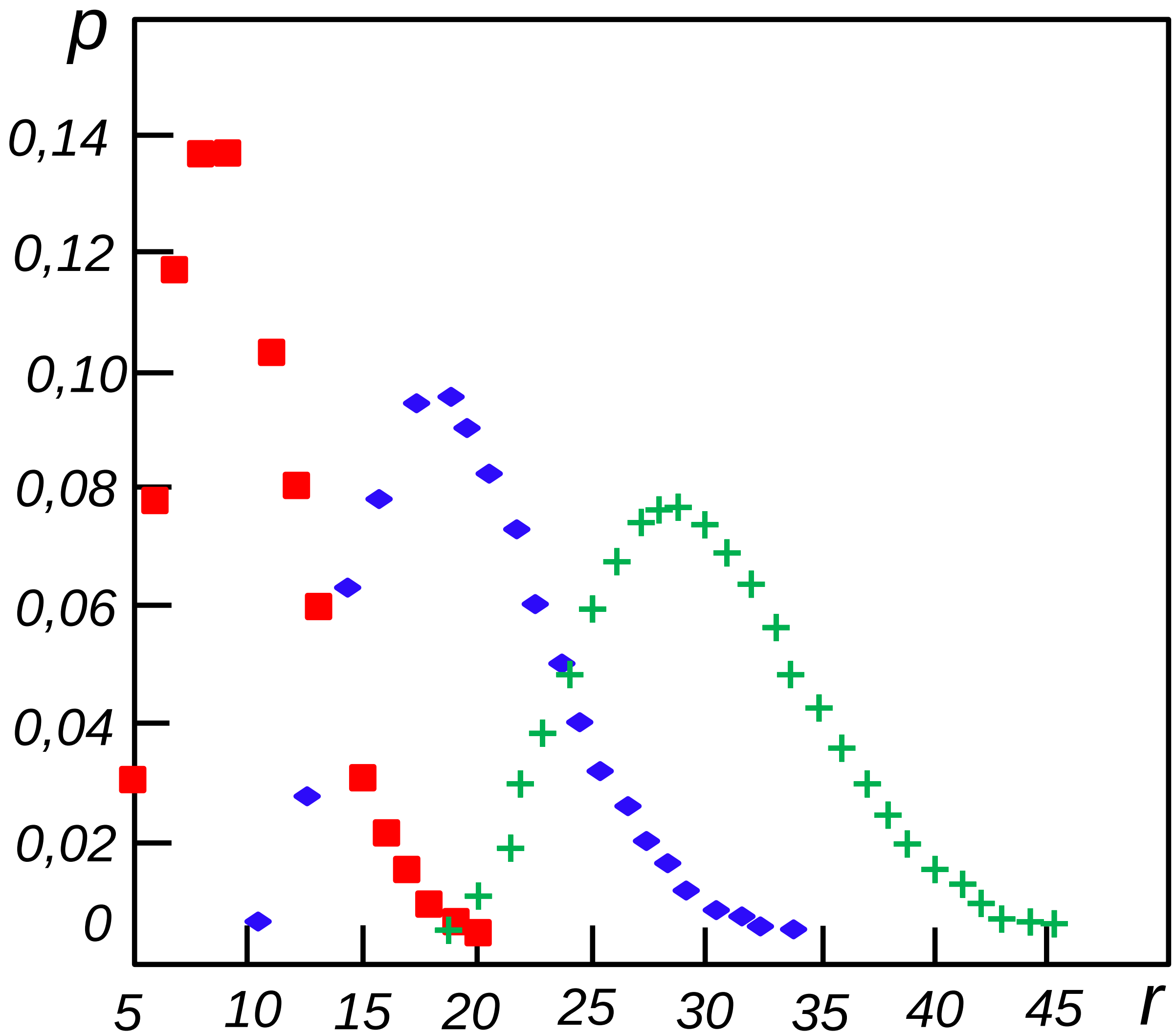
× – $p = 0,2$;

● – $p = 0,4$;

▲ – $p = 0,6$.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Дискретные распределения



Отрицательные биномиальные распределения, p = 0,5:

– m = 5;

– m = 10;

– m = 15.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Дискретные распределения

В некоторых случаях нужно знать распределение числа безуспешных попыток в некоторой последовательности испытаний, заканчивающейся в момент получения m-го успеха. Соответствующая функция вероятностей равна

$$P(s) = \binom{s+m-1}{s} p^m (1-p)^s \text{ с } E(s) = m\frac{1-p}{p}. \quad (63)$$

Дисперсия и моменты более высокого порядка такие же. Распределение (63) можно также рассматривать как распределение числа успешных испытаний в единицу времени при условии, что скорость, с которой наблюдаются успешные испытания, является случайной переменной, имеющей гамма-распределение (а не константой, как для распределения Пуассона).

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Непрерывные распределения

Нормальное одномерное распределение.

Переменная X, реальное

Параметры μ, реальное; σ, положительное реальное число.

Функции плотности вероятности

$$f(X) = N(\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(X-\mu)^2}{\sigma^2}\right]. \qquad (64)$$

Функция распределения

$$F(X) = \Phi\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right), \text{где } \Phi(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{Z}\exp\left(-\frac{1}{2}X^2\right)dX. \qquad (65)$$

.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Непрерывные распределения

Ожидаемое значение $E(X) = \mu$.

Дисперсия $D(X) = \sigma^2$.

Асимметрия $\gamma_1 = 0$.

Эксцесс $\gamma_2 = 0$.

Характеристическая функция

$$\zeta(t) = \exp\left(it\mu - \frac{1}{2}t^2\sigma^2\right).$$

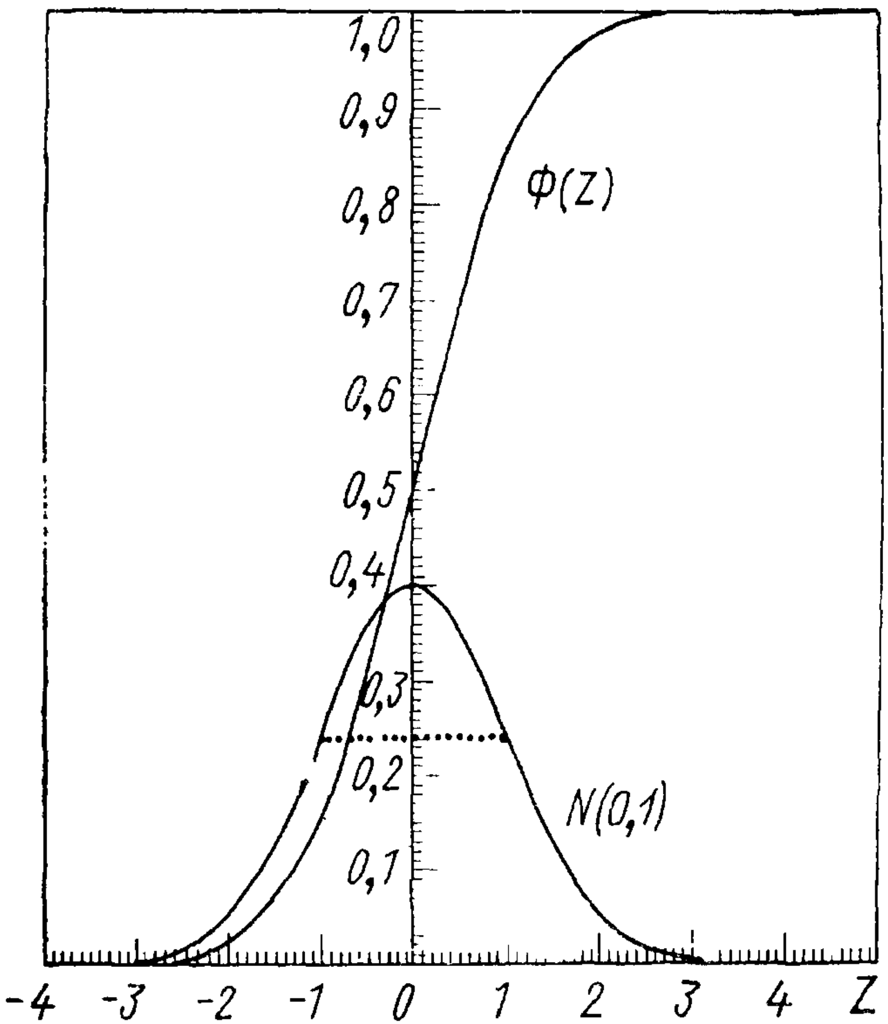
Моменты

$$\mu_{2r} = \frac{(2r)!}{2^r r!}\sigma^{2r}; \;\; \mu_{2r+1} = 0, \qquad r \geq 1.$$

.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Непрерывные распределения

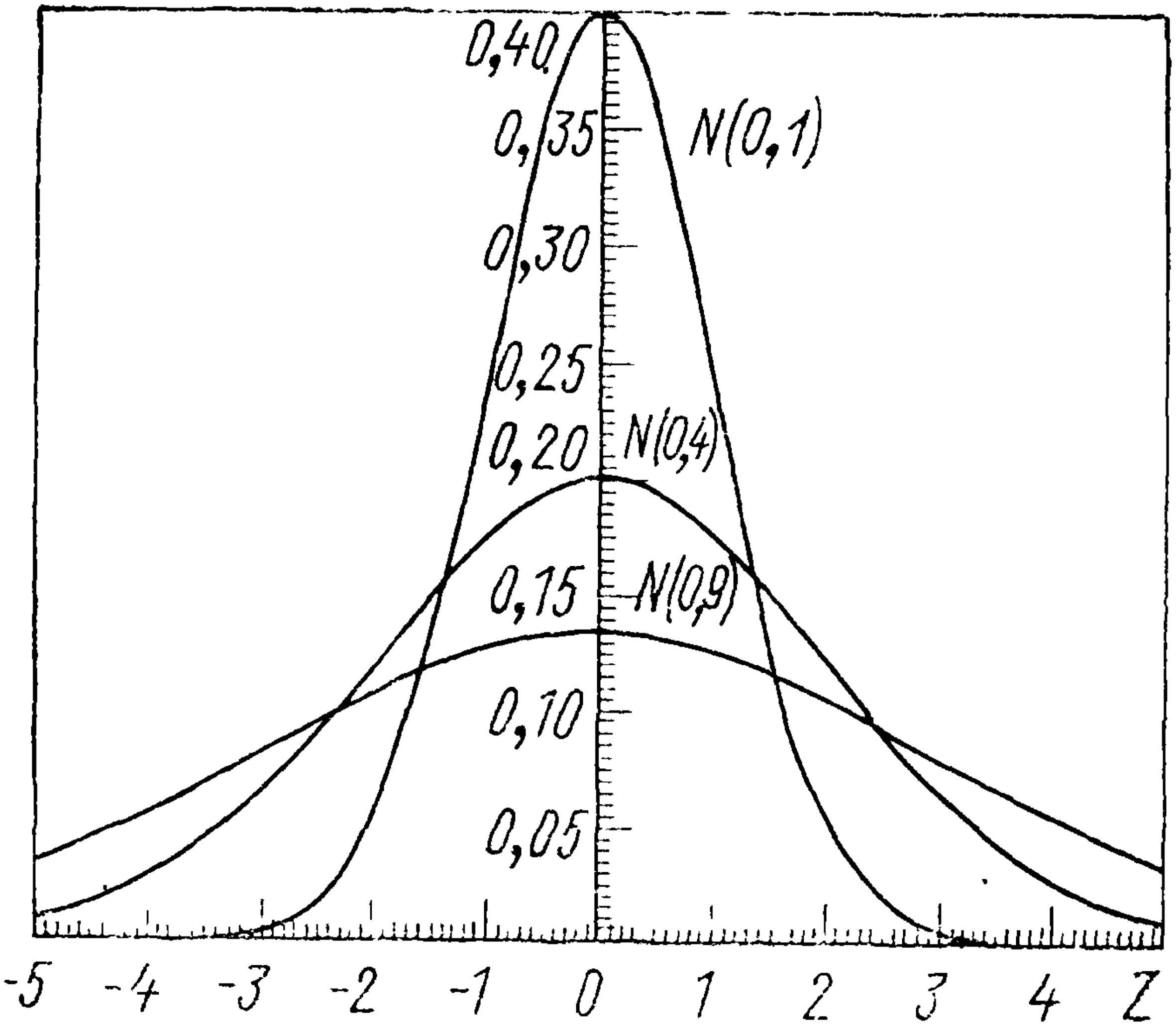


Стандартное нормальное распределение *N*(0,1) и его функция распределения Φ(*Z*).

Линия из точек указывает стандартное отклонение σ (длина линии 2σ)

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Непрерывные распределения



Нормальные распределения *N*(0,1), *N*(0,4) и *N*(0,9)

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Непрерывные распределения

Ф. п. в. нормального или гауссовского распределения, сокращенно обозначаемого $N(\mu, \sigma^2)$, является наиболее важным теоретическим распределением в статистике. Его функция распределения называется *интегралом вероятности нормального распределения* или *функцией ошибок*. Впрочем, в литературе можно встретить много других определений функции ошибок.

Отметим также, что стандартное отклонение σ не равно полуширине ф. п. в. на половине высоты. Полуширина на половине высоты равна 1,176 σ.

.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Непрерывные распределения

Приведем вероятностные содержания различных интервалов:

$$P\left(-1{,}64 \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq 1{,}64\right) = 0{,}90;$$

$$P\left(-1{,}96 \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq 1{,}96\right) = 0{,}95;$$

$$P\left(-2{,}58 \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq 2{,}58\right) = 0{,}99;$$

$$P\left(-3{,}29 \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq 3{,}29\right) = 0{,}999.$$

.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Непрерывные распределения

Функция *N*(0,1) называется *стандартной* нормальной плотностью, а его функция распределения

$$\Phi(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{X} \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) dt$$

– *стандартной нормальной функцией распределения*.

Можно получить ряд важных результатов для случайных переменных X_i которые будут независимы и нормальны.

а. Любая линейная комбинация X_i также нормальна. Предположим, что средние и дисперсии переменных X_1 и X_2 соответственно равны μ_1, μ_2 и σ_1^2, σ_2^2.

.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Непрерывные распределения

Тогда aX_1 и bX_2 являются независимыми нормальными переменными с характеристическими функциями:

$$\zeta_{aX_1}(t) = \exp\left(ita\mu_1 - \frac{1}{2}t^2a^2\sigma_1^2 \right)$$

и

$$\zeta_{bX_2}(t) = \exp\left(itb\mu_2 - \frac{1}{2}t^2b^2\sigma_2^2 \right).$$

Характеристическая функция переменной $Z = aX_1 + bX_2$ равна

$$\zeta_Z(t) = \zeta_{aX_1}(t)\zeta_{bX_2}(t) = \exp\left[it(a\mu_1 + b\mu_2) - \frac{1}{2}t^2(a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2) \right].$$

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Непрерывные распределения

Таким образом, Z также подчиняется нормальному распределению со средним $a\mu_1 + b\mu_2$ и дисперсией $a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2$. Так же можно показать, что любая линейная комбинация $Z = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ имеет нормальное распределение.

б. *Среднее или выборочное среднее*

$$\overline{X} = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

и *выборочная дисперсия*

$$S^2 = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}\right)^2 \qquad (66)$$

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Непрерывные распределения

независимы, если и только если X_i имеют одинаковое нормальное распределение (с одинаковыми μ и σ). Это свойство присуще только нормальному распределению.

в. Если X_i – *стандартные* нормальные переменные, то плотность вероятности постоянна на сфере:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \mathrm{const},$$

поскольку плотность – функция только $\sum X^2$. Это свойство радиальной симметрии также присуще только нормальному распределению.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Непрерывные распределения

г. Если **X** – вектор, компоненты которого – независимые случайные переменные, не обязательно одинаково распределенные, и если не существует нетривиального преобразования $\mathbf{X} = C\mathbf{Y}$, где **Y** – вектор независимых случайных переменных, то каждое X_i распределено нормально, преобразование ортогонально и каждое Y_i имеет нормальное распределение.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Непрерывные распределения

Нормальное многомерное распределение.

Переменная $\mathbf{X}$, k-мерный вектор.

Параметры $\boldsymbol{\mu}$, k-мерный реальный вектор; $\underset{\sim}{D}$, $k \times k$ матрица, положительная полуопределенная.

Функции плотности вероятности

$$f(\mathbf{X}) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2}|\underset{\sim}{D}|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})^T \underset{\sim}{D}^{-1}(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})\right]. \qquad (67)$$

Ожидаемые значения $E(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\mu}$.

Моменты второго порядка

$D(\mathbf{X})=\underset{\sim}{D}$;

$D(X_i)=\underset{\sim}{D}_{ii}$; $D(X_i, X_j)=(D)_{ij}$ – ij-й элемент D.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Непрерывные распределения

Многомерное нормальное распределение интересно по многим причинам:

а) оно является функцией только средних дисперсий и корреляций двух переменных;

б) ф. п. в. в многомерном пространстве имеет «колоколообразную» форму;

в) уровни постоянной плотности вероятности соответствуют условию:

$(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^T \underset{\sim}{D}^{-1} (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) = \mathrm{const}$;

г) любое сечение этого распределения, например, плоскостью $X_i = \mathrm{const}$ опять-таки является нормальным распределением вида (67) в (k – 1)-мерном пространстве.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Непрерывные распределения

д) любая проекция на пространство меньшего числа измерений дает маргинальное распределение, которое также нормально и имеет вид (67) с матрицей вторых моментов, полученной путем зачеркивания соответствующих строк и столбцов $\underset{\sim}{D}$. В частности, маргинальное распределение X_i имеет вид $N(\mu_i \sigma_i^2)$;

е) совокупность переменных, каждая из которых является линейной функцией переменных, распределенных нормально, также распределена по многомерному нормальному закону;

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Непрерывные распределения

ж) средний вектор $\overline{\mathbf{X}}$ и второй момент выборки s_{ij} совокупности n независимых наблюдений определяются в виде:

$$\overline{X_i} = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} X_{il} \qquad (68)$$

и

$$s_{ij} = \frac{1}{n-1}\sum_{l=1}^{n}(X_{il} - \overline{X}_i)(X_{jl} - \overline{X}_j),$$

где X_{il} – i-я компонента 1-го наблюденного вектора. $\mathbf{X}$ и матрица (s_{ij}) распределены независимо, если и только если распределение генеральной совокупности $\mathbf{X}_k$ многомерное нормальное.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Непрерывные распределения

χ^2-распределение.

Переменная X, положительное реальное число.

Параметр n, положительное целое (степень свободы).

Функции плотности вероятностей

$$f(X) = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{X}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{X}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}. \qquad (69)$$

Ожидаемые значения $E(X) = n$.

Дисперсия $D(X) = 2n$.

Асимметрия $\gamma_1 = 2\sqrt{\frac{2}{n}}$.

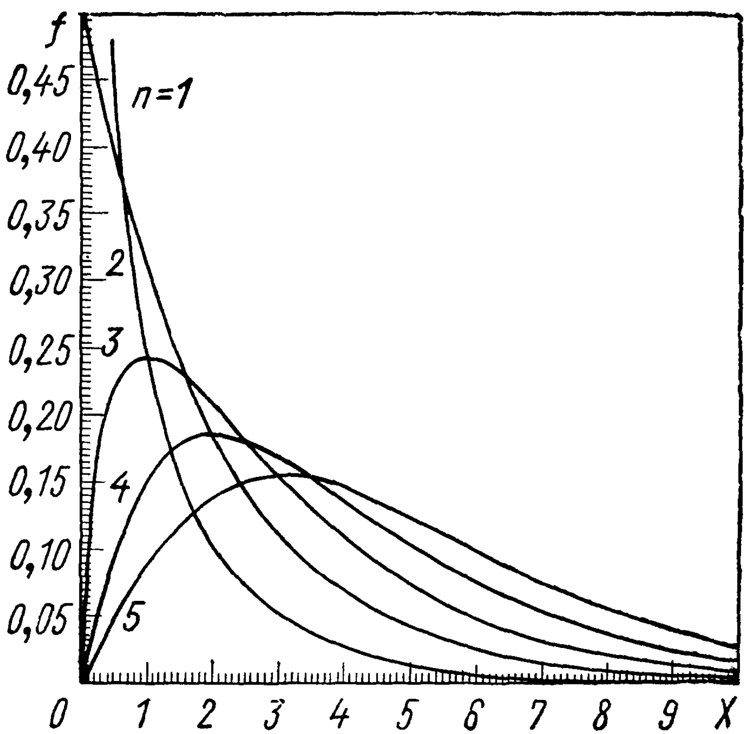
РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Непрерывные распределения

Эксцесс $\gamma_2 = 0$.

Характеристическая функция

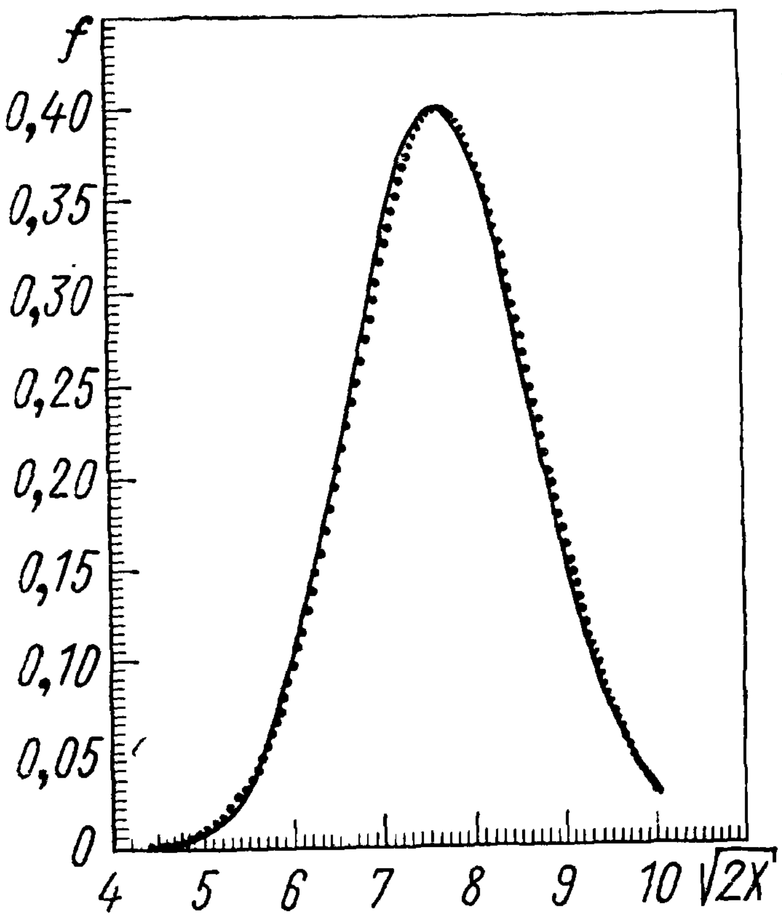
$$\zeta(t) = (1 - 2\mathrm{i}t)^{-\frac{n}{2}}. \qquad (70)$$



χ^2-распределение при n=1, 2, 3, 4, 5

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Непрерывные распределения



В асимптотическом пределе $\chi^2(n)$-распределение стремится к нормальному, причем эти распределения с хорошей точностью можно считать нормальными при $n > 30$.

χ^2-распределение (сплошная линия) величины $\sqrt{2X}\widetilde{\chi_X^2}(30)$ как функция $\sqrt{2X}$. Точки: $N(\sqrt{2 \cdot 30 - 1}, 1)$.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Непрерывные распределения

t-распределение Стьюдента.

Переменная t, положительное реальное число.

Параметр n, положительное целое.

Функции плотности вероятностей

$$f(X) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}. \qquad (71)$$

Ожидаемое значение $E(t) = 0$.

Дисперсия $D(t) = \frac{n}{n-2}$, $n > 2$.

Асимметрия $\gamma_1 = 0$.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Непрерывные распределения

Эксцесс $\gamma_2 = \frac{6}{n-4}, \;\; n > 4.$

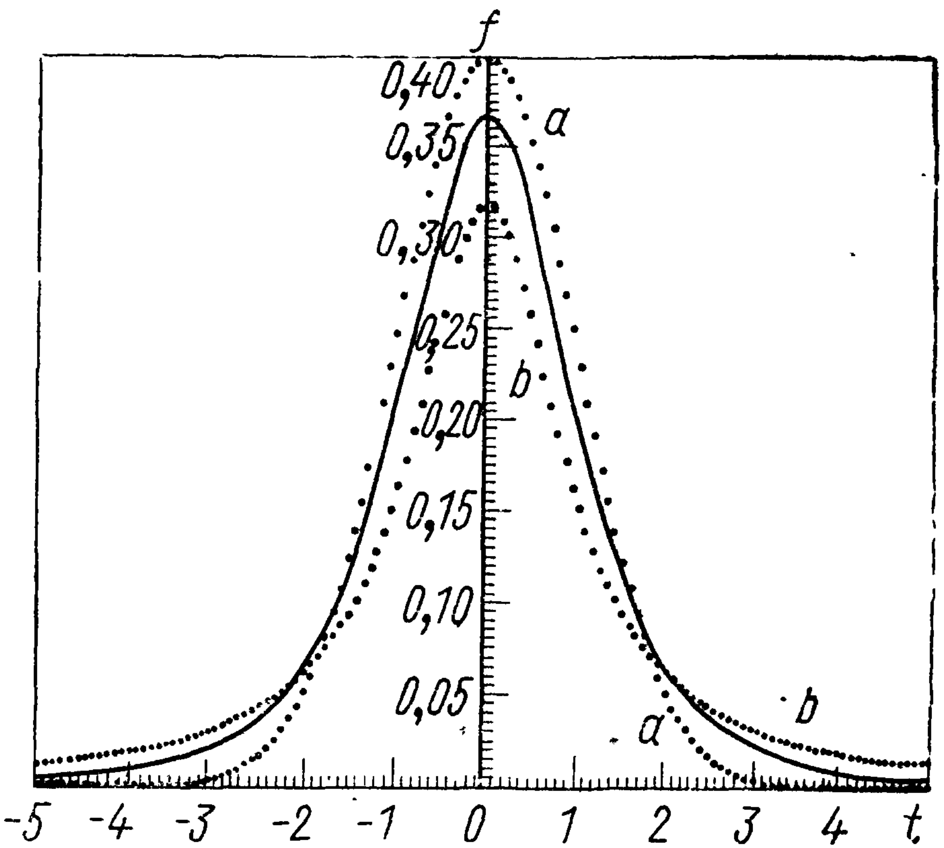
Моменты

$$\mu_{2r} = \frac{n^r \Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2-r}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}; \;\; \mu_{2r+1} = 0, \qquad 2r < n.$$

Моменты более высокого порядка, чем n, не существуют.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Непрерывные распределения



Распределения Стьюдента для $n = 3$ (сплошная линия):

a – стандартное нормальное распределение $N(0, 1)$ или распределение Стьюдента для $N = \infty$;

b – распределение Коши или распределение Стьюдента для $N = 1$

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Непрерывные распределения

Рассматривая нормальное одномерное распределение, мы видели, что если измерения $X_1, X_2, \dots, X_n$ нормальны каждое с распределением $N(\mu, \sigma^2)$, переменная $\sqrt{n}(\overline{X} - \mu)$ также нормальна с распределением $N(0, \sigma^2)$. Кроме того,

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \qquad (72)$$

распределено независимо от $\overline{X}$. Можно показать, что $(n-1)\frac{s^2}{\sigma^2}$ распределено как χ^2-переменная с $(n-1)$ степенями свободы.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Непрерывные распределения

Довольно часто возникает потребность проверить, совместимо ли наблюдаемое среднее $\overline{X}$ с теоретическим значением μ. Статистика, которую нужно использовать для такой проверки, имеет вид

$$t = \frac{\sqrt{n}(\overline{X} - \mu)}{s}. \qquad (73)$$

Эта величина подчиняется *t*-распределению Стьюдента с $(n - 1)$ степенями свободы.

В общем случае переменная Y называется ***оценкой величины σ^2 нормального закона*** с k степенями свободы, если $\frac{kY}{\sigma^2}$ распределено как χ^2-переменная с k степенями свободы.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Непрерывные распределения

Если X имеет распределение $N(0, \sigma^2)$ и независимо от Y, то отношение

$$t_k = \frac{X}{Y}$$

имеет t-распределение Стьюдента с k степенями свободы.

Распределение Стьюдента симметрично относительно

$t = 0$. При $n = 1$ оно переходит в распределение Коши , а при $n \to \infty$ оно приближается к стандартному нормальному распределению $N(0, 1)$. С помощью ф.п.в. можно сконструировать доверительные границы для μ или критерии проверки гипотезы, что $\mu = \mu_0$

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Непрерывные распределения

Равномерное распределение.

Переменная X, реальное число.

Параметры a, b, a<b.

Функции плотности вероятностей

$$f(X) = \frac{1}{b-a}. \qquad (74)$$

Ожидаемое значение $E(X) = \frac{a+b}{2}$.

Дисперсия $D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

Асимметрия $\gamma_1 = 0$.

Эксцесс $\gamma_2 = -1{,}2$.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Непрерывные распределения

Характеристическая функция

$$\zeta(t) = \frac{\sin h\left[\frac{1}{2}\mathrm{i}t(b-a)\right]}{\mathrm{i}t(b-a)} + \frac{1}{2}\mathrm{i}t(b+a).$$

Погрешности округления при арифметических вычислениях распределены равномерно.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Непрерывные распределения

Треугольное распределение.

Переменная X, реальное число.

Параметры $\Gamma > 0$, μ , реальные числа.

Функции плотности вероятностей

$$f(X) = -\frac{|X-\mu|}{\Gamma^2} + \frac{1}{\Gamma}, \qquad \mu - \Gamma < X < \mu + \Gamma; \qquad (75)$$

$$f(X) = 0 \text{ при всех других } X.$$

Ожидаемое значение $E(X) = \mu$.

Дисперсия $D(X) = \frac{\Gamma^2}{6}$.

Асимметрия $\gamma_1 = 0$.

Эксцесс $\gamma_2 = -0{,}6$.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Непрерывные распределения

Примеры: 1. Сумма двух чисел, каждое из которых выбрано независимо в соответствии с равномерным распределением, имеет треугольное распределение со средним и дисперсией, равными удвоенным среднему и дисперсии равномерного распределения.

2. Импульсное распределение вторичных частиц синхротронного пучка зачастую очень близко к треугольному с центральным моментом μ и полной шириной Γ на полувысоте. Высота распределения равна $1/\Gamma$, и ее основание простирается от $\mu - \Gamma$ до $\mu + \Gamma$.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Непрерывные распределения

Бета-распределение.

Переменная *X*, реальное число.

Параметры *n*, *m*, положительные целые.

Функции плотности вероятностей

$$f(X) = -\frac{\Gamma(n+m)}{\Gamma(n)\Gamma(m)} X^{m-1}(1-X)^{n-1}, \qquad 0 \le X \le 1; \qquad (76)$$

$f(X) = 0$ при всех других X.

Ожидаемое значение $E(X) = \frac{m}{m+n}$.

Дисперсия $D(X) = \frac{mn}{(m+n)^2(m+n+1)}$.

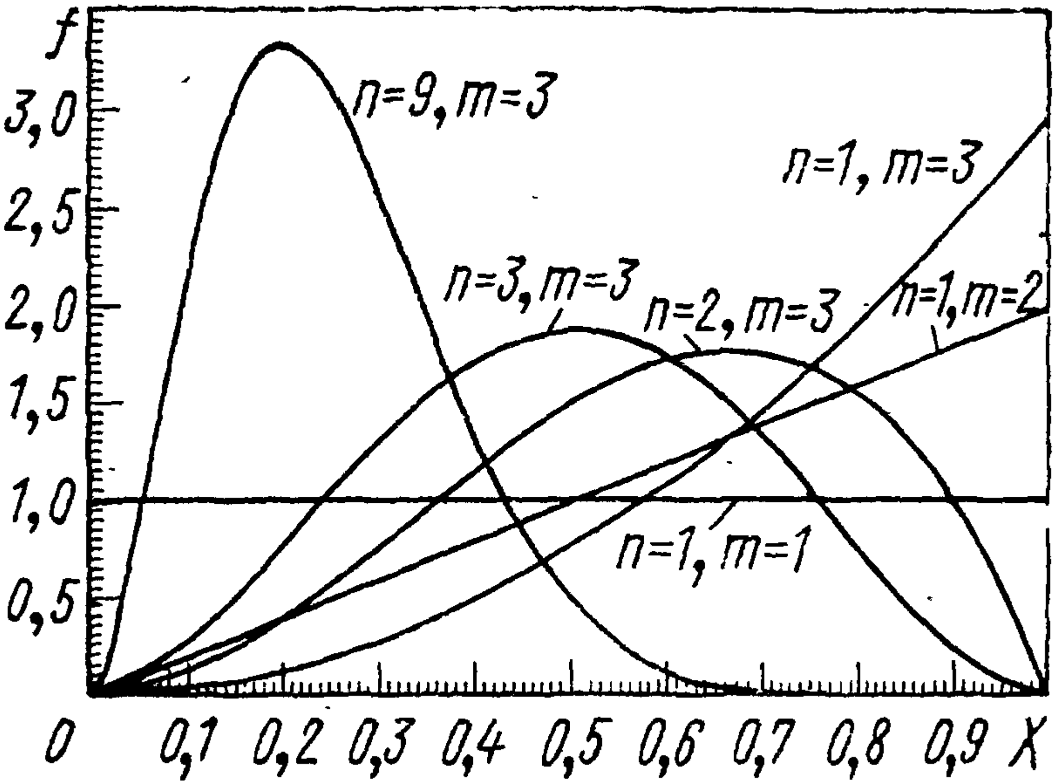
Асимметрия $\gamma_1 = \frac{2(n-m)\sqrt{m+n+1}}{(m+n+2)\sqrt{mn}}$.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Непрерывные распределения

Эксцесс

$$\gamma_2 = \frac{3(m+n+1)\left[2(m+n)^2+mn(m+n-6)\right]}{mn(m+n+2)(m+n+3)} - 3.$$



Бета-распределение

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Непрерывные распределения

Бета-распределение является основным распределением в статистике для переменных, ограниченных с обеих сторон, например, $0 \leq X \leq 1$. Оно используется как распределение доли совокупности, расположенной между наименьшим и наибольшим значениями в выборке. Частные случаи бета-распределений: равномерное, треугольное и параболическое.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Непрерывные распределения

Экспоненциальное распределение.

Переменная X, положительное реальное число.

Параметр λ, положительное реальное число.

Функции плотности вероятностей

$$f(X) = \lambda \exp(-\lambda X). \qquad (77)$$

Ожидаемое значение $E(X) = \frac{1}{\lambda}$.

Дисперсия $D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

Асимметрия $\gamma_1 = 2$.

Эксцесс $\gamma_2 = 6$.

Характеристическая функция $\zeta(t) = \left(1 - \frac{\mathrm{i}t}{\lambda}\right)^{-1}$.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Непрерывные распределения

Предположим, что события распределены во времени случайно и среднее число событий в единицу времени равно X. Согласно распределению Пуассона, вероятность наблюдения N событий в течение времени t:

$$P_N(t) = \frac{1}{N!}(\lambda t)^N \exp(-\lambda t).$$

Тогда вероятность того, что за время t не будет ни одного события, описывается экспоненциальным распределением $\exp(-\lambda t)$.

Рассмотрим интервал времени Z между двумя следующими друг за другом событиями. В течение этого интервала времени не наблюдается ни одного события.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Непрерывные распределения

Таким образом, для фиксированного X

$$P(Z > X) = \exp(-\lambda t)$$

с функцией распределения экспоненциального закона

$$F(X) = P(Z \leq X) = 1 - \exp(-\lambda t)\,.$$

Экспоненциальное распределение «не имеет памяти»: если до момента времени y не произойдет ни одного события, то вероятность того, что в течение последующего интервала времени x также не произойдет ни одного события, не зависит от y. Для фиксированного y

$$P(X > x + y|X > y = \frac{\exp[-\lambda(x+y)]}{\exp(-\lambda y)} = \exp(-\lambda x) = P(\lambda > x).$$

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Непрерывные распределения

В соответствии с экспоненциальным законом распределено время между моментами попадания частиц в счетчик.

С экспоненциальным распределением тесно связаны *гиперэкспоненциальное* и *эрланжиановское* распределения. Гиперэкспоненциальное распределение описывает распределение времени между событиями в процессе, в котором с вероятностью p_1 события порождаются одним экспоненциальным законом со скоростью λ_1 и с вероятностью $(1 - p_1)$ другим экспоненциальным законом со скоростью λ_2.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Непрерывные распределения

Тогда функция плотности вероятности равна:

$$f(X) = p_1\lambda_1 \exp(-\lambda_1 X) + (1 - p_1)\lambda_2 \exp(-\lambda_1 X).$$

Таким образом, гиперэкспоненциальное распределение применимо там, где имеется смесь процессов, описываемых экспоненциальным распределением,

Эрланжиановское k-распределение описывает распределение времени между k-ми событиями экспоненциального процесса; оно является распределением суммы k случайных переменных, распределенных экспоненциально с частотой $k\mu$.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Непрерывные распределения

Функция плотности вероятности равна

$$f(X) = \frac{k\mu}{(k-1)!}(k\mu X)^{k-1}\exp(-k\mu X).$$

Гиперэкспоненциальные процессы соответствуют экспоненциальным процессам, происходящим параллельно, тогда как эрланжиановские распределения — последовательным экспоненциальным процессам.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Непрерывные распределения

Гамма-распределение.

Переменная X, положительное реальное число.

Параметры a, b, положительные реальные числа.

Функция плотности вероятностей

$$f(X) = \frac{a(aX)^{b-1}\exp(-aX)}{\Gamma(b)}. \qquad (78)$$

Ожидаемое значение $E(X) = \frac{b}{a}$.

Дисперсия $D(X) = \frac{b}{a^2}$.

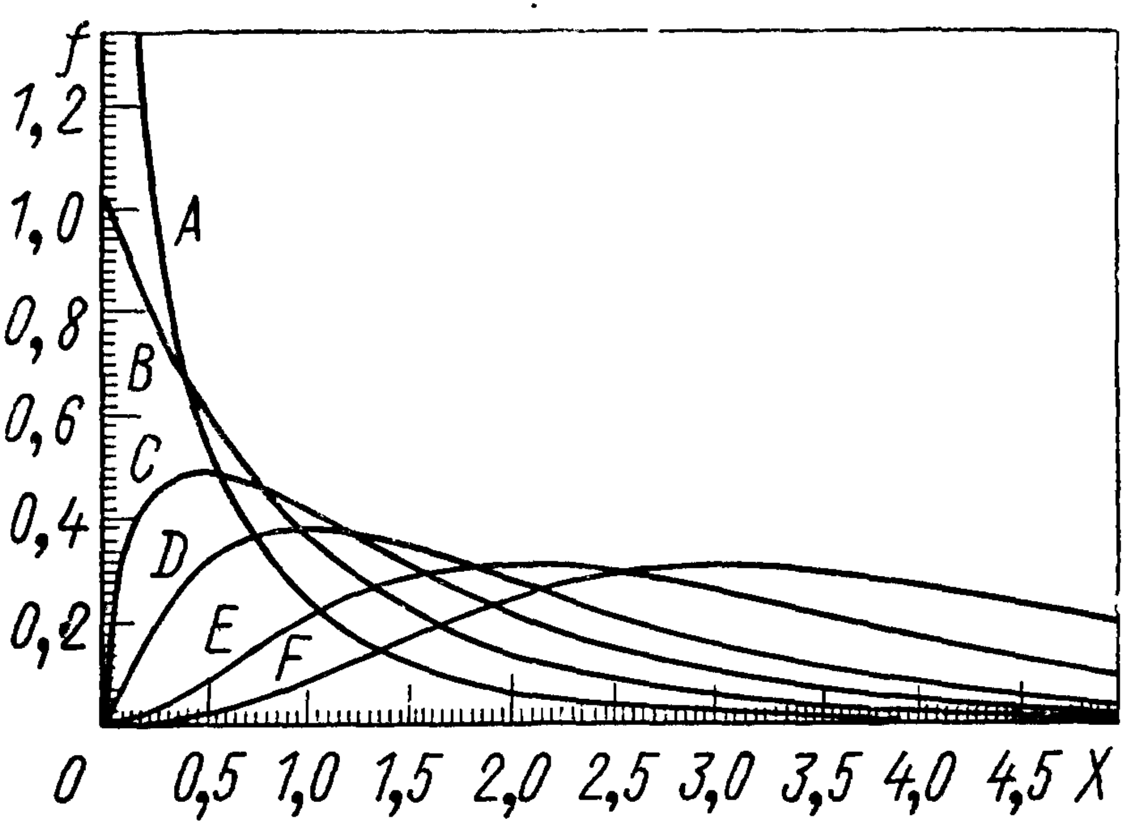
Асимметрия $\gamma_1 = \frac{2}{\sqrt{b}}$.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Непрерывные распределения

Эксцесс $\gamma_2 = \frac{6}{b}.$

Характеристическая функция $\zeta(t) = \left(1 - \frac{\mathrm{i}t}{a}\right)^{-b}.$



Гамма-распределение: a=1 и b=0,5; 1; 1,5; 2; 3; 4 для кривых A – F соответственно

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Непрерывные распределения

Гамма-распределение является основным статистическим средством при описании переменных, ограниченных с одной стороны, например, $0 \leq X < \infty$. С помощью рис. 4.9 можно получить представление о разнообразии форм распределения, соответствующем различным значениям параметров. Заметим, что a является просто масштабным параметром.

Гамма-распределение применимо ко времени между повторными калибровками прибора, который нуждается в перерградуировке после k употреблений, и ко времени отказа в работе для систем с запасными компонентами.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Непрерывные распределения

Распределение Коши или распределение Брейта-Вигнера.

Переменная X, реальное число.

Параметры – нет, за исключением, может быть, параметров положения и масштаба.

Функция плотности вероятностей

$$f(X) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+X^2}. \qquad (79)$$

Ожидаемое значение $E(X)$ – не определено.

Дисперсия, асимметрия, эксцесс – расходящиеся.

Характеристическая функция $\zeta(t) = \exp(-|t|)$.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Непрерывные распределения

Распределение Коши — пример патологического распределения в статистике, поскольку, как мы уже отмечали, его ожидание не определено, а все другие моменты расходящиеся. В физике оно соответствует важному случаю распределения Брейта-Вигнера, которое записывается в виде

$$f(X) = \frac{\Gamma}{\pi[\Gamma^2 + (X - X_0)^2]}. \qquad (80)$$

Параметры X_0 и Γ являются параметрами расположения и масштаба или модой и полушириной на полувысоте соответственно.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Непрерывные распределения

Логарифмически-нормальное распределение.

Переменная X, положительное реальное число.

Параметры μ, реальное число, σ, положительное реальное число.

Функция плотности вероятностей

$$f(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma X}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln X - \mu)^2\right]. \qquad (81)$$

Ожидаемое значение $E(X) = \exp\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right).$

Дисперсия $D(X) = \exp(2\mu + \sigma^2)\,[\exp(\sigma^2) - 1].$

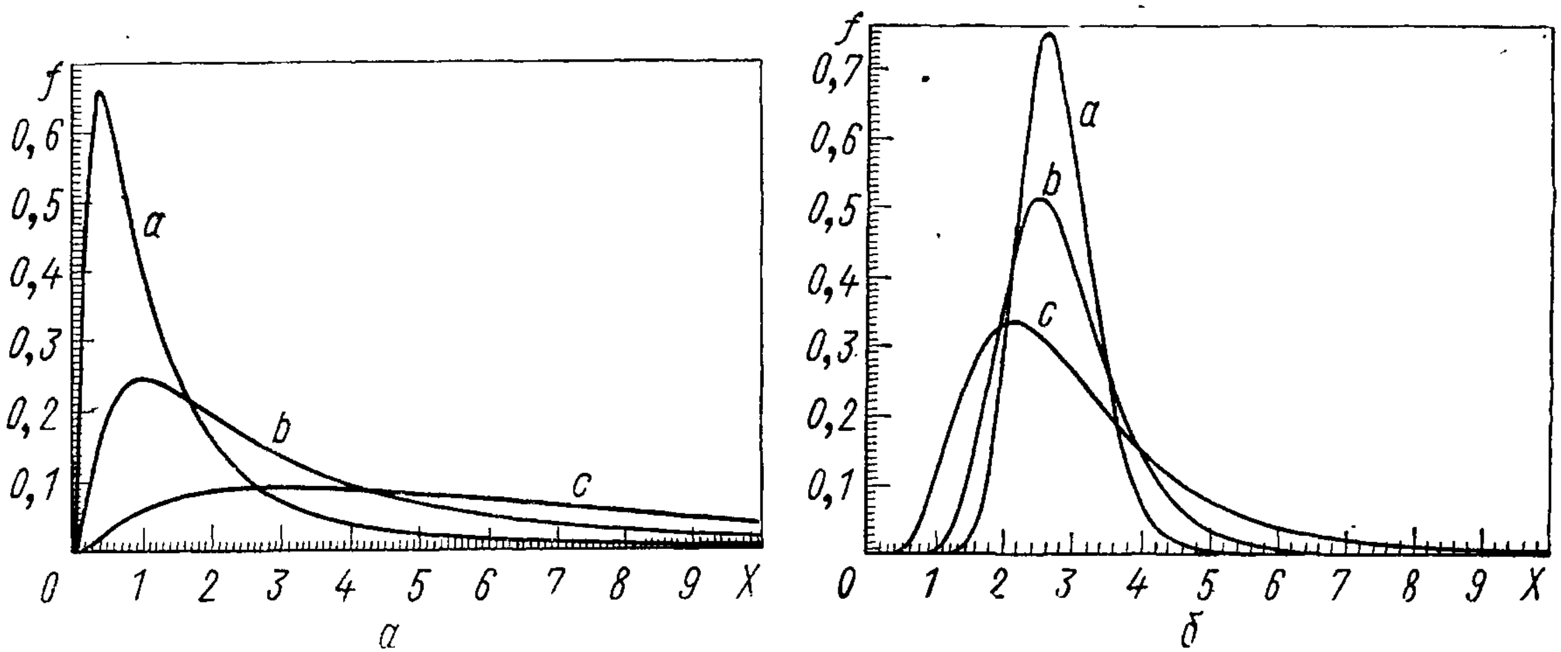
Асимметрия $\gamma_1 = \sqrt{\exp(\sigma^2) - 1}[\exp(\sigma^2) + 2].$

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Непрерывные распределения

Эксцесс

$$\gamma_2 = [\exp(\sigma^2) - 1][\exp(3\sigma^2) + 3\exp(2\sigma^2) + 6\exp(\sigma^2) + 6].$$



Логарифмически-нормальное распределение: а – σ = 1, μ = 0, 1, 2 для кривых a, b, c; б – μ=1, σ = 0,2; 0,3; 0,5 для кривых a, b, c

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Непрерывные распределения

Логарифмически-нормальное распределение соответствует случайной переменной, логарифм которой распределен по нормальному закону. Оно служит моделью для описания ошибки некоторого процесса, включающего большое число малых мультипликативных ошибок (в соответствии с предельной центральной теоремой). Оно также применимо в тех случаях, когда наблюдаемая переменная является случайной долей предыдущего наблюдения.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Непрерывные распределения

Распределение экстремального значения.

Переменная X, реальное число.

Параметры μ, реальное число, σ, положительное реальное число.

Функция плотности вероятностей

$$f(X) = \frac{1}{\sigma}\exp\left[\pm\frac{\mu - X}{\sigma} - \exp\left(\pm\frac{\mu - X}{\sigma}\right)\right]. \qquad (82)$$

Ожидаемое значение $E(X) = \mu \pm 0{,}5776\sigma$.

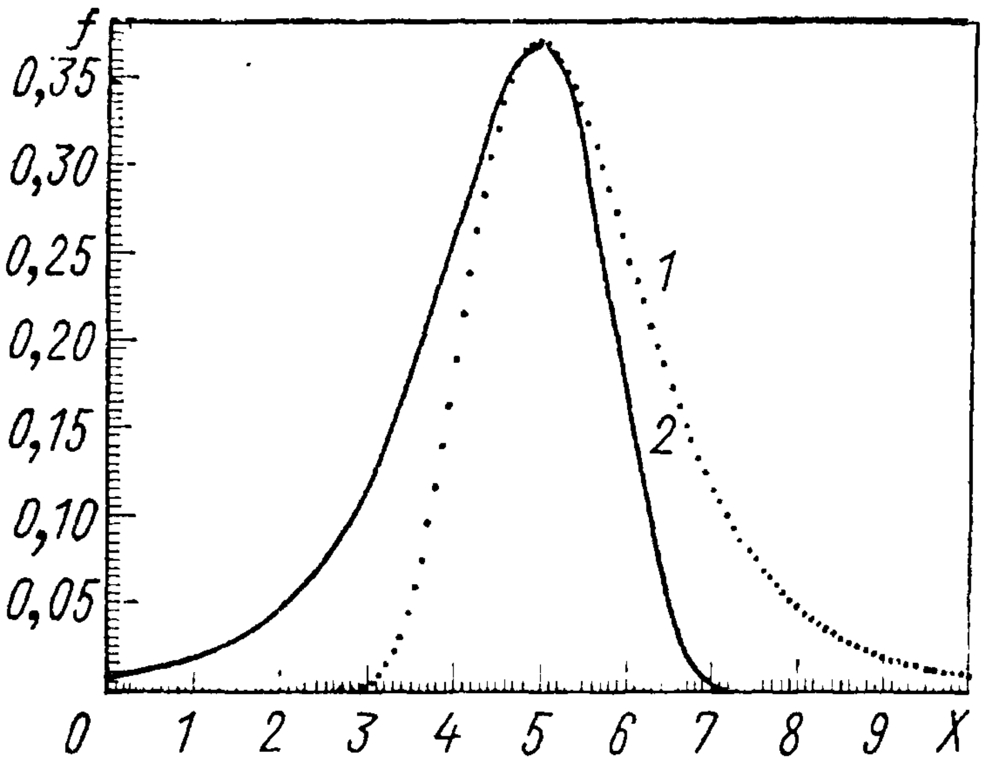
Дисперсия $D(X) = 1{,}645\sigma^2$.

Асимметрия $\gamma_1 = \pm 1{,}14$.

Эксцесс $\gamma_2 = 2{,}4$.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Непрерывные распределения



Распределение экстремального значения наибольшего (1) и наименьшего (2) элемента для

$\mu = 5$, $\sigma = 1$

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Непрерывные распределения

Распределение экстремального значения дает предельное распределение для наибольшего (со знаком +) или наименьшего (со знаком –) элемента выборки независимых наблюдений из распределения экспоненциального типа (нормального, гамма, экспоненциального и т.д.).

В качестве примера рассмотрим эксперимент, в результате которого фиксируется большое число n независимых гистограмм. Предположим, что необходимо описать отклонение каждой гистограммы от известной теории одним числом, например, среднеквадратичным отклонением в ячейках.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Непрерывные распределения

Обозначим это число χ^2. Для того чтобы уметь оценивать значимость наблюдения одного особенно большого значения χ^2, нужно рассмотреть распределение вероятностей экстремального значения из n χ^2 -распределений.

Предположим для простоты, что все гистограммы имеют одинаковое число ячеек и что число степеней свободы r всех n $\chi^2(r)$-распределений достаточно велико ($r > 30$), чтобы их можно было аппроксимировать нормальным законом:

$$X = \sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2r - 1}.$$

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Непрерывные распределения

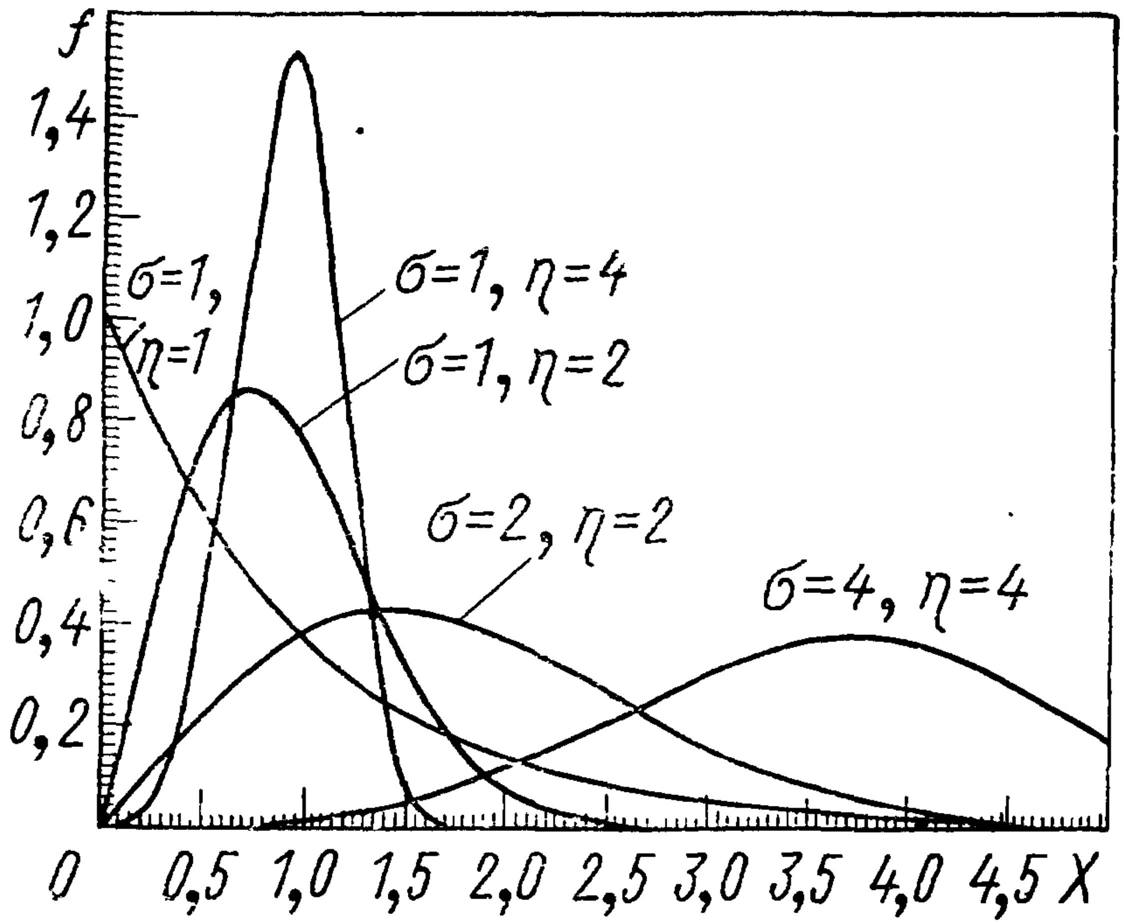
Случайная переменная X нормальна с нулевым средним, а наибольшее значение X описывается тогда распределением (82) с

$$\mu = \sqrt{2\ln n};\ \sigma = \mu^{-1}.$$

Достоинством этого критерия по сравнению с другими более сложными критериями является то, что он оперирует с одним числом и удобен при расчетах, выполняемых вручную.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Непрерывные распределения



Распределения Вейбула

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Непрерывные распределения

Распределение Вейбула описывает распределение ожидаемого времени отказа в работе большой разновидности сложных механизмов. Экспоненциальное распределение является частным случаем этого распределения, когда вероятность такого нарушения в момент времени *t* не зависит от *t*.

Соответствующий вид распределения Вейбула описывает также распределение минимума в выборке наблюдений из распределений переменных, ограниченных снизу.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Непрерывные распределения

Соотношения между распределениями в асимптотическом пределе.

Некоторые из обсуждавшихся ранее распределений в асимптотическом пределе сходятся при различных дополнительных условиях к другим типам распределений. Проиллюстрируем асимптотические свойства распределений следующим рисунком

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Непрерывные распределения