Физико-технический институт

ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Лекция 2. Течение жидкостей

воскресенье, 21 апреля 2019 г.

БАЛАНС МАССЫ, СИЛЫ И ЭНЕРГИИ

Материальный баланс, или баланс массы. Если применить закон сохранения массы к гидродинамическому процессу, то можно получить материальный баланс, или «*уравнение неразрывностей*». Переход массы в энергию вызывает настолько малое изменение массы (даже в ядерных реакторах), что для инженерных целей этим изменением можно пренебречь.

БАЛАНС МАССЫ, СИЛЫ И ЭНЕРГИИ

Материальный баланс, или баланс массы.

Таким образом, при установившемся потоке количество жидкости, выраженное в единицах массы за единицу времени, есть ее мгновенный расход через любую поверхность S, полностью пересекающую поток. Значение расхода можно определить по одной из следующих формул:

$$w = Q\overline{\varrho} = \overline{u}\,\overline{\varrho}S = \overline{G}S = \sum_{0}^{S}(\overline{u}\,\overline{\varrho}\Delta S) = \int_{0}^{S} u\varrho\, dS = \int_{0}^{S} G dS.$$

БАЛАНС МАССЫ, СИЛЫ И ЭНЕРГИИ

Материальный баланс, или баланс массы.

Здесь черточки означают осреднение потока жидкости по S. Как правило, суммирование применяется для вычисления значений w при исследованиях в тех случаях, когда по сечению большого трубопровода скорость и температура изменяются несимметрично. Интегралы же удобны при радиальной симметрии потока в трубе.

БАЛАНС МАССЫ, СИЛЫ И ЭНЕРГИИ

Статическое давление и балансы сил.

Любое статическое давление в жидкости вызывает усилие, перпендикулярное стенкам сосуда. Такие силы могут быть очень большими при высоком давлении или больших размерах реактора и должны учитываться при проектировании. Если обозначить через z высоту над поверхностью постоянного давления, то разность давлений между высотами z_2 и z_x в спокойной жидкости (при отсутствии трения и ускорения) равна

БАЛАНС МАССЫ, СИЛЫ И ЭНЕРГИИ

Статическое давление и балансы сил.

$$p_2 - p_1 = \int_{z_2}^{z_1} \frac{\varrho g dz}{g_c} = \frac{\overline{\varrho g}(z_1 - z_2)}{g_c}. \qquad (2.1)$$

Это выражение полезно для вычисления основных поправок на неизотермичность манометров и т.п.

БАЛАНС МАССЫ, СИЛЫ И ЭНЕРГИИ

Статическое давление и балансы сил.

Интегрирование по замкнутому контуру дает

$$\Delta p_B = \frac{g}{g_c}\left(\int_{z_2}^{z_1} \varrho_a dz + \int_{z_1}^{z_2} \varrho_b dz\right) = \frac{g}{g_c}\int_{z_2}^{z_1} (\varrho_a - \varrho_b) dz =$$

$$= \frac{g\varrho_0\bar{\beta}_0}{g_c}\int_{z_2}^{z_1} (t_b - t_a) dz. \qquad (2.2)$$

БАЛАНС МАССЫ, СИЛЫ И ЭНЕРГИИ

Статическое давление и балансы сил.

Интегрирование по замкнутому контуру дает

$$\Delta p_B = \frac{g}{g_c}\left(\int_{z_2}^{z_1} \varrho_a dz + \int_{z_1}^{z_2} \varrho_b dz\right) = \frac{g}{g_c}\int_{z_2}^{z_1} (\varrho_a - \varrho_b) dz =$$

$$= \frac{g\varrho_0\overline{\beta}_0}{g_c}\int_{z_2}^{z_1} (t_b - t_a) dz. \qquad (2.2)$$

БАЛАНС МАССЫ, СИЛЫ И ЭНЕРГИИ

Полный баланс энергии

Использование при расчетах закона сохранения энергии чрезвычайно полезно в тех случаях, когда скорость потока жидкости, его расширение и тепловой поток весьма высоки, как это имеет место во многих конструкциях ядерных реакторов. Прослеживая за единицей массы потока вдоль бесконечно малой длины ее пути, имеем

$$di + d\left(\frac{p}{\varrho}\right) + \frac{gdz}{g_c} + \frac{\alpha d\overline{u}^2}{g_c} = dh + \frac{gdz}{g_c} + \frac{\alpha d\overline{u}^2}{g_c} = dQ + dW. \quad (2.3)$$

БАЛАНС МАССЫ, СИЛЫ И ЭНЕРГИИ

Полный баланс энергии

Здесь все члены должны быть выражены в одних и тех же единицах энергии, отнесенных к единице массы, dQ – тепло, полученное извне, а dW – работа, совершенная над жидкостью извне в дополнение к «работе потока» $d(P/\varrho)$, α – коэффициент, позволяющий определять кинетическую энергию потока по средней его скорости $\overline{u}$. Уравнение (2.3) можно проинтегрировать между двумя любыми положениями, т.е. заменить каждый дифференциал конечным приращением.

БАЛАНС МАССЫ, СИЛЫ И ЭНЕРГИИ

Баланс механической энергии

Если к установившемуся потоку применим закон Ньютона, выражая его как $F = ma$, то в этом случае получим баланс механической энергии или уравнение Бернулли. Последнее более удобно, чем вычисление полного энергетического баланса, в тех случаях, когда тепловые эффекты незначительны, а оценка трения расчетным путем при определении перепада давления теплоносителя в реакторе необходима.

БАЛАНС МАССЫ, СИЛЫ И ЭНЕРГИИ

Баланс механической энергии

Однако, прежде чем интегрировать такое соотношение, необходимо знать зависимость между ϱ и p. Это может быть записано следующим образом:

$$\frac{gdz}{g_c} + \frac{dp}{\varrho} + \frac{\alpha d\overline{u}^2}{2g_c} = dW - dF\,, \qquad (2.4)$$

где dF – потеря энергии, обусловленная трением.

БАЛАНС МАССЫ, СИЛЫ И ЭНЕРГИИ

Баланс механической энергии

Для многих практических задач эти энергетические балансы упрощаются. Так, например, для случая неподвижной жидкости последний, третий, член левой части выражения (2.4) принимается равным нулю, а для случая горизонтального потока $dz = 0$. Если ϱ – постоянная величина, то интеграл от второго члена равен а если, кроме того, поперечное сечение потока постоянно, то $d\overline{u}^2 = 0$.

БАЛАНС МАССЫ, СИЛЫ И ЭНЕРГИИ

Баланс механической энергии

В том случае, когда ϱ изменяется весьма слабо, его обычно заменяют средним значением $\bar{\varrho}$ и W принимают равным 0, если в системе между заданными пределами интегрирования нет насоса или другого двигателя жидкости.

Уравнение (2.4) можно проинтегрировать аналитически для постоянного либо незначительно изменяющегося ϱ или для изотермического течения газа.

БАЛАНС МАССЫ, СИЛЫ И ЭНЕРГИИ

Баланс механической энергии

Для течения через насадку или сопло значением dF можно пренебречь, и так как соотношение между p и ϱ можно получить из уравнения (2.3) или из соотношения для адиабатического расширения, то уравнение (2.4) можно проинтегрировать. Как правило, в реакторе имеется тепловыделение и значительное расширение жидкости, поэтому, чтобы ϱ сильно не менялось, удобно разделить канал на небольшие участки.

БАЛАНС МАССЫ, СИЛЫ И ЭНЕРГИИ

Баланс механической энергии

При этом, если будут известны условия на одном конце участка, то, решая совместно уравнения (2.3) и (2.4), находим p и ϱ на другом конце. Таким путем можно найти параметры для всего канала. Если найденные условия на втором конце не отвечают заданным требованиям, то процесс повторяется с другим потоком или с другими начальными условиями на переднем конце канала.

БАЛАНС МАССЫ, СИЛЫ И ЭНЕРГИИ

Баланс механической энергии

Этот метод применим также и для адиабатического потока, при котором следует принять ΔQ равным Q, и для изоэнтропического потока, где $\Delta F=0$.

БАЛАНС МАССЫ, СИЛЫ И ЭНЕРГИИ

Баланс количества движения

Применение закона Ньютона на некотором интервале времени $\Delta\theta$ дает равенство между импульсом и изменением количества движения

$$F g_c \Delta\theta = m\Delta u,$$

где F – «чистая» или результирующая сила, а Δu – изменение вектора скорости. Разделив это выражение на $\Delta\theta$ для установившегося потока, получим

БАЛАНС МАССЫ, СИЛЫ И ЭНЕРГИИ

Баланс количества движения

$$Fg_c = \Delta u \frac{m}{\Delta\theta} = \Delta u \frac{dm}{d\theta} = w\Delta u. \qquad (2.5)$$

Если требуется определить силу или давление, вызванные изменением направления или величины скорости течения, то при решении некоторых задач баланс количества движения более удобен, чем энергетический баланс.

ЛАМИНАРНЫЙ ПОТОК

Изотермический ньютоновский ламинарный поток в трубах правильного и постоянного поперечного сечения.

Ламинарный поток в симметричных каналах можно проанализировать непосредственно при помощи уравнения (1.3)

$$\tau = \frac{\mu}{g_c}\frac{dw}{dy},$$

если известна зависимость между касательными напряжениями и расстоянием y от стенки канала.

ЛАМИНАРНЫЙ ПОТОК

К симметричным каналам относятся цилиндрическая труба, кольцевой зазор и щелевой канал. Значения локальной скорости u можно выразить через y и градиент давления ${}^{dp}/_{dN}$, обусловленный трением, если разделить переменные u и y и проинтегрировать полученное выражение в пределах $0 \rightarrow y$ и $0 \rightarrow u$ так, чтобы u было равно 0 при $y = 0$.

ЛАМИНАРНЫЙ ПОТОК

Например, для горизонтальной трубы радиуса *R*, $-dr = dy$ и

$$\int_0^u \mu\, du = g_c \int_R^r \tau(-dr) = \int_r^R \frac{\pi r^2}{2\pi r}\frac{dp}{dN} dr; \quad (2.6)$$

Тогда

$$u = g_c \frac{dp}{dN}\frac{R^2 - r^2}{4\mu}. \quad (2.7)$$

ЛАМИНАРНЫЙ ПОТОК

Можно также получить полный объемный расход жидкости Q и среднюю скорость $\overline{u}$, если проинтегрировать u по поперечному сечению S:

$$Q\frac{w}{\varrho} = \int_0^S udS = \frac{\pi g_c}{4\mu}\frac{dp}{dN}\int_0^{R^2}(R^2 - r^2)dr^2 = \frac{\pi g_c R^4}{8\mu}\frac{dp}{dN}. \quad (2.8)$$

ЛАМИНАРНЫЙ ПОТОК

Для газов или жидкостей с существенно изменяющейся плотностью или температурой, функциональная зависимость которых от длины или давления известна, полный перепад давления по трубе можно получить, проинтегрировав уравнение (2.8).

ЛАМИНАРНЫЙ ПОТОК

Полное количество движения и кинетическая энергия потока за единицу времени при установившемся режиме течения соответственно определяются как

$$\frac{\pi \varrho}{g_c}\int_0^R u^2 dr^2 \quad \text{и} \quad \frac{\pi \varrho}{2 g_c}\int_0^R u^3 dr^2 .$$

Результаты интегрирования можно найти в справочной литературе.

ЛАМИНАРНЫЙ ПОТОК

Характеристики несжимаемого потока в длинных горизонтальных каналах

Поток	f_F	Круглая труба, радиус R	Концентрический кольцевой зазор, радиусы R_1, R_2			Широкий плоский канал, толщина b	Квадратный канал, сторона b
Ламинарный:							
$\frac{\bar{u}\mu N}{\Delta P g_c}$ (для средней скорости)	—	$\frac{R^2}{8}$	$\frac{1}{8}\left[R_2^2+R_1^2-\frac{R_2^2-R_1^2}{\ln(R_2/R_1)}\right]$			$\frac{b^2}{12}$	$\frac{b^2}{28,6}$
$\frac{u\mu N}{\Delta P g_c}$ (для локальной скорости)		$\frac{R^2-r^2}{4}$	$\frac{1}{4}\left[R_1^2-r^2+\frac{R_2^2-R_1^2}{\ln(R_2/R_1)}\ln\frac{r}{R_1}\right]$			$\frac{yb-y^2}{2}$	
			R_2/R_1				
		∞	3	2	1,2	1	
$\frac{u_{макс}}{\bar{u}}$	—	2	1,5180	1,5077	1,5019	1,500	2,07
γ		1,333	1,207	1,204	$\sim$1,2	1,200	1,36
α		2	1,568	1,552	$\sim$1,543	1,543	2,22

ЛАМИНАРНЫЙ ПОТОК

Турбулентный:								
$\frac{u_{макс}}{\bar{u}}$	0,01	1,286	—	—	—	1,18	—
	0,005	1,202	—	—	—	1,14	—
	0,0025	1,143	—	—	—	1,13	—
γ	0,01	1,055	—	—	~1,035	1,035	1,078
	0,005	1,030	—	—	~1,018	1,018	1,038
	0,0025	1,017	—	—	~1,010	1,010	1,02
α	0,01	1,135	—	—	—	1,229	—
	0,005	2,073	—	—	—	1,055	—
	0,0025	2,040	—	—	—	1,022	—

Примечание:

$$\gamma = \frac{\text{Количество движения за единицу времени}}{\text{Количество движения за единицу времени при } \bar{u}} = \frac{\text{Кинетическая энергия на единицу длины}}{\text{Кинетическая энергия на единицу длины при } \bar{u}};$$

$$\frac{\text{Количество движения на единицу длины}}{\text{Количество движения на единицу длины при } \bar{u}} = 1;$$

$$\alpha = \frac{\text{Кинетическая энергия за единицу времени}}{\text{Кинетическая энергия за единицу времени при } \bar{u}}.$$

ЛАМИНАРНЫЙ ПОТОК

Ламинарный поток в трубах неправильного сечения

Полный баланс сил, приложенных к элементу вязкой жидкости, описывается уравнениями Навье – Стокса. Составляющая баланса по координате x равна

$$F_x \varrho g_c - \frac{\partial p}{\partial x} g_c + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + \\ + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = \varrho \frac{du}{d\theta}\,. \qquad (2.9)$$

ЛАМИНАРНЫЙ ПОТОК

Подобные же соотношения записываются и для направлений по осям y и z. Здесь F_x – полная внешняя сила (например, сила тяжести) в направлении x на единицу массы, а u, v и w – компоненты скорости соответственно в направлениях x, y, z. Для установившегося несжимаемого потока в горизонтальном трубопроводе с постоянным сечением (приняв $dx = dN$) имеем:

$$\frac{dp}{dN} g_c = \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right). \quad (2.10)$$

ЛАМИНАРНЫЙ ПОТОК

Для канала любого заданного поперечного сечения можно записать произвольное уравнение для u так, чтобы оно соответствовало уравнению (2.10).

ЛАМИНАРНЫЙ ПОТОК

Ламинарное течение в коротких каналах

Когда поток жидкости ускоряется из-за внезапного падения давления, как это имеет место, например, в сопле, падение давления и, следовательно, увеличение u^2 происходят равномерно по потоку. Отсюда, если увеличение скорости сравнимо с ее начальным значением, то следствием этого является существенное постоянство конечной скорости.

ЛАМИНАРНЫЙ ПОТОК

Указанным способом обычно пользуются для того, чтобы получить область с постоянной скоростью, как это имеет место, например, в горловине аэродинамической трубы.

Если скоростью на входе и трением жидкости в сопле пренебречь, то падение давления во входном сопле, подсоединенном к длинной трубе, будет определяться выражением $\frac{\varrho \overline{u}^2}{2g_c}$.

ЛАМИНАРНЫЙ ПОТОК

Кинетическая энергия на конце трубы равняется удвоенной величине $\frac{\varrho \overline{u}^2}{2g_c}$; таким образом, дополнительный перепад давления $\frac{\varrho \overline{u}^2}{2g_c}$ возникает по длине трубы (дополнительно к трению), так как изменяется распределение скорости от плоского к параболическому. Кроме того, вблизи входа в трубу трение жидкости будет выше нормального из-за большего градиента скорости у стенки.

ЛАМИНАРНЫЙ ПОТОК

Пример вычисленния действия этих двух эффектов для труб и плоских каналов, отнесенного к среднескоростному напору, приведены в таблице

Увеличение перепада давления* для ламинарного потока в коротких трубах и плоских каналах, обусловленное постоянством скорости по сечению на входе

Диаметр трубы или высота плоского канала на выходе из сопла, деленные на Re	Увеличение скоростного напора $\frac{\Delta P}{\rho \bar{u}^2/2g_c}$		Диаметр трубы или высота плоского канала на выходе из сопла, деленные на Re	Увеличение скоростного напора $\frac{\Delta P}{\rho \bar{u}^2/2g_c}$	
	труба	плоский канал		труба	плоский канал
0	0	0	0,0050	0,74	0,448
0,000125	0,14	0,104	0,010	0,99	0,522
0,00025	0,20	0,148	0,015	1,14	0,560
0,0005	0,288	0,208	0,030	1,32	0,601
0,0010	0,396	0,290	0,040	1,37	0,601
0,0015	0,464	0,339	0,060**	1,41	0,601
0,0020	0,522	0,370	1,000**	64,00**	48,00**
0;0025	0,570	0,390			

* Прибавляется к перепаду давления из табл. 1.5 (первая строчка) для получения общего перепада давления от начала трубы или плоского канала. Перепад давления в сопле не учитывается.

** Падение давления в длинном канале с параболическим распределением плотности (из первого столбца табл. 1.5), обусловленное только трением.

ЛАМИНАРНЫЙ ПОТОК

Кольцевые каналы и непараллельные стенки с ламинарным потоком

Точное уравнение движения для ламинарного потока жидкости с постоянной вязкостью в концентрическом кольцевом зазоре можно получить так же, как и для обычной трубы. Можно получить приближенное уравнение движения жидкости для жесткого кольцевого зазора с расстоянием между осями труб ε.

ЛАМИНАРНЫЙ ПОТОК

При этом следует принять ширину кольцевого зазора равной $R_2 - R_1 + \varepsilon \cos\theta$ и подставить эту величину в уравнение для потока жидкости в концентрическом кольцевом зазоре, а затем проинтегрировать это уравнение по полуокружности. Если $\frac{R_2}{R_1} < 1{,}5$, то полученная формула $\overline{u} = \frac{g_c}{12\mu}\frac{dp}{dN}\left[(R_2 - R_1)^2 + 0{,}5\varepsilon^2\right]$ имеет точность до 1% или выше.

ЛАМИНАРНЫЙ ПОТОК

Для плоского канала с непараллельными стенками, но с постоянным поперечным сечением интегрирование по сечению канала от b_1 до b_2 дает

$$\overline{u} = \frac{g_c}{24\mu}\frac{dp}{dN}\left(b_1^2 + b_2^2\right).$$

ЛАМИНАРНЫЙ ПОТОК

Влияние шероховатости стенок на ламинарный поток

Когда число Рейнольдса для потока, перпендикулярного плоскому диску, достигает величины порядка 30 и выше, по течению возникают вихри и, очевидно, значительно изменяется характер течения. Таким образом, шероховатость стенок трубы величиной *e* будет нарушать режим потока, если её значение превышает $2D/\sqrt{Re}$ или $\sqrt{4D\mu/\bar{u}\varrho}$.

ЛАМИНАРНЫЙ ПОТОК

Для канала с параллельными стенками и расстоянием между ними b критическое значение e равно $\sqrt{{}^{30\mu}/_{\varrho\tau_w}}$, где τ_w – касательное напряжение, обусловленное трением жидкости у стенки и трубы. Этот результат удовлетворительно согласуется с данными эксперимента.

ЛАМИНАРНЫЙ ПОТОК

Градиент давления в неизотермическом ламинарном потоке

Если вязкость у стенки трубы μ_w выше вязкости потока при средней температуре μ_b (например, при охлаждении жидкости или нагревании газа), то градиент давления ${}^{dp}/_{dN}$ будет выше градиента, вычисленного для изотермического течения при средней температуре потока t_b, и наоборот.

ЛАМИНАРНЫЙ ПОТОК

Теоретическое вычисление поправки на изотермичность потока затруднено, но для практических расчетов она с вполне удовлетворительной точностью может быть найдена эмпирическим путем. В тех случаях, когда поток охлаждается, перепад давления, вычисленный для изотермического течения, должен делиться на величину $\left({}^{\mu_b}/{}_{\mu_w}\right)^{0,23}$, а когда поток нагревается, – на величину $\left({}^{\mu_b}/{}_{\mu_w}\right)^{0,32}$.

ЛАМИНАРНЫЙ ПОТОК

Существует и ряд других методов учета в расчетах неизотермичности потока, остающегося тем не менее ламинарным.