

Лекция 9

СТРУКТУРНАЯ НАДЕЖНОСТЬ СИСТЕМ (3)

Структурная надежность систем

Надежность систем с восстановлением

Для нерезервированных систем восстановление отказавших элементов не изменяет значения вероятности безотказной работы, но приводит к повышению комплексных показателей надежности (например, коэффициента готовности). При резервировании восстановление является одним из действенных методов повышения надежности в целом, в том числе и вероятности безотказной работы.

Для расчета надежности системы с восстановлением чаще всего используется топологический метод с построением графа состояний.

Структурная надежность систем

Надежность систем с восстановлением

Граф состояний технической системы

Граф состояний технической системы (граф переходов)

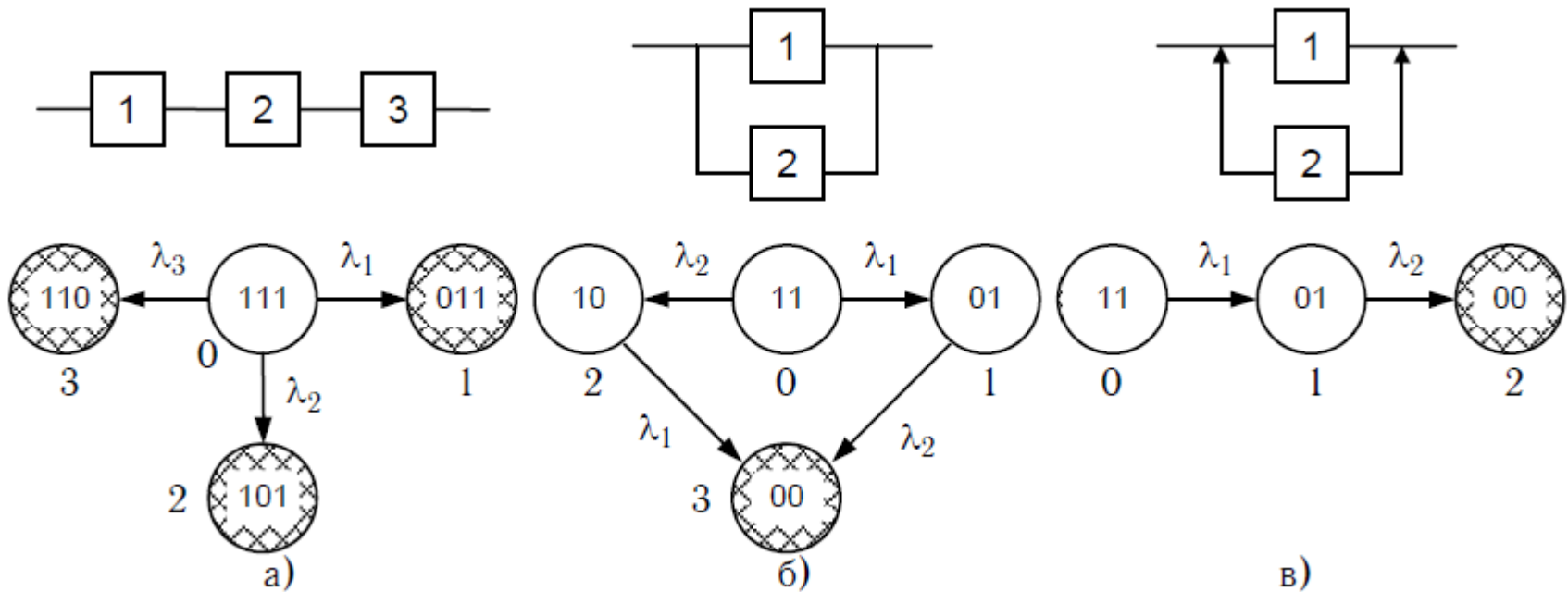
- одна из графических форм математической модели надежности технической системы, в которой возможные состояния системы изображаются в виде точек (*вершин графа*), а возможные направления переходов из одного состояния в другое - в виде стрелок, соединяющих вершины (*ребер графа*).

На рисунке (следующий слайд) представлены типовые графы состояний наиболее часто встречающихся соединений элементов: последовательного, параллельного (или нагруженного резерва) и ненагруженного резерва.

Структурная надежность систем

Надежность систем с восстановлением

Граф состояний технической системы



Типовые графы состояний технических систем:
последовательного (а) и параллельного соединений (б),
ненагруженного резерва (в)

Структурная надежность систем

Надежность систем с восстановлением

Граф состояний технической системы

Вершины графа обозначены кодом, в котором число знаков равно числу элементов, место знака соответствует номеру элемента, работоспособное состояние элемента обозначено цифрой 1, неработоспособное (отказ) - 0. Около ребер графа указаны интенсивности переходов из состояния в состояние (интенсивности отказов элементов).
Неработоспособные состояния системы выделены штриховкой.

Структурная надежность систем

Надежность систем с восстановлением

Граф состояний технической системы

При построении графа состояний необходимо руководствоваться следующими основными правилами:

- ✓ построение начинается с состояния, в котором все элементы системы работоспособны, этой вершине, как правило, присваивается номер 0;
- ✓ каждое последующее состояние получается из предыдущего при отказе одного из элементов системы;

Структурная надежность систем

Надежность систем с восстановлением

Граф состояний технической системы

- ✓ количество последующих состояний равно количеству элементов, которые могут отказать в предыдущем состоянии (считается, что неработающие и неработоспособные элементы отказать не могут);
- ✓ состояния, совпадающие по сочетанию состояний элементов, объединяются в одну вершину графа;
- ✓ новые состояния (вершины графа) добавляются до тех пор, пока все состояния не станут неработоспособными;

Структурная надежность систем

Надежность систем с восстановлением

Граф состояний технической системы

- ✓ все неработоспособные состояния системы являются конечными вершинами графа (считается, что неработоспособная система уже не может отказать), такие состояния и соответствующие им вершины графа для систем без восстановления называются *поглощающими*.

При построении графа состояний целесообразно воспользоваться методом декомпозиции и предварительно построить графы подсистем, в том числе подсистем с резервированием.

Структурная надежность систем

Надежность систем с восстановлением

Граф состояний технической системы

Очевидно, при нагруженном резервировании так же, как и при параллельном соединении элементов, все пути графа подсистемы сходятся к одному конечному состоянию, соответствующему отказу всех элементов подсистемы, а конечные состояния графа основной подсистемы являются начальными состояниями для подсистемы, находящейся в ненагруженном резерве.

Структурная надежность систем

Надежность систем с восстановлением

Расчет надежности систем с восстановлением

При расчете надежности систем с восстановлением с использованием графов состояний необходимо учитывать некоторые особенности системы. В зависимости от назначения и режима применения системы к ней могут предъявляться различные требования. Например, если после включения система должна безотказно работать заданное время и перерывы в работе недопустимы, то для таких систем рассчитывается вероятность непрерывной безотказной работы (условная вероятность безотказной работы).

Структурная надежность систем

Надежность систем с восстановлением

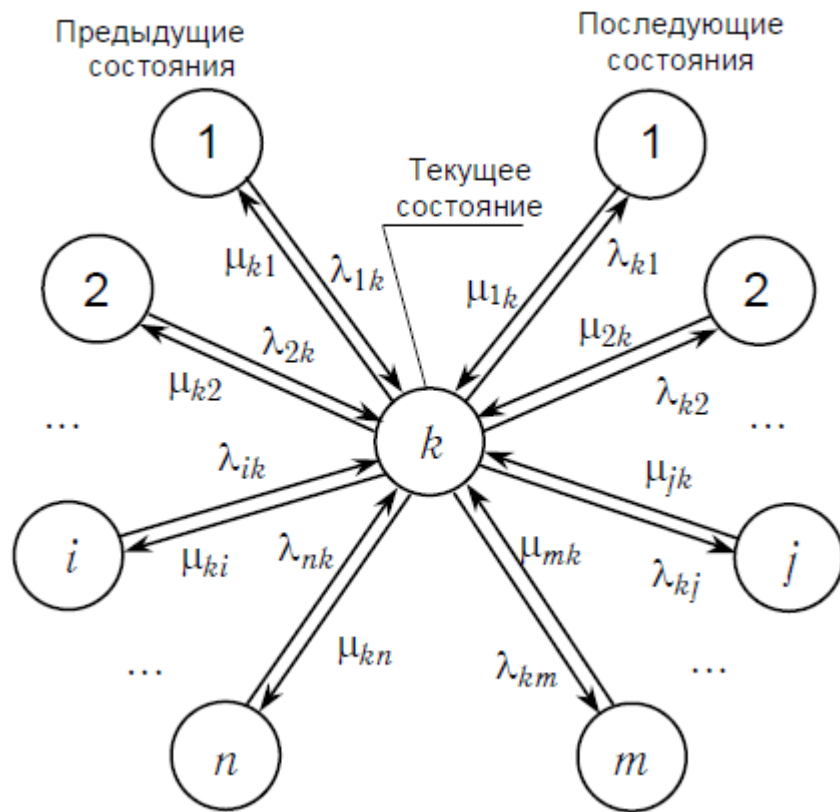
Расчет надежности систем с восстановлением

При этом возможность обратных переходов из неработоспособных (*поглощающих*) состояний в работоспособные не рассматривается. Если же перерывы в работе системы для восстановления элементов допускаются, но вероятность застать систему в работоспособном состоянии в заданный момент времени должна быть достаточно высокой (т.е. большое значение имеет готовность системы к функционированию), то для таких систем определяются коэффициенты готовности или коэффициент оперативной готовности.

Структурная надежность систем

Надежность систем с восстановлением

Расчет надежности систем с восстановлением



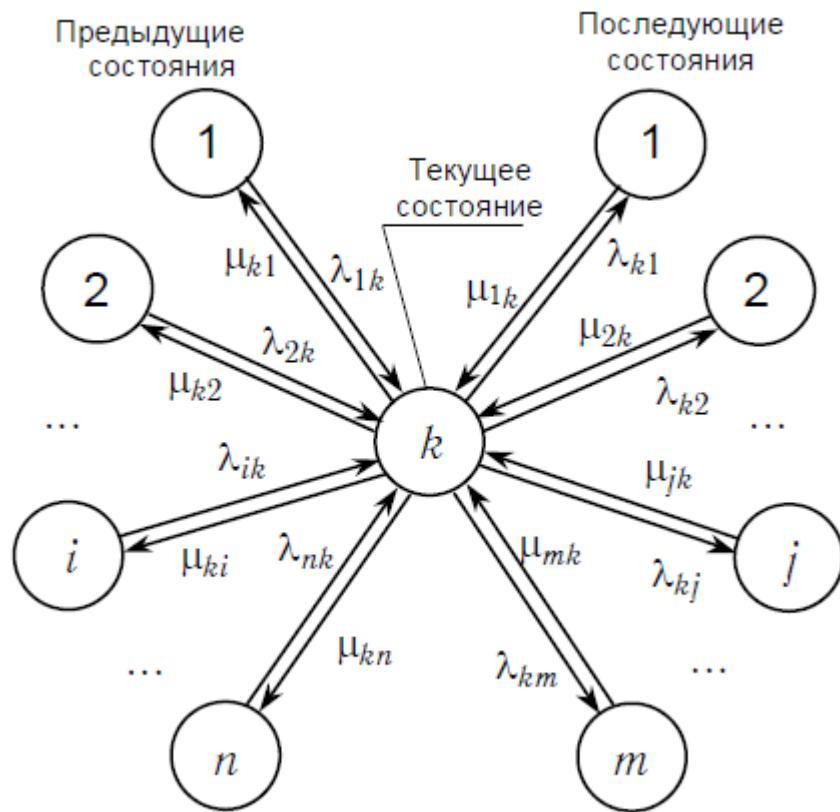
При этом допускается возможность обратных переходов из неработоспособных (в данном случае *отражающих*) состояний в работоспособные.

Пусть для системы известны вероятности всех состояний в момент времени t .

Структурная надежность систем

Надежность систем с восстановлением

Расчет надежности систем с восстановлением

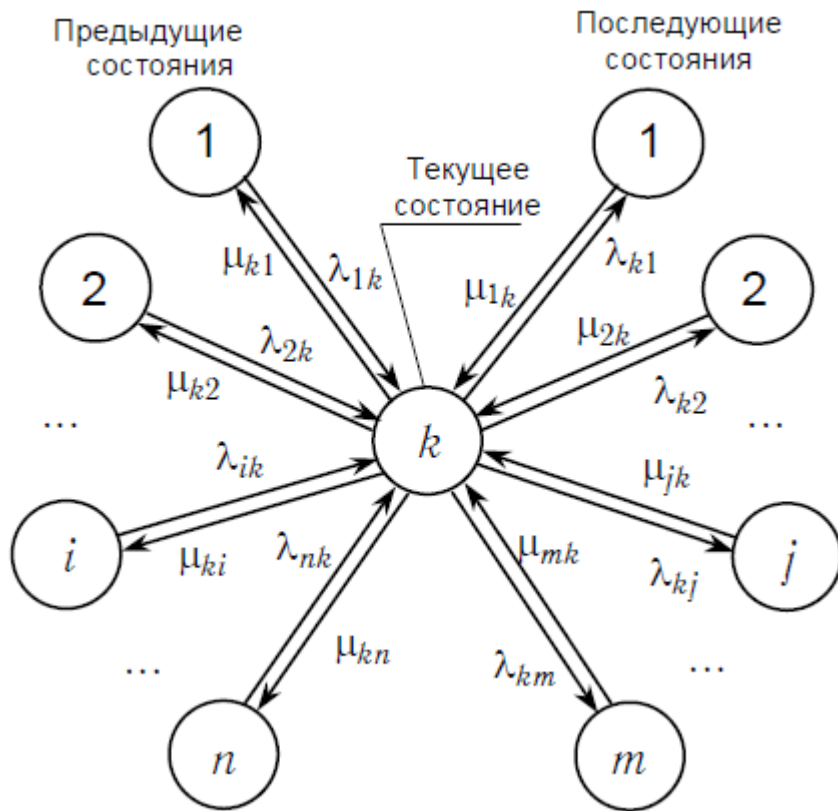


Рассмотрим изменение состояния системы через малый промежуток времени Δt , настолько малый, что вероятность того, что в течение этого времени произойдет более одного события (отказа или восстановления элемента) пренебрежимо мала.

Структурная надежность систем

Надежность систем с восстановлением

Расчет надежности систем с восстановлением



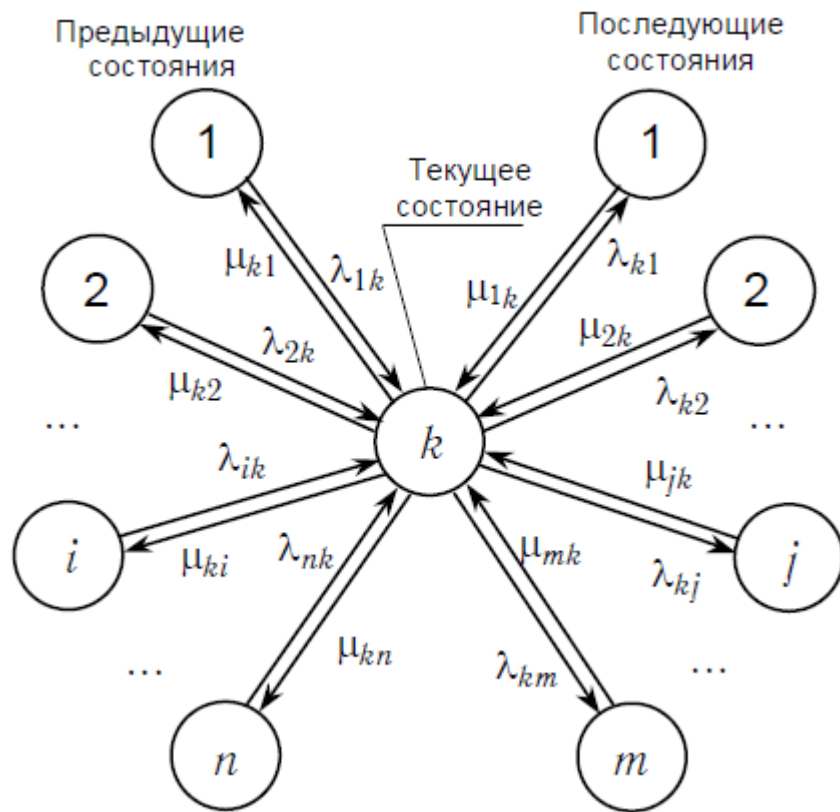
В момент времени $t + \Delta t$ система может находиться в k -м состоянии только в одном из следующих случаев:

1) В момент t система находилась в одном из предыдущих состояний i ($i=1, 2, \dots, n$), и в течение времени Δt отказал один из элементов, т.е. произошел один из переходов $i \rightarrow k$.

Структурная надежность систем

Надежность систем с восстановлением

Расчет надежности систем с восстановлением



Если надежность элементов подчиняется экспоненциальному закону, то вероятность каждого такого перехода

$$\begin{aligned} p_{ik}(t, t + \Delta t) &= q_i(\Delta t) = \\ &= 1 - \exp(-\lambda_{ik}\Delta t) \approx \\ &\approx \lambda_{ik}\Delta t, \end{aligned} \quad (9.1)$$

где q_i и λ_{ik} - вероятность и интенсивность отказов элемента, работоспособность которого определяет прямой переход из i -го состояния в k -е.

Структурная надежность систем

Надежность систем с восстановлением

Расчет надежности систем с восстановлением

2) В момент t система находилась в одном из последующих состояний j ($j=1,2,...,m$), и в течение времени Δt был восстановлен один элемент, т.е. произошел один из обратных переходов $j \rightarrow k$. Если процесс восстановления подчиняется экспоненциальному закону, то вероятность такого перехода

$$\begin{aligned} p_{jk}(t, t + \Delta t) &= p_{vj}(\Delta t) = 1 - \exp(-\mu_{jk}\Delta t) \approx \\ &\approx 1 - (1 - \mu_{jk}\Delta t) = \mu_{jk}\Delta t, \end{aligned} \quad (9.2)$$

где p_{vj} и μ_{jk} - вероятность и интенсивность восстановления элемента, работоспособность которого определяет обратный переход из j -го состояния в k -е.

Структурная надежность систем

Надежность систем с восстановлением

Расчет надежности систем с восстановлением

3) В момент времени t система уже находилась в k -м состоянии, и в течение времени Δt ни один из работоспособных элементов не отказал и ни один из отказавших не был восстановлен, т.е. не состоялись ни прямые ($i \rightarrow k, i=1,2,\dots,n$), ни обратные ($j \rightarrow k, j=1,2,\dots,m$) переходы. Вероятности этих событий, соответственно:

$$\begin{aligned}\bar{p}_{ik}(t, t + \Delta t) &= 1 - p_{ik}(t, t + \Delta t) = 1 - q_i(\Delta t) = \\ &= 1 - [1 - \exp(-\lambda_{ik}\Delta t)] \approx 1 - \lambda_{ik}\Delta t, \quad (9.3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{p}_{jk}(t, t + \Delta t) &= 1 - p_{jk}(t, t + \Delta t) = 1 - p_{vj}(\Delta t) = \\ &= 1 - [1 - \exp(-\mu_{jk}\Delta t)] \approx 1 - \mu_{jk}\Delta t. \quad (9.4)\end{aligned}$$

Структурная надежность систем

Надежность систем с восстановлением

Расчет надежности систем с восстановлением

Здесь q_i и λ_{ik} - вероятность и интенсивность отказов элемента, работоспособность которого определяет прямой переход $i \rightarrow k$, p_{vj} и μ_{jk} - вероятность и интенсивность восстановлений элемента, работоспособность которого определяет обратный переход $j \rightarrow k$.

Чтобы в момент $t + \Delta t$ система оказалась в k -м состоянии, необходимо, чтобы либо состоялся переход первого или второго вида, либо не состоялся ни один из переходов третьего вида.

Структурная надежность систем

Надежность систем с восстановлением

Расчет надежности систем с восстановлением

По теореме сложения вероятностей (для первого и второго случая) и по теореме умножения вероятностей (для третьего) вероятность k -го состояния системы в момент времени $t + \Delta t$

Структурная надежность систем

Надежность систем с восстановлением

Расчет надежности систем с восстановлением

$$\begin{aligned}
 P_k(t + \Delta t) &= \sum_{i=1}^n P_i(t) p_{ik}(t, t + \Delta t) + \sum_{j=1}^m P_j(t) p_{jk}(t, t + \Delta t) + \\
 &+ P_k(t) \left[\prod_{j=1}^m \bar{p}_{kj}(t, t + \Delta t) \prod_{i=1}^n \bar{p}_{ki}(t, t + \Delta t) \right] \approx \\
 &\approx \sum_{i=1}^n P_i(t) \lambda_{ik} \Delta t + \sum_{j=1}^m P_j(t) \mu_{jk} \Delta t + P_k(t) \left[\prod_{j=1}^m (1 - \lambda_{kj} \Delta t) \prod_{i=1}^n (1 - \mu_{ki} \Delta t) \right] \approx \\
 &\approx \Delta t \sum_{i=1}^n \lambda_{ik} P_i(t) + \Delta t \sum_{j=1}^m \mu_{jk} P_j(t) + P_k(t) \left(1 - \Delta t \sum_{j=1}^m \lambda_{kj} \right) \left(1 - \Delta t \sum_{i=1}^n \mu_{ki} \right) \approx \\
 &\approx \Delta t \sum_{i=1}^n \lambda_{ik} P_i(t) + \Delta t \sum_{j=1}^m \mu_{jk} P_j(t) + P_k(t) \left(1 - \Delta t \sum_{j=1}^m \lambda_{kj} - \Delta t \sum_{i=1}^n \mu_{ki} \right)
 \end{aligned}$$

Структурная надежность систем

Надежность систем с восстановлением

Расчет надежности систем с восстановлением

Здесь $P_i(t)$, $P_j(t)$ и $P_k(t)$ - вероятности предыдущих, последующих состояний и k -го состояния в момент времени t .

Из выражения (9.5) можно получить

$$\begin{aligned} \frac{P_k(t + \Delta t) - P_k(t)}{\Delta t} = & \\ = \sum_{i=1}^n \lambda_{ik} P_i(t) + \sum_{j=1}^m \mu_{jk} P_j(t) & \\ - P_k(t) \left(\sum_{j=1}^m \lambda_{kj} + \sum_{i=1}^n \mu_{ki} \right) & \quad (9.6) \end{aligned}$$

Структурная надежность систем

Надежность систем с восстановлением

Расчет надежности систем с восстановлением

Переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $P_k(t)$

$$\frac{dP_k(t)}{dt} = \sum_{i=1}^n \lambda_{ik} P_i(t) + \sum_{j=1}^m \mu_{jk} P_j(t) - P_k(t) \left(\sum_{j=1}^m \lambda_{kj} + \sum_{i=1}^n \mu_{ki} \right) \quad (9.7)$$

Составив для каждого из $N+1$ состояний уравнение вида (9.7), получим систему $N+1$ дифференциальных уравнений. Так как система линейно зависима (сумма правых частей уравнений равна нулю), то для ее решения одно любое уравнение необходимо заменить нормирующим условием

Структурная надежность систем

Надежность систем с восстановлением

Расчет надежности систем с восстановлением

$$\sum_{k=0}^N P_k(t) = 1 \quad (9.8)$$

В качестве начальных условий можно воспользоваться значениями

$$P_0(0) = 1, P_1(0) = P_2(0) = \dots = P_N(0) = 0, \quad (9.9)$$

Нестационарный коэффициент готовности $K(t)$ (*функция готовности* - вероятность работоспособности системы в момент времени t) рассчитывается как сумма вероятностей всех ее работоспособных состояний

Структурная надежность систем

Надежность систем с восстановлением

Расчет надежности систем с восстановлением

$$K(t) = \sum_{k=0}^{N_1} P_k(t), \quad (9.10)$$

где $P_0(t)$ - вероятность начального состояния (при всех работоспособных элементах), $P_k(t)$ - вероятность k -го состояния, N_1 - число работоспособных состояний. При определении коэффициента готовности системы

$$K_{\Gamma} = \frac{T}{T + T_{\text{в}}} = \lim_{t \rightarrow \infty} K(t) \quad (9.11)$$

рассматривается установившийся режим эксплуатации ($t \rightarrow \infty$), при котором производные вероятностей всех состояний системы $P'(t) = 0$.

Структурная надежность систем

Надежность систем с восстановлением

Расчет надежности систем с восстановлением

При этом система дифференциальных уравнений (9.7) сразу превращается в систему линейных алгебраических уравнений вида

$$\sum_{i=1}^n \lambda_{ik} P_i(t) + \sum_{j=1}^m \mu_{jk} P_j(t) - P_k(t) \left(\sum_{j=1}^m \lambda_{kj} + \sum_{i=1}^n \mu_{ki} \right) = 0 \quad (9.12)$$

Для определения условной вероятности безотказной работы из графа состояний и системы уравнений (9.7) исключаются обратные переходы из *поглощающих состояний* (из всех конечных вершин графа).

Структурная надежность систем

Надежность систем с восстановлением

Расчет надежности систем с восстановлением

Метод расчета надежности по графу состояний и приведенные зависимости могут использоваться при экспоненциальных законах распределения наработки и времени восстановления элементов ($\lambda_i = \text{const}$ и $\mu_i = \text{const}$). Если для отказов это допущение оправдано (т.е. расчет производится в предположении, что все элементы находятся в периоде нормальной эксплуатации), то для восстановления оно маловероятно. Однако если средняя наработка элементов значительно больше времени их восстановления (и, соответственно, $\lambda_i \ll \mu_i$), то показатели надежности практически не зависят от характера распределения времени восстановления и допущение можно принять.

Структурная надежность систем

Надежность систем с восстановлением

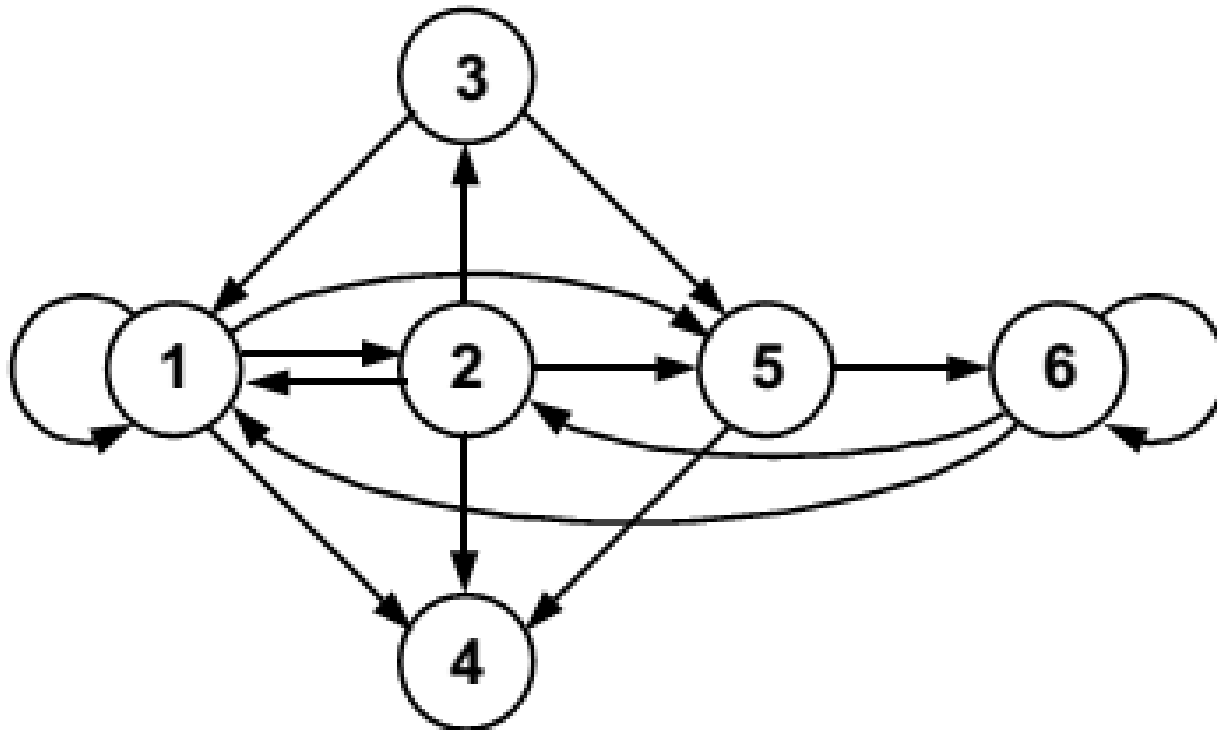
Расчет надежности систем с восстановлением

Кроме того, использование графов позволяет рассчитать параметры надежности систем, элементы которых могут находиться в различных состояниях (кроме работоспособного и неработоспособного), например в состоянии профилактики, технического обслуживания, подготовки и т.д. На следующем слайде показан граф, описывающий практически все возможные варианты организации эксплуатации технического объекта.

Структурная надежность систем

Надежность систем с восстановлением

Расчет надежности систем с восстановлением



Граф многорежимной эксплуатации технического объекта:
1 – хранение; 2 – контроль; 3 – техническое обслуживание;
4 – ремонт; 5 – подготовка к применению; 6 – применение.

Структурная надежность систем

Надежность систем с восстановлением

Расчет надежности систем с восстановлением

Недостатком метода расчета по графу состояний является необходимость анализа большого количества состояний, сложность графа состояний и, соответственно, большой объем вычислений. Если каждый элемент системы может находиться только в двух состояниях (работоспособном и состоянии отказа), то, очевидно, общее количество состояний системы из N элементов равно 2^N и, следовательно, полный граф состояний может содержать 2^N вершин и до $(2^N)^2$ прямых и обратных переходов. Поэтому аналитический путь исследования таких систем не всегда целесообразен.

Структурная надежность систем

Надежность систем с восстановлением

Расчет надежности систем с восстановлением

Уже для систем, модели которых содержат более пяти состояний, конечные аналитические зависимости для вероятностей этих состояний оказываются слишком громоздкими и практически непригодны для дальнейших аналитических исследований и оптимизации (например оптимизации системы технического обслуживания). Кроме того, даже незначительное изменение таких моделей приводит к необходимости нового решения.

Структурная надежность систем

Надежность систем с восстановлением

Расчет надежности систем с восстановлением

Поэтому для больших моделей решение систем уравнений вида (9.7) или (9.12) целесообразно осуществлять в численном виде с использованием основных свойств марковских процессов с непрерывным временем, в том числе и в целях оптимизации характеристик системы технического обслуживания.

В ряде случаев, пользуясь особенностями конкретной системы, технологическими и организационными ограничениями, наложенными на элементы и систему, количество рассматриваемых состояний удастся существенно сократить.

Структурная надежность систем

Надежность систем с зависимыми элементами

Если техническая система содержит элементы, выход из строя которых изменяет показатели надежности других элементов, то расчет ее надежности существенно усложняется.

В общем случае задача об определении надежности таких систем не решена из-за сложности и громоздкости формул и из-за неопределенности условных вероятностей отказа элементов, т.к. их определение требует проведения обширных экспериментальных исследований.

Структурная надежность систем

Статистическое моделирование структурной надежности систем

Статистическое (вероятностно-статистическое) моделирование надежности сложных технических систем методами Монте-Карло заменяет физические исследования математическим анализом надежности систем, сохраняя при этом сущность и характер эксперимента. Показатели надежности системы определяются после статистической обработки результатов моделирования.

Структурная надежность систем

Статистическое моделирование структурной надежности систем

Статистическому моделированию поддаются самые разнообразные технические системы: без восстановления и с восстановлением отказавших элементов, без резервирования и с резервированием, с различными системами технического обслуживания и ремонта и т.д. Статистическое моделирование надежности применяется, как правило, в случаях, когда аналитическое решение задачи затруднено или невозможно.

Структурная надежность систем

Статистическое моделирование структурной надежности систем

Обычными условиями, определяющими необходимость и целесообразность применения статистического моделирования при анализе надежности технических систем, являются сложность структуры системы и многообразие особенностей взаимодействия ее элементов, длительность, сложность, трудоемкость и высокая стоимость физического экспериментального моделирования надежности. Кроме того, необходимыми условиями являются стохастический характер исследуемых процессов и параметров, определенность законов распределения вероятностей случайных параметров элементов системы.

Структурная надежность систем

Статистическое моделирование структурной надежности систем

Практическое использование методов статистического моделирования во многих случаях определяется затратами машинного времени. Это в первую очередь связано с необходимостью обработки большого количества реализаций случайных величин и процессов, определяющих надежность системы. Минимально необходимое количество реализаций, обеспечивающее необходимую точность оценок параметров надежности системы, при статистическом моделировании определяется аналогично физическому моделированию при экспериментальных исследованиях надежности.

Структурная надежность систем

Статистическое моделирование структурной надежности систем

Статистическая модель надежности представляет собой некоторый моделирующий алгоритм, который позволяет имитировать на ЭВМ стохастический процесс функционирования системы как последовательность конечного числа взаимосвязанных элементарных стохастических событий и состояний. В статистических моделях структура и особенности функционирования системы описываются с использованием математического аппарата алгебры логики, а количественная оценка надежности системы осуществляется с применением методов математической статистики.

Структурная надежность систем

Статистическое моделирование структурной надежности систем

Выбор способа моделирования зависит от того, оценки каких характеристик необходимо получить и от заданной точности расчета (обычная точность моделирования - от 0,1 до 1,0 % от оцениваемой величины).

Статистическое моделирование надежности систем включает в себя, как правило, четыре основных этапа: моделирование случайных событий, процессов или случайных величин с заданными законами распределения, построение вероятностных моделей процессов функционирования системы, статистическая оценка результатов моделирования и определение искомых характеристик надежности.

Структурная надежность систем

Статистическое моделирование структурной надежности систем

Соответственно статистические модели надежности включают в себя, как правило, следующие составные части: статистические модели надежности отдельных элементов, логические и математические модели взаимодействия элементов, управляющие алгоритмы, отражающие закономерности протекающих в системе процессов, вычислительные алгоритмы расчета по соответствующим математическим моделям и алгоритмы обработки результатов статистического моделирования.

Структурная надежность систем

Статистическое моделирование структурной надежности систем

Несмотря на большое разнообразие статистических моделей надежности систем и способов их реализации, практически все они содержат следующие основные блоки: блок моделирования реализаций случайных событий, блок моделирования реализаций случайных величин, блок проверки логических условий, блок обработки результатов моделирования и вычисления характеристик. Для сокращения объема вычислений используются различные методы ускоренного моделирования, которые позволяют исключить из рассмотрения маловероятные ситуации и повысить точность расчетов.

Структурная надежность систем

Статистическое моделирование структурной надежности систем

Несмотря на большое разнообразие статистических моделей надежности систем и способов их реализации, практически все они содержат следующие основные блоки: блок моделирования реализаций случайных событий, блок моделирования реализаций случайных величин, блок проверки логических условий, блок обработки результатов моделирования и вычисления характеристик. Для сокращения объема вычислений используются различные методы ускоренного моделирования, которые позволяют исключить из рассмотрения маловероятные ситуации и повысить точность расчетов.