Физико-технический институт

ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Практическое занятие № 3

Теплопроводность в нестационарных режимах

Теория

24 мая 2019 г.

Напомним о критериях подобия, применяемых в том числе для расчета теплопроводности в нестационарных режимах.

Наиболее часто используемых критериев два:

- критерий Био $Bi = {}^{\alpha R}/_{\lambda_w}$, характеризующий отношение интенсивности внешнего теплообмена (α) к интенсивности внутреннего теплообмена (λ/R). С другой стороны, критерий Био характеризует отношение термического сопротивления теплопроводности (R/λ) к термическому сопротивлению теплоотдачи ($1/\alpha$).

От величины критерия Био зависит интенсивность процесса теплопроводности.

- критерий Фурье $Fo = {}^{a\tau}/_{R^2}$, характеризующий соотношение между скоростью изменения тепловых условий в окружающей среде и скоростью перестройки поля температуры внутри рассматриваемой системы (тела). Зависит от размеров тела и коэффициента его температуропроводности.

Теплообмен на границе твердого тела, который удобно описать граничными условиями третьего рода, наиболее часто встречается в практике инженерных расчетов.

Решение краевой задачи теории теплопроводности в безразмерном виде для регулярного режима (начиная с момента времени $Fo \geq 1/(3k)$) имеет вид:

$$\Theta(X, Fo) = A_1 \Lambda_1(\mu_1 X) \exp(-\mu_1^2 Fo), \qquad (3.1)$$

где комплекс A_1 и лямбда-функция Λ_1 рассчитывают по формулам

$$A_n = \frac{2Bi}{Bi^2 + (2-k)Bi + \mu_n^2}; \qquad (3.2)$$

$$\Lambda_1(\mu_n X) = \frac{X^{\frac{2-k}{2}} J_{\frac{k-2}{2}}(\mu_n X)}{J_{\frac{k-2}{2}}(\mu_n)}, \qquad (3.3)$$

μ_n – n-й корень характеристического уравнения (n = 1, 2, …, ∞); $J_m(u)$ – функция Бесселя 1 рода m-го порядка; $\Theta = \frac{T_f - T}{T_f - T_0}$ – безразмерная температура; $X = \frac{x_1}{R}$ – безразмерная координата; R – характерный или определяющий размер тела; $Fo = \frac{a\tau}{R^2}$ – безразмерное время – критерий Фурье; k – коэффициент формы тела.

Характеристическое уравнение для решения дифференциального уравнения теплопроводности при граничных условиях III рода имеет вид

$$Bi \cdot J_{\frac{k-2}{2}}(\mu_n) = \mu_n \cdot J_{\frac{k}{2}}(\mu_n). \qquad (3.4)$$

Видно, что безразмерная температура зависит от четырех параметров $\Theta = f(k, X, Fo, Bi)$. Для удобства инженерных расчетов данную зависимость представляют в виде графиков – номограмм. Наиболее часто используют шесть графиков зависимости $\Theta = f(Fo, Bi)$, которые построены для теплового центра ($X = 0$) и для поверхности ($X = 1$) трех тел простейшей формы и приведены в справочной литературе.

Расчет регулярного режима теплопроводности в телах простой формы по номограммам

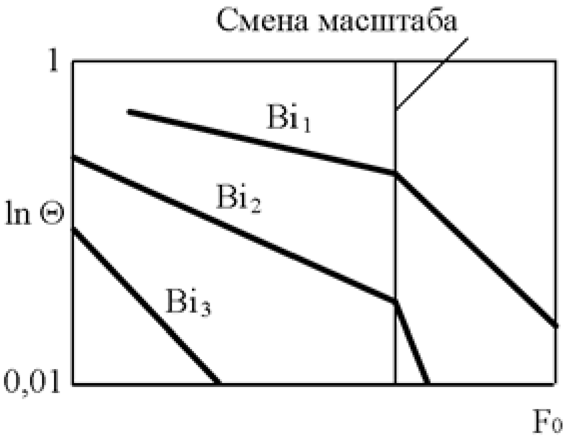

рис. 3.1

На рис. 3.1 показан общий вид номограммы для расчета нестационарной теплопроводности в телах простейшей формы при граничных условиях III рода.

При расчете нестационарной теплопроводности существуют две основные постановки задачи: прямая и обратная. Целью решения прямой задачи является определение температуры в тепловом центре (T_c) или на поверхности тела (T_w) при заданных условиях однозначности. В результате решения обратной задачи теплопроводности по известной температуре в тепловом центре (T_c) или на поверхности тела (T_w) и частично заданных условиях однозначности находят неизвестное условие однозначности – время процесса теплопроводности или коэффициент теплоотдачи.

В этом случае известны все условия однозначности, необходимые для расчета температурного поля:
– размеры расчетной области: геометрически размеры (толщина пластины, диаметр цилиндра или шара) и форма тела (пластина, цилиндр или шар), а также время нагрева или охлаждения ($\tau_к$);
– физические свойства вещества: коэффициент тепло-проводности (λ) и коэффициент температуропроводности (a);
– краевые условия: начальное условие и граничные условия третьего рода на внешней границе тела.

Необходимо найти температуру теплового центра тела (T_c), температуру поверхности тела (T_w) и среднюю по массе температуру тела (T_m).

В краткой форме записи прямую постановку задачи можно записать следующим образом.

Дано: δ или d;

$\tau_к$, a;

T_0, λ;

T_f, α.

Найти: температуру теплового центра тела $T_c = T(0,\tau_к)$;

температуру поверхности тела $T_w = T(R,\tau_к)$;

среднюю по массе температуру тела $T_m = \overline{T}\,(t_к)$.

Алгоритм решения прямой задачи заключается в следующем.

1. Перед началом расчета необходимо определить размер расчетной области R, который для бесконечного цилиндра и шара при неизменных по поверхности условиях теплообмена равен радиусу тела ($R = {}^{d_ц}/_2 = r_ц$ или $R = {}^{d_ш}/_2 = r_ш$). Для бесконечной пластины при ее *симметричном* нагреве или охлаждении $R = {}^{\delta}/_2$, а при *несимметричном* внешнем теплообмене (теплообмен на одной из сторон пластины отсутствует) $R = \delta$.

2. Далее рассчитывают критерии Био (*Bi*) и Фурье (*Fo*) и по номограммам для теплового центра и поверхности *заданного* тела определяют безразмерные температуры теплового центра Θ_c и поверхности Θ_w (см. рис. 3.2, линия 1):

$$\left.\begin{array}{l} Bi = \dfrac{\alpha R}{\lambda} \\ Fo_{\text{к}} = \dfrac{a\tau_{\text{к}}}{R^2} \end{array}\right\rangle \xrightarrow{\text{По номограммам}} \Theta_w \text{ и } \Theta_c. \quad (3.5)$$

Прямая постановка задачи расчета нестационарной теплопроводности

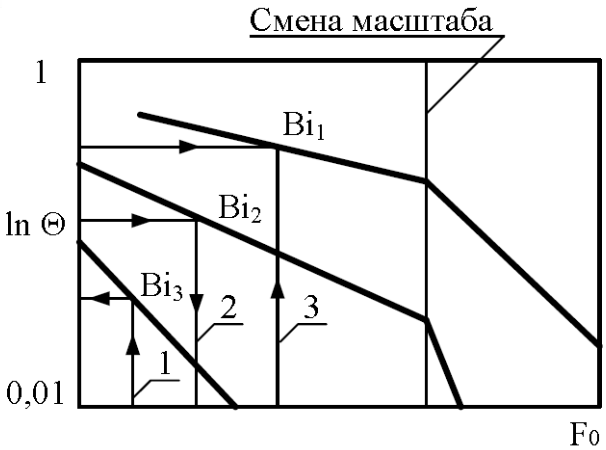

Рис. 3.2

Номограмма для расчета нестационарной теплопроводности при граничных условиях III рода:

1 – прямая постановка задачи $\Theta = f_1(Fo, Bi)$;

2 – обратная постановка задачи $Fo = f_2(\Theta, Bi)$;

3 – обратная постановка задачи $Bi = f_3(\Theta, Fo)$.

3. Затем находят температуры на поверхности и в центре тела по формуле

$$T = T_f - \Theta \cdot \left(T_f - T_0\right), \qquad (3.6)$$

где $T = T_w$, если $\Theta = \Theta_w$, и $T = T_c$, если $\Theta = \Theta_c$.

4. И в заключение рассчитывают среднюю по массе температуру тела в конце процесса теплопроводности. При допущении параболического распределения температуры по сечению тела формула для расчета среднемассовой температуры имеет вид

$$T_m = T_c + \frac{k}{2+k}\Delta T, \qquad (3.7)$$

где k – коэффициент формы тела; $\Delta T = T_w - T_c$ – перепад температур по сечению тела.

Целью решения обратной задачи теории теплопроводности является определение одного из параметров условий однозначности – времени процесса ($\tau_к$) или коэффициента теплоотдачи (α). Но при этом задана температура теплового центра (T_c) или температура поверхности тела (T_w). Остальные условия однозначности, кроме $\tau_к$ или α, – заданные величины.

А. Определение времени нагрева или охлаждения тела

В краткой форме записи обратную постановку задачи по расчету времени процесса теплопроводности записывают в следующем виде.

Дано:	δ или d;	Найти:	$\tau_к$;
	T_w либо T_c;		T_c либо T_w;
	λ, a;		$T_m = \overline{T}\,(\tau_к)$.
	T_0;		
	T_f, α.		

Алгоритм решения поставленной выше задачи заключается в следующем.

1. Перед началом расчета необходимо определить размер расчетной области R.
2. Далее рассчитывают критерий Био (Bi) и температурный критерий Θ_c или Θ_w в зависимости от того, задана температура T_c или T_w. Затем по номограммам определяют критерий Фурье (см. рис. 3.2, линия 2):

$$\left.\begin{aligned} Bi &= \frac{\alpha R}{\lambda} \\ \Theta &= \frac{T_f - T}{T_f - T_0} \end{aligned}\right\rangle \xrightarrow{\text{По номограммам}} Fo_{\text{к}}. \quad (3.8)$$

3. Зная критерий Фурье $Fo_к = \frac{a\tau_к}{R^2}$, рассчитывают время процесса теплопроводности по формуле

$$\tau_к = Fo_к \frac{R^2}{a}. \quad (3.9)$$

4. Не заданную по условию задачи температуру T_c либо T_w и среднемассовую температуру тела T_m находят по алгоритму решения прямой задачи.

Б. Определение коэффициента теплоотдачи

В краткой форме записи обратную постановку задачи по расчету времени процесса теплопроводности записывают в следующем виде.

Дано:
δ или d;
$\tau_к$;
λ, a;
T_0;
T_f;
T_w либо T_c.

Найти:
α;
T_c либо T_w;
$T_m = \overline{T}\,(\tau_к)$.

Алгоритм решения поставленной выше задачи заключается в следующем.

1. Перед началом расчета необходимо определить размер расчетной области R.
2. Далее рассчитывают критерий Фурье (Fo) и температурный критерий Θ_c или Θ_w в зависимости от того, задана температура T_c или T_w. Затем по номограммам определяют критерий Био (рис. 3.2, линия 3):

$$\left.\begin{aligned} Fo_{\text{к}} &= \frac{a\tau_{\text{к}}}{R^2} \\ \Theta &= \frac{T_f - T}{T_f - T_0} \end{aligned}\right\rangle \xrightarrow{\text{По номограммам}} Bi. \qquad (3.10)$$

3. Зная критерий Био $Bi = \frac{\alpha R}{\lambda}$, рассчитывают коэффициент теплоотдачи по формуле

$$\alpha = Bi \frac{\lambda}{R}. \tag{3.11}$$

4. Не заданную по условию задачи температуру T_c либо T_w и среднемассовую температуру тела T_m находят по алгоритму решения прямой задачи.

Замечание 1. Информация о температурном поле необходима:

- ✓ для контроля допустимой по технологии температуры тела (судят по значению температур T_c или T_w);
- ✓ для расчета термических напряжений, которые зависят от перепада температур $\Delta T = T_w - T_c$;
- ✓ для расчета теплового баланса по среднемассовой температуре тела в начале и конце его нагрева или охлаждения.

Замечание 2. Температурное поле тел простой формы в начальный период нагрева или охлаждения ($Fo < \frac{1}{3k}$) при граничных условиях III рода также можно рассчитать по номограммам, приведенным в литературе.