



**Физико-технический
институт**

ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ



Практическое занятие № 14
Теплопроводность
в нестационарных режимах
Теория



Напомним о критериях подобия, применяемых в том числе для расчета теплопроводности в нестационарных режимах.

Наиболее часто используемых критериев два:

- критерий Био $Bi = \alpha R / \lambda_w$, характеризующий отношение интенсивности внешнего теплообмена (α) к интенсивности внутреннего теплообмена (λ/R). С другой стороны, критерий Био характеризует отношение термического сопротивления теплопроводности (R/λ) к термическому сопротивлению теплоотдачи ($1/\alpha$).



От величины критерия Био зависит интенсивность процесса теплопроводности.

- критерий Фурье $Fo = a\tau / R^2$, характеризующий соотношение между скоростью изменения тепловых условий в окружающей среде и скоростью перестройки поля температуры внутри рассматриваемой системы (тела). Зависит от размеров тела и коэффициента его температуропроводности.



Теплообмен на границе твердого тела, который удобно описать граничными условиями третьего рода, наиболее часто встречается в практике инженерных расчетов.

Решение краевой задачи теории теплопроводности в безразмерном виде для регулярного режима (начиная с момента времени $Fo \geq 1/(3k)$) имеет вид:

$$\Theta(X, Fo) = A_1 \Lambda_1(\mu_1 X) \exp(-\mu_1^2 Fo), \quad (14.1)$$

где комплекс A_1 и лямбда-функция Λ_1 рассчитывают по формулам

$$A_n = \frac{2Bi}{Bi^2 + (2 - k)Bi + \mu_n^2}; \quad (14.2)$$



$$\Lambda_1(\mu_n X) = \frac{X^{\frac{2-k}{2}} J_{\frac{k-2}{2}}(\mu_n X)}{J_{\frac{k-2}{2}}(\mu_n)}, \quad (14.3)$$

μ_n – n -й корень характеристического уравнения ($n = 1, 2, \dots, \infty$); $J_m(u)$ – функция Бесселя 1 рода m -го порядка; $\Theta = \frac{T_f - T}{T_f - T_0}$ – безразмерная температура;

$X = \frac{x_1}{R}$ – безразмерная координата; R – характерный или определяющий размер тела; $Fo = \frac{\alpha \tau}{R^2}$ – безразмерное время – критерий Фурье; k – коэффициент формы тела.



Характеристическое уравнение для решения дифференциального уравнения теплопроводности при граничных условиях III рода имеет вид

$$Bi \cdot \frac{J_{k-2}(\mu_n)}{2} = \mu_n \cdot \frac{J_k(\mu_n)}{2}. \quad (14.4)$$

Видно, что безразмерная температура зависит от четырех параметров $\Theta = f(k, X, Fo, Bi)$. Для удобства инженерных расчетов данную зависимость представляют в виде графиков – номограмм. Наиболее часто используют шесть графиков зависимости $\Theta = f(Fo, Bi)$, которые построены для теплового центра ($X = 0$) и для поверхности ($X = 1$) трех тел простейшей формы и приведены в справочной литературе.

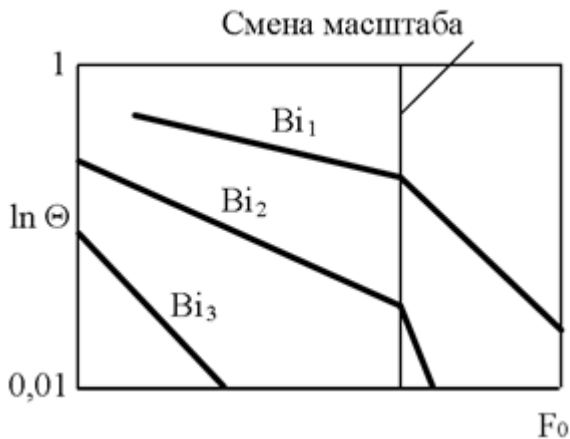


рис. 14.1

На рис. 14.1 показан общий вид номограммы для расчета нестационарной теплопроводности в телах простейшей формы при граничных условиях III рода.



При расчете нестационарной теплопроводности существуют две основные постановки задачи: прямая и обратная. Целью решения прямой задачи является определение температуры в тепловом центре (T_c) или на поверхности тела (T_w) при заданных условиях однозначности. В результате решения обратной задачи теплопроводности по известной температуре в тепловом центре (T_c) или на поверхности тела (T_w) и частично заданных условиях однозначности находят неизвестное условие однозначности – время процесса теплопроводности или коэффициент теплоотдачи.



В этом случае известны все условия однозначности, необходимые для расчета температурного поля:

– размеры расчетной области: геометрически размеры (толщина пластины, диаметр цилиндра или шара) и форма тела (пластина, цилиндр или шар), а также время нагрева или охлаждения (τ_k);

– физические свойства вещества: коэффициент теплопроводности (λ) и коэффициент температуропроводности (a);

– краевые условия: начальное условие и граничные условия третьего рода на внешней границе тела.



Необходимо найти температуру теплового центра тела (T_c), температуру поверхности тела (T_w) и среднюю по массе температуру тела (T_m).

В краткой форме записи прямую постановку задачи можно записать следующим образом.

Дано: δ или d ;

τ_k , a ;

T_0 ;

T_f , α .

Найти: температуру теплового центра тела $T_c = T(0, \tau_k)$;

температуру поверхности тела $T_w = T(R, \tau_k)$;

среднюю по массе температуру тела $T_m = \bar{T}(t_k)$.



Алгоритм решения прямой задачи заключается в следующем.

1. Перед началом расчета необходимо определить размер расчетной области R , который для бесконечного цилиндра и шара при неизменных по поверхности условиях теплообмена равен радиусу тела ($R = d_{ц}/2 = r_{ц}$ или $R = d_{ш}/2 = r_{ш}$). Для бесконечной пластины при ее *симметричном* нагреве или охлаждении $R = \delta/2$, а при *несимметричном* внешнем теплообмене (теплообмен на одной из сторон пластины отсутствует) $R = \delta$.



2. Далее рассчитывают критерии Био (Bi) и Фурье (Fo) и по номограммам для теплового центра и поверхности *заданного* тела определяют безразмерные температуры теплового центра Θ_c и поверхности Θ_w (см. рис. 14.2, линия 1):

$$\left. \begin{aligned} Bi &= \frac{\alpha R}{\lambda} \\ Fo_{\text{к}} &= \frac{\alpha \tau_{\text{к}}}{R^2} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{По номограммам}} \Theta_w \text{ и } \Theta_c. \quad (14.5)$$

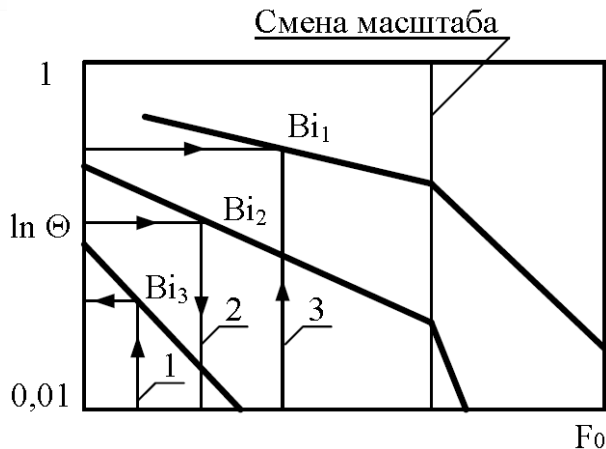


Рис. 14.2

Номограмма для расчета нестационарной теплопроводности при граничных условиях III рода:

1 – прямая постановка задачи $\Theta = f_1(Fo, Bi)$;

2 – обратная постановка задачи $Fo = f_2(\Theta, Bi)$;

3 – обратная постановка задачи $Bi = f_3(\Theta, Fo)$.



3. Затем находят температуры на поверхности и в центре тела по формуле

$$T = T_f - \Theta \cdot (T_f - T_0), \quad (14.6)$$

где $T = T_w$, если $\Theta = \Theta_w$, и $T = T_c$, если $\Theta = \Theta_c$.

4. И в заключение рассчитывают среднюю по массе температуру тела в конце процесса теплопроводности. При допущении параболического распределения температуры по сечению тела формула для расчета среднемассовой температуры имеет вид

$$T_m = T_c + \frac{k}{2 + k} \Delta T, \quad (14.7)$$

где k – коэффициент формы тела; $\Delta T = T_w - T_c$ – перепад температур по сечению тела.



Целью решения обратной задачи теории теплопроводности является определение одного из параметров условий однозначности – времени процесса (τ_k) или коэффициента теплоотдачи (α). Но при этом задана температура теплового центра (T_c) или температура поверхности тела (T_w). Остальные условия однозначности, кроме τ_k или α , – заданные величины.



А. Определение времени нагрева или охлаждения тела

В краткой форме записи обратную постановку задачи по расчету времени процесса теплопроводности записывают в следующем виде.

Дано: δ или d ; Найти: τ_K ;
 T_w либо T_c ; T_c либо T_w ;
 λ, a ; $T_m = \bar{T}(\tau_K)$.
 T_0 ;
 T_f, α .



Алгоритм решения поставленной выше задачи заключается в следующем.

1. Перед началом расчета необходимо определить размер расчетной области R .
2. Далее рассчитывают критерий Био (Bi) и температурный критерий Θ_c или Θ_w в зависимости от того, задана температура T_c или T_w . Затем по номограммам определяют критерий Фурье (см. рис. 14.2, линия 2):

$$\left. \begin{aligned} Bi &= \frac{\alpha R}{\lambda} \\ \Theta &= \frac{T_f - T}{T_f - T_0} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{По номограммам} \\ \longrightarrow \end{array} Fo_k. \quad (14.6)$$



3. Зная критерий Фурье $Fo_K = \frac{a\tau_K}{R^2}$, рассчитывают время процесса теплопроводности по формуле

$$\tau_K = Fo_K \frac{R^2}{a}. \quad (14.8)$$

4. Не заданную по условию задачи температуру T_c либо T_w и среднемассовую температуру тела T_m находят по алгоритму решения прямой задачи.



Б. Определение коэффициента теплоотдачи

В краткой форме записи обратную постановку задачи по расчету времени процесса теплопроводности записывают в следующем виде.

Дано: δ или d ;
 τ_k ;
 λ, a ;
 T_0 ;
 T_f ;
 T_w либо T_c ;

Найти: α ;
 T_c либо T_w ;
 $T_m = \bar{T}(\tau_k)$.



Алгоритм решения поставленной выше **задачи** заключается в следующем.

1. Перед началом расчета необходимо определить размер расчетной области R .
2. Далее рассчитывают критерий Фурье (Fo) и температурный критерий Θ_c или Θ_w в зависимости от того, задана температура T_c или T_w . Затем по номограммам определяют критерий Био (рис. 14.2, линия 3):

$$\left. \begin{aligned} Fo_k &= \frac{a\tau_k}{R^2} \\ \Theta &= \frac{T_f - T}{T_f - T_0} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{По номограммам}} Bi. \quad (14.7)$$



3. Зная критерий Био $Bi = \frac{\alpha R}{\lambda}$, рассчитывают коэффициент теплоотдачи по формуле

$$\alpha = Bi \frac{\lambda}{R}. \quad (14.8)$$

4. Не заданную по условию задачи температуру T_c либо T_w и среднемассовую температуру тела T_m находят по алгоритму решения прямой задачи.



Замечание 1. Информация о температурном поле необходима:

- ✓ для контроля допустимой по технологии температуры тела (судят по значению температур T_c или T_w);
- ✓ для расчета термических напряжений, которые зависят от перепада температур $\Delta T = T_w - T_c$;
- ✓ для расчета теплового баланса по среднemasсовой температуре тела в начале и конце его нагрева или охлаждения.



Замечание 2. Температурное поле тел простой формы в начальный период нагрева или охлаждения ($Fo < \frac{1}{3} k$) при граничных условиях III рода также можно рассчитать по номограммам, приведенным в литературе.