ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ В НЕСТАЦИОНАРНОМ ПРОЦЕССЕ

Расчет температурного поля и тепловых потоков в процессе теплопроводности рассмотрим на примере нагрева или охлаждения твердых тел, поскольку в твердых телах перенос теплоты происходит только теплопроводностью.

Энергетическая форма записи закона Фурье. Коэффициент температуропроводности

Коэффициент температуропроводности a, м^2/с, – физическая характеристика вещества, которую определяют экспериментально и приводят в зависимости от температуры в справочниках.

Коэффициент температуропроводности a характеризует *теплоинерционные свойства вещества* или, другими словами, характеризует *скорость изменения температуры в каждой точке тела во времени*, так как скорость изменения температуры прямо пропорциональна коэффициенту температуропроводности:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} \sim a. \tag{12.1}$$

Из (12.1) следует, что коэффициент температуропроводности характеризует только *нестационарные* процессы.

Коэффициент температуропроводности функционально связан с другими физическими характеристиками вещества следующими соотношениями:

$$a = \frac{\lambda}{\rho c}; a = \frac{\lambda}{c'} \tag{12.2}$$

где c – удельная массовая теплоемкость, Дж/(кг·К); c' – удельная объемная теплоемкость, Дж/(м^3·К); ρ – плотность вещества, кг/м^3; λ – коэффициент теплопроводности Вт/(м·К).

Порядок величины коэффициента температуропроводности можно характеризовать следующими величинами:

$a \approx 10^{-7}$ м^2/с – для тепловой изоляции;

$a \approx 10^{-6}$ м^2/с – для огнеупоров;

$a \approx 10^{-5}$ м^2/с – для стали.

Для газов, у которых теплоемкость зависит от вида процесса, естественно, и коэффициент температуропроводности является функцией процесса:

– для изохорного процесса v = const: $a_v = \frac{\lambda}{\rho c_v} = \frac{\lambda}{c_v'}$;

– для изобарного процесса p = const: $a_p = \frac{\lambda}{\rho c_p} = \frac{\lambda}{c_p'}$.

Для записи закона Фурье в *энергетической форме* заменим λ в классической форме записи закона теплопроводности

$$\vec{Q} = -\lambda \cdot \mathrm{grad}(T) \cdot F;\ \vec{q} = -\lambda \cdot \mathrm{grad}(T)$$

выражением

$$\lambda = a_v \rho c_v = a_v c_v' \text{ или } \lambda = a_p \rho c_p = a_p c_p'.$$

Для изохорных процессов закон Фурье в энергетической форме записи принимает вид:

$$\vec{q} = -a_v c_v' \nabla T = -a_v \nabla(c_v' T) = -a_v \mathrm{grad}(u'), \tag{12.3}$$

где u' – удельная объемная внутренняя энергия, Дж/м^3.
Для изобарных процессов закон Фурье в энергетической форме записи принимает вид:

$$\vec{q} = -a_p c_p' \nabla T = -a_p \nabla(c_p' T) = -a_p \mathrm{grad}(h'), \tag{12.4}$$

где h' – удельная объемная энтальпия, Дж/м^3.

Для твердых тел, обладающих малым коэффициентом температурного расширения, удельные изобарная и изохорная теплоемкости отличаются незначительно и в инженерных расчетах можно принять

$$c_p \approx c_v = c; \quad a_p \approx a_v = a. \tag{12.5}$$

Тогда основной закон теплопроводности (закон Фурье) в энергетической форме записи окончательно принимает вид

$$\vec{q} = -a \cdot \mathrm{grad}(\rho h) = -a \cdot \mathrm{grad}(h'), \tag{12.6}$$

где h – удельная массовая энтальпия, Дж/кг.

Дифференциальное уравнение теплопроводности

Дифференциальное уравнение теплопроводности вывел в 1814 году французский ученый Фурье и поэтому это уравнение носит его имя.
Если поместить тело, например бесконечную пластину толщиной δ и начальной температурой T_0, в горячую среду с температурой T_f (рис. 12.1), то пластина, получая энергию от горячей среды, будет нагреваться, и ее температура изменяется с течением времени в каждой точке тела в интервале температур от T_0 до T_f.
В общем случае трехмерное нестационарное температурное поле $T = f(x_i, \tau)$ находят решением дифференциального уравнения теплопроводности. Вывод дифференциального уравнения теплопроводности основан на законе сохранения энергии для элементарного объема тела и использует закон Фурье для связи теплового потока и температурного поля.
Дифференциальное уравнение Фурье описывает процессы, которые при теплопроводности протекают в каждом элементарном объеме тела:

1) поглощение тепловой энергии при нагреве или выделение теплоты при его охлаждении;
2) прохождение теплоты через элементарный объем тела транзитом;
3) выделение или поглощение теплоты за счет действия внутренних источников или стоков теплоты мощностью q_v.

В векторной форме записи дифференциальное уравнение теплопроводности имеет вид

$$c' \frac{\partial T}{\partial \tau} = \mathrm{div}\big(\lambda \cdot \mathrm{grad}(T)\big) + q_v. \tag{12.7}$$

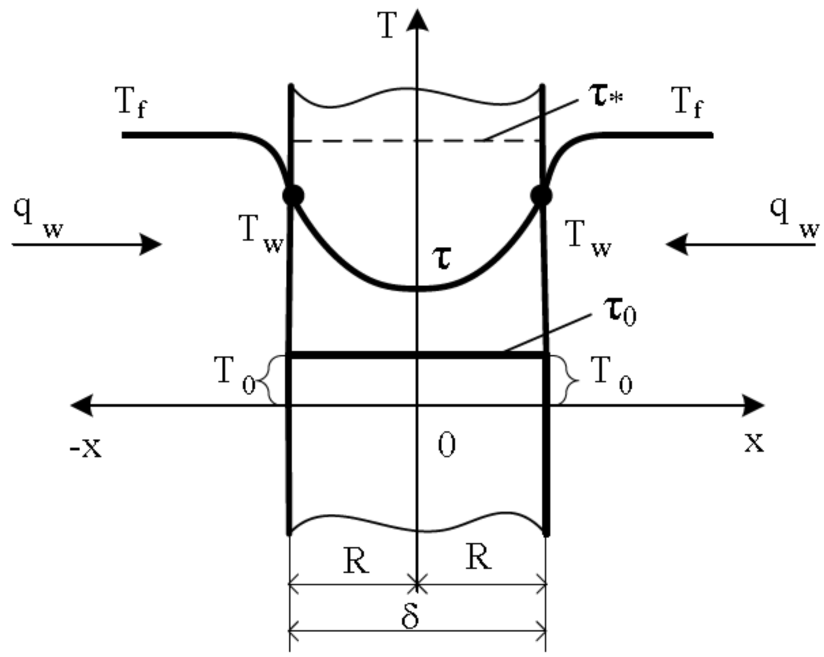


Рис.12.1. Нагрев пластины в среде с температурой T_f:
τ_0 – начало нагрева; τ – текущее время нагрева; τ^* – время, при котором температура тела равна температуре окружающей среды T_f

В векторной форме записи дифференциальное уравнение теплопроводности имеет вид

$$c'\frac{\partial T}{\partial \tau} = \mathrm{div}\big(\lambda \cdot \mathrm{grad}(T)\big) + q_v. \qquad (12.7)$$

Дифференциальное уравнение теплопроводности относят к классу дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа.

Решая уравнение (12.7) с соответствующими условиями однозначности находят температурное поле $T(x_i, \tau)$, поэтому можно сказать, что дифференциальное уравнение теплопроводности устанавливает *связь между пространственным и временным изменениями* температуры.

Вид формул для операторов дивергенции (div) и градиента (grad) зависит от выбора системы координат. Например, в декартовой системе координат дифференциальное уравнение теплопроводности примет вид

$$c'\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial z}\right) + q_v, \qquad (12.8)$$

или, принимая допущение о независимости физических свойств вещества от температуры

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) + \frac{q_v}{c'}, \qquad (12.9)$$

Мы будем решать дифференциальное уравнение Фурье только для тел простейшей формы (бесконечная пластина, бесконечный цилиндр и шар или сфера) с постоянными физическими коэффициентами:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{k-1}{x_1}\cdot\frac{\partial T}{\partial x_1}\right) + \frac{q_v}{c'}, \qquad (12.10)$$

где x_1 – первая координата в ортогональной системе координат: $x_1 = x$ в декартовой системе координат, $x_1 = r$ в цилиндрической и сферической системах координат; k – коэффициент формы тела: $k = 1$ – бесконечная пластина; $k = 2$ – бесконечный цилиндр; $k = 3$ – шар.

При отсутствии в системе внутренних источников или стоков теплоты ($q_v = 0$) дифференциальное уравнение Фурье для тел простейшей формы записывают следующим образом:

– бесконечная пластина ($k = 1$):

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}; \qquad (12.11)$$

– бесконечный цилиндр ($k = 2$):

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial T}{\partial r}\right); \qquad (12.12)$$

– шар или сфера ($k = 3$):

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\cdot\frac{\partial T}{\partial r}\right); \qquad (12.13)$$

При неизменных условиях теплообмена (постоянных температурах флюида, омывающего тело с разных сторон, и постоянных коэффициентах теплоотдачи) на границах тела его температурное поле с некоторого момента времени перестает изменяться во времени и наступает *стационарный* режим теплопроводности, который для тел простейшей формы описывается при действии внутренних источников теплоты уравнением Пуассона

$$\frac{d^2 T}{d x_1^2} + \frac{k-1}{x_1}\cdot\frac{dT}{dx_1} + \frac{q_v}{\lambda} = 0, \qquad (12.14)$$

или, если $q_v = 0$, уравнением Лапласа

$$\frac{d^2 T}{d x_1^2} + \frac{k-1}{x_1}\cdot\frac{dT}{dx_1} = 0, \qquad (12.15)$$

Для расчета температурного поля в процессе стационарной теплопроводности удобно уравнение (12.15) записать в так называемой дивергентной форме записи:

$$\frac{1}{x_1^{k-1}}\frac{d}{x_1}\left(x_1^{k-1}\frac{dT}{dx_1}\right) = 0. \qquad (12.16)$$

В результате решения одномерного дифференциального уравнения для стационарного процесса теплопроводности находят температурное поле в виде $T(x_1)$ или $T(x)$ – в декартовой системе координат и $T(r)$ – в цилиндрической и сферической системах координат.

Условия однозначности, необходимые для решения дифференциального уравнения Фурье

Дифференциальное уравнение теплопроводности, как и любое другое дифференциальное уравнение, имеет бесчисленное множество решений. Для выделения из множества решений единственного решения этого уравнения, соответствующего единственному явлению теплопроводности, должны быть заданы следующие параметры.

1. Размеры расчетной области: геометрические размеры и форма тела, а также время τ для нестационарного процесса. Заметим, что время процесса может быть задано неявно по какому-либо дополнительному условию, например, как время нагрева или охлаждения тела до достижения теплового равновесия тела с окружающей средой.
2. Физические свойства вещества: коэффициент теплопроводности (λ), удельная объемная теплоемкость (c') или удельная массовая теплоемкость (c), плотность (ρ), коэффициент температуропроводности (a).
3. Закон распределения внутренних источников теплоты в заданной расчетной области тела q_v (x_i, τ). В частном случае отсутствия внутренних источников q_v = 0.
4. Краевые условия (КУ), которые задают *начальное* распределение температуры в заданной расчетной области (НУ) и условия теплообмена на границе этой области (ГУ).

Начальное условие (НУ)

Перед началом расчета процесса *нестационарной* теплопроводности необходима информация о распределении температуры в объеме тела в некоторый момент времени, принимаемый за начало отсчета, или *начальный* момент времени (момент времени τ = 0). В начальный момент времени должна быть задана функция

$$T(x_i, \tau = 0) = T_0(x_i) \quad \text{или} \quad T(x_i, 0) = T_0(x_i), \qquad (12.17)$$

где x_i – система координат.

В частном случае, при одинаковой температуре по всему объему тела в начальный момент времени, для тел простейшей формы начальное условие принимает вид

$$T(x_i, 0) = T_0 = \text{const}, \qquad (12.18)$$

Заметим, что для задач стационарной теплопроводности задание начального условия не имеет смысла.

Граничные условия (ГУ)

В расчетах теплообмена применяют четыре типа граничных условий, которые называют родами. Граничные условия теплообмена необходимо задавать как на внешней поверхности тела (внешние ГУ), так и, при расположении границы расчетной области внутри тела, на внутренней границе (внутренние ГУ). Граничные условия первого и второго родов могут быть внешними и внутренними, граничные условия третьего рода – только внешние граничные условия, граничные условия четвертого рода – внутренние граничные условия для системы твердых тел. Граничные условия четвертого рода можно задавать и на внешней поверхности твердого тела на границе его контакта с текучим флюидом, скорость которого в области вязкого подслоя пограничного слоя практически равна нулю.

Методы решения краевой задачи теории теплопроводности

Все методы решения краевой задачи теории теплопроводности можно разделить на две большие группы. К первой группе относят методы, использующие современные средства математического анализа, вычислительной математики и вычислительной техники, поэтому их называют *теоретическими* методами. Во вторую группу включены методы, при использовании которых температурное поле находят в результате проведения эксперимента. Поэтому их называют *экспериментальными* методами.

Экспериментальные методы делятся на методы теории подобия и методы аналогий. По методу теории подобия температурное поле находят экспериментально на модели, в которой реализуется процесс той же физической природы, что и в объекте моделирования. По методу аналогий исследование процесса теплопроводности заменяют исследованием процесса другой физической природы, который протекает аналогично процессу теплопроводности. Эта аналогия проявляется в одинаковой по форме записи дифференциальных уравнениях переноса, относящихся к разным физическим явлениям.

Теоретические методы можно подразделить на *аналитические, численные, численно-аналитические* методы.

При использовании *аналитических* методов решение получают в виде конечной формулы или бесконечного ряда. Различают *точные аналитические* методы (метод разделения переменных (метод Фурье), метод интегральных преобразований, метод конформных отображений) и *приближенные аналитические* методы (различные формы вариационных методов, метод подстановок). *Точные аналитические* методы можно применять только к решению линейных задач теории теплопроводности.

При использовании *численных методов* решение задачи получают в виде набора значений температур в дискретных точках пространства в дискретные моменты времени. В настоящее время для решения задач теплообмена численными методами наиболее часто используют *метод сеток* и *метод конечных элементов*.

Методы, которые используют аналитические решения для получения значений температур в дискретных точках пространства в дискретные моменты времени, называются *численно-аналитическими* (метод граничных элементов, метод *R*-функций, метод дискретного удовлетворения краевых условий).

Нестационарная теплопроводность в телах простейшей формы

Критерии подобия

при решении задач нестационарной теплопроводности, описываемых уравнением теплопроводности, используют так называемые критерии подобия. Наиболее часто используемых критериев два:

- критерий Био $Bi = {}^{\alpha R}/_{\lambda_w}$, характеризующий отношение интенсивности внешнего теплообмена (α) к интенсивности внутреннего теплообмена (λ/R). С другой стороны, критерий Био характеризует отношение термического сопротивления теплопроводности (R/λ) к термическому сопротивлению теплоотдачи ($1/\alpha$). От величины критерия Био зависит интенсивность процесса теплопроводности.
- критерий Фурье $Fo = {}^{a\tau}/_{R^2}$, характеризующий соотношение между скоростью изменения тепловых условий в окружающей среде и скоростью перестройки поля температуры внутри рассматриваемой системы (тела). Зависит от размеров тела и коэффициента его температуропроводности.

Математическая формулировка задачи

Температурное поле в телах простейшей формы при их нагреве или охлаждении находят решением краевой задачи теории теплопроводности, которая состоит из дифференциального уравнения и условий однозначности. Линейное дифференциальное уравнение теплопроводности для тел простейшей формы без учета внутренних источников (стоков) теплоты имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{k-1}{x_1}\cdot\frac{\partial T}{\partial x_1}\right), \qquad (12.19)$$

Для задания условий однозначности рассмотрим процесс симметричного нагрева тела простой формы с равномерным начальным распределением температуры по сечению тела. Температурное поле будем находить в расчетной области, ограниченной осью симметрии тела и его внешней границей (см. рис. 12.1). Для выделения единственного решения данного уравнения зададим условия однозначности:

– размер расчетной области $R = {}^{\delta}/_{2}$, где δ – толщина пластины, и время процесса $\tau_к$;

– теплофизические свойства материала тела a и λ;

– внутренние источники теплоты отсутствуют: $q_v = 0$;

– начальное условие $T(x_1, 0) = T_0$;

– граничные условия:

а) на внутренней границе из условия симметрии температурного поля следует, что

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x_1}\right|_{x_1=0} = 0 \qquad (12.20)$$

б) на внешней границе тела зададим граничные условия I, II и III родов. Граничное условие I рода при симметричном нагреве и постоянной температуре поверхности T_w имеет вид

$$T(R,0) = T_w = \text{const}. \qquad (12.21)$$

Граничные условия II рода при симметричном нагреве постоянным тепловым потоком с поверхностной плотностью q_w задают формулой

$$\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial x_1}\right|_{x_1=R} = q_w = \text{const}. \qquad (12.22)$$

При граничных условиях III рода теплообмен на поверхности тела определяется температурой окружающей среды T_f и коэффициентом теплоотдачи α:

$$\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial x_1}\right|_{x_1=R} = \alpha\left(T_f - T_w\right). \qquad (12.22)$$

В результате решения задачи нестационарной теплопроводности находят температурное поле $T(x_1,\tau)$, изменяющееся в пространстве и во времени.

Графическое представление температурного поля при граничных условиях I, II и III родов в телах простой формы

Рассмотрим особенности развития температурного поля в пространстве и времени в телах простой формы в процессе нагрева при граничных условиях I, II и III родов. Зная информацию о качественном изменении температурного поля в зависимости от заданных граничных условий, ещё до выполнения расчета можно прогнозировать тепловое состояние тела.

Температурное поле при граничных условиях I рода

Температурное поле в процессе нагрева тела простой формы (бесконечной пластины, бесконечного цилиндра или шара) по сечению тела и во времени при условии мгновенного изменения температуры на поверхности тела от начальной температуры T_0 до температуры T_w (ГУ I рода) показано на рис. 12.2.

На рис. 12.2, б показано изменение температуры на поверхности $T(R,\tau)$ и в тепловом центре $T(R,\tau)$ тела во времени. Можно наблюдать три характерных периода нагрева.

В первом периоде (участке) нагрева 1 температурное поле тела в значительной степени зависит от начального распределения температуры (начального условия). На втором временном участке 2 развитие температурного поля не зависит от начального температурного поля. В конце второго периода нагрева (в момент времени τ*) наступает режим *теплового равновесия*, при котором температура тела по всему сечению становится равной температуре поверхности тела T_w.

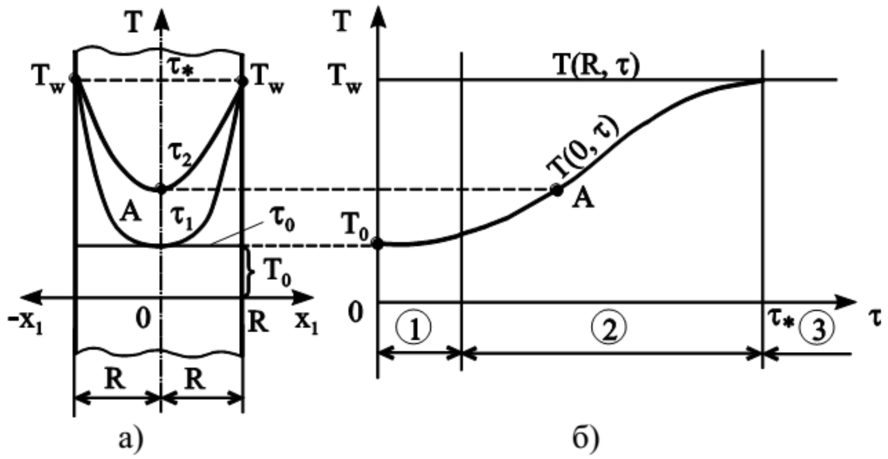


Рис. 12.2. Температурное поле при граничных условиях I рода:
а – изменение температуры по сечению тела;
б – изменение температуры на поверхности и в центре тела во времени

Режим нагрева, при котором температурное поле тела не зависит от закона изменения температуры по сечению тела в начальный момент времени $T(x_1,0)$, называют *установившимся* при данных граничных условиях режимом.
Например, температурное поле в процессе нагрева или охлаждения бесконечной пластины при граничных условиях I рода начиная с момента времени $Fo > 0{,}06$ с погрешностью менее 10% и с момента времени $Fo > 0{,}2$ с погрешностью менее 2% не зависит от начального условия.

Температурное поле при граничных условиях II рода
Температурное поле в процессе нагрева тела простой формы (бесконечной пластины, бесконечного цилиндра или шара) по сечению тела и во времени при условии поступления на поверхность тела постоянного теплового потока (ГУ II рода) показано на рис. 12.3.
В этом случае наблюдается только два периода нагрева (см. рис. 12.3, б). В первом периоде (участке) нагрева 1 температурное поле тела, как и при ГУ I рода, в значительной степени зависит от начального распределения температуры (начального условия). На втором временном участке 2, который при ГУ II рода начинается с момента времени $Fo \geq {}^{1}\!/_{2k}$, где k – коэффициент формы тела, развитие температурного поля не зависит от начального температурного поля. Этот период установившегося развития температурного поля при граничных условиях II рода называют *квазистационарным* режимом нагрева. При квазистационарном режиме изменение температуры во времени в любой точке тела подчиняется линейному закону. Поэтому перепад температур между двумя любыми

точками тела по сечению не изменяется во времени, а максимальный перепад температур между температурой поверхности и температурой теплового центра тела равен:

$$\Delta T = T(R,\tau) - T(R,0) = \frac{q_w R}{2\lambda}, \tag{12.23}$$

где q_w – плотность теплового потока, поступающего на поверхность тела; R – расчетный размер тела; λ – коэффициент теплопроводности тела.

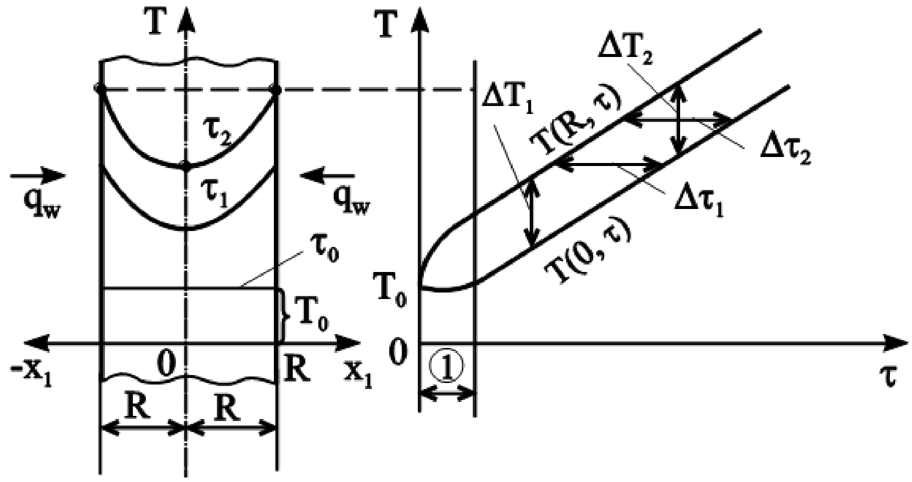


Рис. 12.3. Температурное поле при граничных условиях II рода:
а – изменение температуры по сечению тела;
б – изменение температуры на поверхности и в центре тела во времени

Заметим, что величина перепада температур по сечению тел простой формы не зависит от формы тела.

При квазистационарном режиме не зависит от времени процесса и время запаздывания, в течение которого температура теплового центра становится равной температуре поверхности тела (рис. 12.3, б):

$$Fo = \frac{1}{2k} \tag{12.24}$$

или в размерном виде

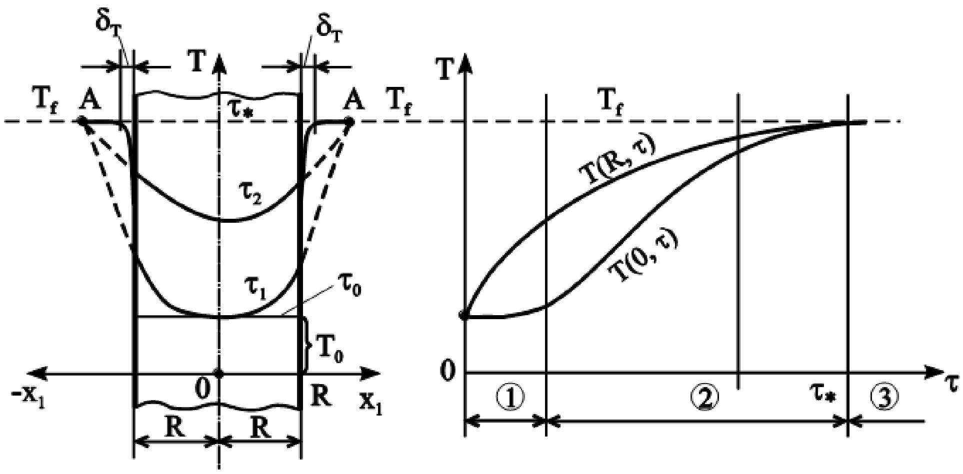
$$\Delta\tau = \frac{R^2}{2ak}. \tag{12.25}$$

Анализ графиков на рис. 12.3 показывает, что при нагреве постоянным тепловым потоком отсутствует период теплового равновесия тела с окружающей средой, что приводит при превышении допустимых температур к разрушению твердых тел.

Температурное поле при граничных условиях III рода

Температурное поле в процессе нагрева тела простой формы (бесконечной пластины, бесконечного цилиндра или шара) по сечению тела и во времени в среде с постоянной температурой T_f и заданным коэффициентом теплоотдачи α (ГУ III рода) показано на рис. 12.4. В этом случае процесс нагрева (охлаждения) тела проходит три стадии:

– начальный период 1, который длится до момента $Fo < {}^{1}/_{3k}$;
– установившийся или регулярный режим, который наступает начиная с момента времени $Fo \geq {}^{1}/_{3k}$;
– режим теплового равновесия, при котором температура тела по всему сечению становится равной температуре поверхности тела T_w. Начало режима теплового равновесия на рис. 12.4 наступает в момент времени τ*.



а) б)

Рис. 12.4. Температурное поле при граничных условиях III рода:
а – изменение температуры по сечению тела;
б – изменение температуры на поверхности и в центре тела во времени

В начальный период нагрева (охлаждения) тела на процесс формирования температурного поля в сильной степени оказывает влияние начальное распределение температур по сечению тела.
Регулярный режим нагрева тела характеризуется постоянной относительной скоростью нагрева тела, которую называют *темпом* нагрева (охлаждения). Темп нагрева не зависит ни от координат, ни от времени и по определению равен:

$$m = -\frac{1}{\Theta}\frac{\partial\Theta}{\partial\tau}, \qquad (12.26)$$

где $\Theta = \frac{T_f - T}{T_f - T_0}$ – безразмерная (относительная избыточная) температура; T_f – температура окружающей среды; T_0 – начальная температура тела.