

## 5. ИНЖЕНЕРНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА

Основой инженерных методов расчета конвективного теплообмена служит экспериментальное исследование этих процессов. При этом для расчета температурных полей и тепловых потоков применяют методы аналогий, теорию планирования эксперимента и методы теории подобия.

### 5.1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ ПРОЦЕССОВ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА

При расчете и проектировании теплообменных устройств, как правило, требуется рассчитать тепловой поток при конвективной теплоотдаче от флюида к стенке или, наоборот, от стенки к флюиду по формуле Ньютона

$$Q = \alpha \Delta T F \text{ или } q = \alpha \Delta T, \quad (5.1)$$

где  $\Delta T = |T_w - T_f|$  – модуль разности температур между стенкой и флюидом, °С (К);

$T_w$  – температура поверхности теплообмена (стенки), °С (К);

$T_f$  – температура текучей среды (флюида) вдали от стенки, °С (К);

$Q$  – тепловой поток, Вт;

$q$  – поверхностная плотность теплового потока, Вт/м<sup>2</sup>;

$F$  – площадь поверхности теплообмена (площадь поверхности стенки), м<sup>2</sup>;

$\alpha$  – средний коэффициент теплоотдачи, Вт/(м<sup>2</sup>·К).

При заданных геометрических размерах системы теплообмена, температурах стенки и текучей среды задача расчета теплового потока сводится к определению коэффициента теплоотдачи  $\alpha$ . Заметим, что коэффициент теплоотдачи  $\alpha$  не имеет физического смысла и выступает в роли коэффициента пропорциональности в законе теплоотдачи Ньютона.

Коэффициент теплоотдачи находят, используя закон Ньютона, определив экспериментально тепловой поток при теплоотдаче и разность температур между стенкой и флюидом:

$$\alpha = \frac{Q}{\Delta T \cdot F}. \quad (5.2)$$

Для получения универсальной зависимости коэффициента теплоотдачи при конвективном теплообмене в сложных системах необходимо, в принципе, выполнить бесконечное множество экспериментов, поскольку коэффициент теплоотдачи зависит от многих параметров, таких как время, координаты, скорость, температура, физические свойства среды и т.д.:

$$\alpha = f(\tau, x_i, \vec{w}, T, \nu, \lambda, \rho, \dots). \quad (5.3)$$

Для уменьшения числа независимых переменных была разработана *теория подобия* процессов кондуктивного, конвективного и радиационного теплообмена, а также процессов массообмена. Теория подобия оперирует с безразмерными комплексами – *критериями* или *числами* подобия, которые получают на основе дифференциальных уравнений переноса энергии, импульса и массы.

*Критерий подобия* – безразмерный комплекс, который *характеризует* отношение физических эффектов. Другими словами, критерий представляет собой *меру* отношения физических эффектов.

Согласно теории подобия, экспериментальное определение коэффициента теплоотдачи выполняют на физических моделях, в которых реализован процесс той же физической природы, что и в объекте моделирования (образце).

Поэтому теория подобия дает правила моделирования и позволяет распространить результаты ограниченного числа экспериментов на группу подобных явлений.

Теория подобия базируется на трех положениях теоремы Кирпичева–Гухмана:

1. Подобные процессы должны иметь одинаковую физическую природу;
2. В модели и объекте моделирования (образце) должно выполняться подобие краевых условий. Для процессов конвективного теплообмена это геометрическое подобие, кинематическое подобие (подобие скоростей), динамическое подобие (подобие сил), тепловое подобие (подобие температурных полей и тепловых потоков).
3. В модели и объекте моделирования (образце) определяющие критерии должны быть равны. В этом случае равны и определяемые критерии.

Все критерии подобия подразделяют на две основные группы: *определяемые* и *определяющие*. Определяемые критерии находят из эксперимента, результаты которого зависят от определяющих критериев. Существует и группа независимых критериев или параметров, к которым следует отнести безразмерные координаты и безразмерное время. Однако в обратных задачах конвективного теплообмена безразмерное время может быть определяемым критерием. *Определяемые* критерии подобия также называют *числами подобия*.

При моделировании процессов тепломассообмена часто используют два *свойства критериев* подобия:

- ✓ – любая комбинация критериев также является критерием;
- ✓ – если процесс течения и тепломассообмена не зависит от какого-либо критерия, то этот процесс называют *автомодельным* (независимым) по отношению к этому критерию.

### 4.3.2. ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ КРИТЕРИИ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА

Для расчета теплового потока по закону теплоотдачи Ньютона необходимо найти из эксперимента коэффициент теплоотдачи, поэтому к определяемым критериям подобия относят безразмерные коэффициенты теплоотдачи – критерий Нуссельта ( $Nu$ ) и критерий Стантона ( $St$ ).

Рассмотрим физический смысл данных критериев, используя схему конвективной теплоотдачи (рис. 5.1).

Пусть флюид ( $f$ ) омывает стенку произвольной формы ( $w$ ). Вблизи стенки существуют гидродинамический и тепловой пограничные слои. Внутри гидродинамического пограничного слоя скорость флюида уменьшается от скорости невозмущенного потока ( $w = w_0$ ) до нуля на стенке ( $w = 0$ ) в силу условия прилипания. В тепловом пограничном слое происходит изменение температуры флюида от  $T = T_0$  – температуры за пределами пограничного слоя до  $T = T_w$  – температуры стенки. Пограничный слой имеет сложную структуру, которая описана в специальной литературе. В непосредственной близости у поверхности стенки существует вязкий подслой флюида, через который теплота передается только теплопроводностью по закону Фурье:

$$\vec{q} = -\lambda_f \left. \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} \right|_w, \quad (5.4)$$

где  $\lambda_f$  – коэффициент теплопроводности текучей среды.

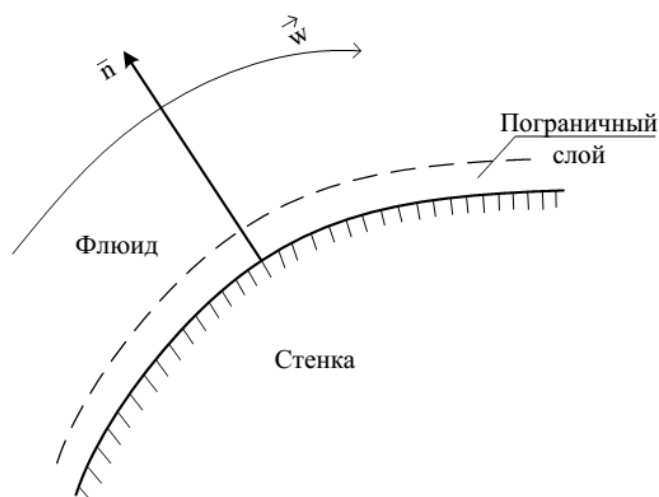


Рис. 4.1. К выводу критерия Нуссельта

Критерий Нуссельта (Нуссельт) характеризует отношение двух форм математического описания теплового потока, которым обмениваются флюид и стенка:

$$Nu \equiv \frac{q_{\text{конв}}}{q_{\text{конд},f}} = \frac{\alpha \Delta T}{\lambda_f \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}}}, \quad (5.5)$$

где  $q_{\text{конв}}$  – плотность теплового потока конвективной теплоотдачей, рассчитываемая по закону теплоотдачи Ньютона;

$q_{\text{конд},f}$  – плотность теплового потока кондукцией в теплопроводной части пограничного слоя, рассчитываемая по закону Фурье.

Учитывая, что градиент температурного поля флюида  $\frac{\partial T}{\partial n}$  прямо пропорционален отношению  $\frac{\Delta T}{R_0}$ , окончательно получим формулу критерия Нуссельта

$$Nu = \frac{\alpha \Delta T}{\lambda_f \frac{\Delta T}{R_0}} = \frac{\alpha}{\left(\frac{\lambda_f}{R_0}\right)} = \frac{\alpha R_0}{\lambda_f}, \quad (5.6)$$

где  $R_0$  – определяющий или характерный размер в системе конвективного теплообмена, м;

$\Delta T = |T_f - T_w|$  – перепад температур между флюидом и стенкой, К;

$\lambda_f$  – коэффициент теплопроводности текучей среды, Вт/(м·К).

Критерий Нуссельта характеризует отношение плотности теплового потока конвективной теплоотдачей к плотности теплового потока кондукцией в слое текучей среды вблизи стенки.

Без вывода запишем математическую формулировку критерия Стантона:

$$St = \frac{\alpha}{\rho c_p w_0} = \frac{Nu}{Pe}, \quad (5.7)$$

где  $\rho$  – плотность флюида, кг/м<sup>3</sup>;

$c_p$  – изобарная теплоемкость, Дж/(кг·К);

$Pe$  – критерий Пекле – критерий теплового подобия.

К группе определяемых критериев также относят критерий Эйлера (безразмерную силу давления) или Эйлер, который характеризует отношение силы давления к силе инерции или отношение энергии давления к кинетической энергии потока:

$$Eu = \frac{\Delta p}{\rho w_0^2}, \quad (5.8)$$

*Замечание.* Формально запись критерия Нуссельта  $Nu = \frac{\alpha R_0}{\lambda_f}$  и запись критерия Био  $Bi = \frac{\alpha R}{\lambda_w}$  совпадают. Однако можно выделить три принципиальных отличия друг от друга этих критериев подобия:

– во-первых, Био относится к группе *определяющих* критериев, а Нуссельт – к группе *определяемых* критериев;

– во-вторых, в критерий Био входит коэффициент теплопроводности твердого тела, а в критерий Нуссельта коэффициент теплопроводности текучей среды;

– в-третьих, определяющие размеры  $R$  и  $R_0$ , входящие в оба критерия, имеют разный смысл и разное значение, поскольку характеризуют разные расчетные области теплообмена.

#### 4.3.3. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ КРИТЕРИИ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА

Определяющие критерии подобия конвективного теплообмена подразделяют на две группы: критерии теплового подобия и критерии гидродинамического подобия. Определяющие критерии теплового подобия получают, используя дифференциальное уравнение Фурье–Кирхгофа, а определяющие критерии гидродинамического подобия – дифференциальное уравнение Навье–Стокса.

Для вывода определяющих критериев конвективного теплообмена систему дифференциальных уравнений конвективного теплообмена удобно записать в векторной форме:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + \vec{w} \nabla T = a \nabla^2 T; \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial \tau} + \vec{w} \nabla \vec{w} = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{w}. \quad (5.10)$$

Далее задают *базовые* или *определяющие* параметры расчетной области конвективного теплообмена, которые характеризуют условия однозначности краевой задачи конвективного теплообмена:

- a) определяющий размер  $R_0$ ;
- b) время процесса в нестационарных задачах конвективного теплообмена  $\tau_0$ ;
- c) определяющую температуру  $T_0$ ;
- d) определяющую скорость  $w_0$ ;
- e) базовое давление флюида  $p_0$ ;
- f) физические свойства флюида, взятые из справочника при определяющей температуре:  $\rho = f(T_0)$  – плотность,  $a = f(T_0)$  – коэффициент теплопроводности,  $\nu = f(T_0)$  – кинематический коэффициент вязкости.

Определяющие критерии *теплового подобия* получают отношением всех слагаемых уравнения Фурье–Кирхгофа к диффузионному члену уравнения, который моделирует перенос теплоты теплопроводностью или кондукцией.

Отношение локального теплового потока, который характеризует изменение энтальпии элементарного объема в единицу времени, к кондуктивному теплового потоку равно:

$$\frac{q_{\text{лок}}}{q_{\text{конд}}} = \frac{\frac{\partial T}{\partial \tau}}{a \nabla^2 T} \equiv \frac{\frac{T_0}{\tau_0}}{a \frac{T_0}{R_0^2}} = \frac{T_0 R_0^2}{a \tau_0} = \frac{1}{Fo}, \quad (5.11)$$

где  $Fo = \frac{a \tau_0}{R_0^2}$  – критерий Фурье – безразмерное время в задачах теплообмена;  $a$  – коэффициент температуропроводности при определяющей температуре  $T_0$ .

Физический смысл критерия Фурье состоит в том, что он характеризует отношение теплового потока за счет теплопроводности к локальному теплового потоку, отражающему изменение внутренней энергии элементарного объема.

Отношение конвективного теплового потока к кондуктивному теплового потоку равно:

$$\frac{q_{\text{конв}}}{q_{\text{конд}}} = \frac{\vec{w} \nabla T}{a \nabla^2 T} \equiv \frac{w_0 \frac{T_0}{R_0}}{a \frac{T_0}{R_0^2}} = \frac{w_0 T_0 R_0^2}{a T_0 R_0} = \frac{w_0 R_0}{a} = Pe, \quad (5.12)$$

где  $Pe = \frac{w_0 R_0}{a}$  – критерий Пекле – безразмерный конвективный тепловой поток.

Физический смысл критерия Пекле – критерия теплового подобия – состоит в том, что он характеризует отношение теплового потока, переданного конвекцией к кондуктивному теплового потоку в данной расчетной области теплообмена.

Определяющие критерии *гидродинамического подобия* получают отношением всех слагаемых уравнения Навье–Стокса к конвективному члену этого уравнения, который моделирует силу инерции.

Отношение локальной силы, которая характеризует изменение импульса элементарного объема в единицу времени, к силе инерции равно:

$$\frac{f_{\text{лок}}}{f_{\text{ин}}} = \frac{\frac{\partial \vec{w}}{\partial \tau}}{\vec{w} \nabla \vec{w}} \equiv \frac{\frac{w_0}{\tau_0}}{\frac{w_0^2}{R_0}} = \frac{w_0 R_0}{w_0^2 \tau_0} = \frac{R_0}{w_0 \tau_0} = \frac{1}{Ho}, \quad (5.13)$$

где  $Ho = \frac{w_0 \tau_0}{R_0}$  – критерий гомохронности (однородности во времени) – безразмерное время в задачах механики жидкости и газа.

Физический смысл критерия гомохронности состоит в том, что он характеризует отношение силы инерции к локальной силе.

Отношение гравитационной силы (силы тяжести) к силе инерции равно:

$$\frac{f_g}{f_{ин}} = \frac{g}{\vec{w}\nabla\vec{w}} \equiv \frac{g}{\frac{w_0^2}{R_0}} = \frac{gR_0}{w_0^2} = Fr, \quad (5.14)$$

где  $Fr$  – критерий Фруда (Фруд) – безразмерная сила тяжести;  $g$  – ускорение свободного падения.

Физический смысл критерия Фруда состоит в том, что он характеризует отношение гравитационной силы (силы тяжести) к силе инерции.

Отношение силы давления к силе инерции равно:

$$\frac{f_p}{f_{ин}} = \frac{\frac{1}{\rho}\nabla p}{\vec{w} \cdot \nabla\vec{w}} \equiv \frac{\frac{p_0}{\rho R_0}}{\frac{w_0^2}{R_0}} = \frac{p_0 R_0}{\rho R_0 w_0^2} = \frac{p_0}{\rho w_0^2} = Eu, \quad (5.15)$$

где  $Eu$  – критерий Эйлера (Эйлер) – безразмерная сила давления;  $\rho$  – плотность флюида при определяющей температуре  $T_0$ .

Физический смысл критерия Эйлера состоит в том, что он характеризует отношение силы давления к силе инерции. В энергетической трактовке Эйлер характеризует отношение потенциальной энергии давления к кинетической энергии движения потока.

Отношение силы трения к силе инерции равно:

$$\frac{f_{тр}}{f_{ин}} = \frac{\nu\nabla^2\vec{w}}{\vec{w}\nabla\vec{w}} \equiv \frac{\nu\frac{w_0}{R_0^2}}{\frac{w_0^2}{R_0}} = \frac{\nu w_0 R_0}{w_0^2 R_0^2} = \frac{\nu}{w_0 R_0} = \frac{1}{Re}, \quad (5.16)$$

где  $Re$  – критерий Рейнольдса (Рейнольдс) – безразмерная сила инерции;  $\nu$  – кинематический коэффициент вязкости при определяющей температуре  $T_0$ .

Физический смысл критерия Рейнольдса – критерия динамического подобия – состоит в том, что он характеризует отношение силы инерции к силе трения. По величине критерия Рейнольдса судят о режиме течения флюида при вынужденной конвекции.

В правой части уравнений Навье–Стокса стоят три критерия: Фруд ( $Fr$ ), Эйлер ( $Eu$ ) и Рейнольдс ( $Re$ ), два из которых однозначно определяют

третий критерий. При моделировании, как правило, считают  $Fr$  и  $Re$  определяющими критериями, а  $Eu$  – определяемым критерием.

При решении задач теплообмена при свободной конвекции скорость течения флюида определить довольно сложно, поэтому ее исключают из критериев подобия и учитывают косвенно, рассчитывая гравитационную силу, возникающую из-за переменного поля плотности в неоднородном поле температур. В этом случае в расчетах конвективного теплообмена используют критерий Галилея ( $Ga$ ), критерий Архимеда ( $Ar$ ), критерий Грасгофа ( $Gr$ ) и критерий Рэлея ( $Ra$ ).

Поскольку любая комбинация критериев тоже является критерием, можно записать:

$$Re^2 Fr = \frac{w_0^2 R_0^2}{\nu^2} \cdot \frac{g R_0}{w_0^2} = \frac{g R_0^3}{\nu^2} = Ga, \quad (5.17)$$

где  $Ga$  – критерий Галилея (Галилей);

$\nu$  – кинематический коэффициент вязкости при определяющей температуре  $T_0$ .

Физический смысл критерия Галилея состоит в том, что он характеризует отношение силы тяжести к силе вязкого трения.

Для учета свободной конвекции, возникающей из-за переменной плотности в данном объеме, умножим критерий Галилея ( $Ga$ ) на параметрический критерий  $\Delta\rho/\rho$ :

$$Ga \frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{g R_0^3}{\nu^2} \cdot \frac{\Delta\rho}{\rho} = Ar, \quad (5.18)$$

Это критерий Архимеда (Архимед). Его физический смысл состоит в том, что он характеризует отношение подъемной силы, возникающей из-за разности плотностей текучей среды, к силе вязкого трения.

Переменная плотность текучей среды в заданном объеме может возникать путем механического перемешивания двух или нескольких флюидов с разной плотностью и вследствие переменного температурного поля, так как плотность зависит от температуры. Если переменная плотность среды возникает вследствие процесса конвективного теплообмена, то в этом случае справедливо равенство

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \beta \Delta T, \quad (5.19)$$

где  $\Delta T$  – модуль разности температур между стенкой и флюидом, °C (K);

$\beta$  – коэффициент объемного расширения флюида, 1/K.



С учетом равенства (4.29) формулу для расчета критерия Архимеда записывают в виде

$$Ar = \frac{gR_0^3}{\nu^2} \cdot \frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{gR_0^3}{\nu^2} \cdot \beta\Delta T. \quad (5.20)$$

Критерий Архимеда, выраженный в виде (4.30), называют критерием Грасгофа ( $Gr$ , Грасгоф).

Физический смысл критерия Грасгофа состоит в том, что он характеризует отношение термогравитационной подъемной силы к силе вязкого трения.

Коэффициент объемного расширения капельных жидкостей приведен в справочниках в зависимости от температуры флюида, а для газов его рассчитывают по формуле:

$$\beta = \frac{1}{T_0}, \quad (5.21)$$

где  $T_0$  – определяющая температура, К.

По величине критерия Грасгофа судят о режиме течения флюида в задачах теплообмена при свободной конвекции для заданной текучей среды.

Для обобщения экспериментальных данных о режиме течения флюидов разной физической природы в расчетах свободной конвекции используют критерий Рэлея

$$Ra \cdot Gr = Pr, \quad (5.22)$$

где  $Pr$  – критерий Прандтля

$$Pr = \frac{\nu}{a}. \quad (5.23)$$

Физический смысл критерия Рэлея состоит в том, что он, как и критерий Грасгофа, характеризует отношение подъемной силы при тепловой (естественной) конвекции к силе трения, обусловленной вязкостью. Критерий Прандтля представляет собой отношение двух характеристик молекулярного переноса импульса ( $\nu$ ) и теплоты ( $a$ ) и является физическим параметром среды, значение которого приводят в справочниках в зависимости от температуры.

По величине критерия Прандтля ( $Pr$ ) все текучие среды можно разделить на три группы:

$Pr \ll 1$  – жидкие металлы;

$Pr \approx 1$  – газы;

$Pr > 1$  – текучие среды (вода, минеральные масла и органические жидкости).