8 СТРУКТУРНАЯ НАДЕЖНОСТЬ СИСТЕМ

8.3 МЕТОДЫ ПОВЫШЕНИЯ СТРУКТУРНОЙ НАДЕЖНОСТИ СИСТЕМ

Для достижения высоких показателей надежности технической системы в первую очередь необходимо проанализировать возможность повышения надежности ее элементов. Эффект увеличения надежности системы тем значительнее, чем сложнее система и чем больше в ней элементов. Однако чаще всего более надежные элементы имеют большие габариты и массу, более сложную собственную структуру и, как правило, более высокую стоимость.

Кроме того, осуществление некоторых методов повышения надежности элементов требует проведения сложных конструктивных, технологических, эксплуатационных и организационных мероприятий.

Поэтому в каждом конкретном случае необходимо соотнести полезный эффект от повышения надежности элемента с затратами на ее осуществление.

Часто, однако, использование методов повышения надежности элементов не дает значительного эффекта или неосуществимо по различным причинам.

В этих случаях повышение надежности технической системы возможно только в результате изменения ее структурной схемы.

Для ряда технических систем возможно повышение надежности за счет сокращения числа элементов.

Например, для системы с последовательным соединением десяти элементов при $p = 0{,}99$ уменьшение числа элементов в два раза уменьшает вероятность ее отказа также примерно в два раза (с 9,6 % до 4,9 %).

Сокращение числа элементов может достигаться за счет упрощения структуры технической системы или совмещения функций нескольких элементов в одном. Однако такой способ повышения надежности системы имеет очень ограниченное применение.

Перестройка структуры технической системы с целью повышения ее надежности, как правило, означает изменение ее функциональной и конструктивной схемы (за исключением структурного резервирования) и возможно лишь в исключительных случаях.

Если конструктивные, технологические, эксплуатационные и организационные мероприятия по повышению надежности системы за счет повышения надежности ее элементов не дают желаемого эффекта или неосуществимы, могут использоваться различные способы резервирования.

Резервирование – применение дополнительных средств и возможностей с целью сохранения работоспособного состояния объекта при отказе одного или нескольких элементов.

К дополнительным средствам и возможностям относятся функциональные, алгоритмические, программные и информационные резервы, использование избытка времени, запасов нагрузочной способности и т.д., а также введение в структуру схемы резервных элементов. В соответствии с этим различаются несколько видов резервирования.

Временное резервирование (с применением резервов времени) реализуется с использованием следующих приемов:

- ✓ увеличение расчетного времени функционирования для выполнения поставленной задачи или выпуска заданного количества продукции;
- ✓ разработка оборудования на большее, чем расчетное, значение производительности;
- ✓ введение в структуру системы промежуточных накопителей;
- ✓ обеспечение функциональной инерционности элементов системы.

Временное резервирование может обеспечить безостановочную работу системы при отказе некоторых элементов на время, необходимое для восстановления (замены). Не изменяя вероятности безотказной работы, временное резервирование улучшает комплексные показатели надежности.

Информационное резервирование (с применением резервов информации) используется в объектах, в которых возникновение отказа приводит к потере или искажению обрабатываемой или передаваемой информации (системы контроля, управления, вычислительная техника и т.д.).

Используются следующие приемы информационного резервирования:

- ✓ многократная передача информации по одному каналу;
- ✓ параллельная передача информации по нескольким каналам;
- ✓ замена полной информации кодированной.

Функциональное резервирование предусматривает использование способности элементов выполнять дополнительные избыточные функции (например, резервирование нескольких специализированных станков одним универсальным).

Нагрузочное резервирование заключается в обеспечении оптимальных запасов способности элементов выдерживать действующие на них нагрузки или введении в объект дополнительных защитных или разгружающих элементов для защиты основных элементов от нагрузок (например, использование коэффициентов запаса прочности, использование предохранительных устройств).

Структурное резервирование (с применением резервных элементов) осуществляется путем введения в структуру объекта дополнительных элементов, выполняющих функции основных в случае их отказа.

8.3.1 Классификация способов структурного резервирования

Классификация различных способов структурного резервирования осуществляется по следующим признакам:

по схеме включения резерва:

- ✓ общее резервирование, при котором резервируется объект в целом;
- ✓ раздельное резервирование, при котором резервируются отдельные элементы или их группы;

по однородности резервирования:

- ✓ однородное резервирование, при котором используется один способ резервирования;
- ✓ смешанное резервирование, при котором сочетаются различные виды резервирования;

по способу включения резерва:

- ✓ постоянное резервирование, при котором при отказе элемента перестройки структуры системы не происходит;
- ✓ динамическое резервирование, при котором при отказе элемента происходит перестройка структуры системы;
- ✓ резервирование замещением, при котором функции основного элемента передаются резервному только после отказа основного;
- ✓ скользящее резервирование, при котором несколько основных элементов резервируются одним или несколькими резервными, каждый из которых может заменить любой основной;
- ✓ фиксированное резервирование, при котором каждый резервный элемент закреплен за одним из основных;
- ✓ скользящее резервирование, при котором несколько основных элементов резервируются одним или несколькими резервными, каждый из которых может заменить любой основной;
- ✓ фиксированное резервирование, при котором каждый резервный элемент закреплен за одним из основных;

по восстановлению работоспособности отказавших элементов:

- ✓ резервирование с восстановлением (восстанавливаемый резерв), при котором работоспособность отказавших резервных элементов восстанавливается без прекращения функционирования всей системы;
- ✓ резервирование без восстановления (невосстанавливаемый резерв), при котором работоспособность элементов не восстанавливается;

по состоянию резерва:

- ✓ нагруженное («горячее») резервирование (нагруженный резерв), при котором резервные элементы находятся в режиме основного элемента;

- ✓ облегченное («теплое») резервирование (облегченный резерв), при котором резервные элементы находятся в менее нагруженном режиме по сравнению с основным;
- ✓ ненагруженное («холодное») резервирование (ненагруженный резерв), при котором резервные элементы до начала выполнения ими функций основного элемента находятся в ненагруженном режиме.

Основной характеристикой структурного резервирования является *кратность* - отношение числа резервных элементов к числу основных, выраженное несокращенной дробью. Резервирование одного основного элемента одним резервным (с кратностью 1:1) называется *дублированием*.

Практически любой вид структурного резервирования сводится к замене одного или группы последовательно соединенных элементов группой с параллельным соединением.

Как уже отмечалось, даже при высокой надежности элементов надежность системы с последовательным соединением оказывается низкой и не превышает надежности самого ненадежного элемента и даже из высоконадежных элементов нельзя создать высоконадежную систему с последовательным соединением. Структурное резервирование позволяет преодолеть это ограничение - увеличивая число резервных элементов, можно создать систему со сколь угодно высокой надежностью.

Повышение надежности в результате резервирования или другой модернизации можно оценить по *коэффициенту выигрыша надежности* - отношению значений показателей надежности до и после преобразования.

В общем случае при выборе элемента (или группы элементов) для повышения надежности или резервирования необходимо исходить из условия обеспечения максимального эффекта.

В качестве критерия эффективности могут использоваться как конструктивные, технологические, производственные или экономические показатели, так и показатели надежности.

8.4 НАДЕЖНОСТЬ СИСТЕМ С РЕЗЕРВИРОВАНИЕМ

Структурное резервирования является одним из основных методов повышения надежности технических систем, который позволяет существенно повышать вероятность безотказной работы.

Расчет количественных характеристик надежности систем с резервированием отдельных элементов или групп элементов определяется видом резервирования.

Следует отметить, что все основные зависимости получены без учета надежности переключающих устройств, обеспечивающих перераспределение нагрузки между основными и резервными элементами (т.е. для случаев «*идеальных*» переключателей). В реальных условиях при резервировании введение

переключающих устройств в структурную схему часто приходится учитывать и расчет системы производить с учетом их надежности.

8.4.1 Нагруженное резервирование

Расчет систем с *нагруженным резервированием* без восстановления осуществляется по формулам последовательного и параллельного соединений элементов аналогично расчету комбинированных систем. При этом считается, что отказ резервной группы, состоящей из основного и резервных элементов, произойдет тогда, когда откажет ее последний элемент, и резервные элементы работают в режиме основных как до, так и после их отказа, поэтому надежность резервных элементов не зависит от момента их перехода из резервного в основное состояние.

Вероятность безотказной работы и вероятность отказа системы или части системы, состоящей из n элементов (одного основного и $n-1$ резервного), без учета надежности переключателей рассчитываются по формулам для параллельного соединения элементов:

$$Q = q_1 q_2 \cdots q_n = \prod_{i=1}^{n} q_i \,, P = 1 - Q =$$

$$= 1 - q_1 q_2 \cdots q_n = 1 - \prod_{i=1}^{n} q_i = \quad 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - p_i) \qquad (8.23)$$

или для одинаковых элементов

$$Q = q^n, \qquad P = 1 - (1 - p)^n. \qquad (8.24)$$

Формулы (8.24) легко разрешаются относительно любой входящей в них величины. Так, число резервных элементов, которое обеспечит минимальную заданную вероятность безотказной работы системы P_{min} при известной вероятности безотказной работы элементов p, можно получить из формулы (8.24):

$$1 - (1 - p)^n \geq P_{min} \rightarrow n \cdot \ln(1 - p) \leq \ln(1 - P_{min}) \rightarrow$$

$$\rightarrow n \geq \frac{\ln(1 - P_{min})}{\ln(1 - p)} \qquad (8.25)$$

Если, наоборот, требуется определить минимальную надежность элементов, которые при заданном числе элементов n обеспечат заданную надежность системы, то

$$P = 1 - (1 - p)^n \geq P_{min} \rightarrow (1 - p)^n \leq 1 - P_{min} \rightarrow p \geq 1 - \sqrt[n]{1 - P_{min}}. \qquad (8.26)$$

Для высоконадежных элементов ($q_i << 1$) при экспоненциальном законе

$$q_i = 1 - \exp(-\lambda_i t) \approx 1 - (1 - \lambda_i t) = \lambda_i t \qquad (8.27)$$

Для расчета системы с нагруженным резервированием можно воспользоваться приближенной формулой

$$Q = q_1 q_2 \cdots q_n \approx \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n t^n = t^n \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \qquad (8.28)$$

или для равнонадежных элементов

$$Q \approx (\lambda t)^n \qquad (8.29)$$

Формулы (8.27) и (8.28) дают верхнюю оценку вероятности отказа с погрешностью не более $\frac{(X_1+X_2+\cdots+X_n)t}{2}$.

Для определения средней наработки можно воспользоваться формулой для системы с параллельным соединением элементов

$$T = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} = t\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} \qquad (8.30)$$

или (при больших значениях n) приближенной формулой

$$T \approx t\left(\ln n + \frac{1}{2n} + C\right), \qquad (8.31)$$

где $C = 0{,}577216$ – постоянная Эйлера.

8.4.2 Ненагруженное резервирование

При *ненагруженном резервировании* (резервировании замещением) резервные элементы включаются в работу при отказе основного, затем первого резервного и т.д., поэтому надежность элементов в каждый момент времени зависит от момента их перехода из резервного состояния в основное. При этом считается, что замена отказавшего элемента резервным происходит мгновенно, отказ системы произойдет тогда, когда откажет последний элемент, в нерабочем состоянии элемент не может отказать и его надежность не изменяется.

Ненагруженное резервирование встречается довольно часто, т.к. оно аналогично замене отказавших элементов (деталей, узлов или агрегатов) на запасные.

Если элементы до включения абсолютно надежны, то для системы из n элементов (одного основного и $n-1$ резервного) при $q_i < 0{,}1$

$$Q \approx \frac{1}{n!}\prod_{i=1}^{n} q_i, \quad P \approx 1 - \frac{1}{n!}\prod_{i=1}^{n}(1-p_i), \qquad (8.32)$$

т.е. вероятность отказа при резервировании замещением в $n!$ раз меньше, чем при нагруженном резервировании. Для идентичных по надежности основного и резервных элементов

$$Q \approx \frac{q^n}{n!},\ P \approx 1 - \frac{1}{n!}(1-p)^n. \qquad (8.33)$$

Если интенсивности отказов основного и резервных элементов постоянны (т.е. надежность подчиняется экспоненциальному закону), то

$$P = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} \exp(-\lambda t). \qquad (8.34)$$

При ненагруженном резервировании средняя наработка на отказ

$$T = \sum_{i=1}^{n} t_i \qquad (8.35)$$

или для идентичных по надежности элементов

$$T = nt,$$

т.е. ненагруженное резервирование позволяет увеличить среднюю наработку в n раз по сравнению с одиночным элементом.

Выигрыш надежности по средней наработке по отношению к нагруженному резерву

$$G_T = \frac{T_{\text{нн}}}{T_{\text{н}}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}} \approx \frac{n}{\ln n + \frac{1}{2n} + C}. \qquad (8.36)$$

Следовательно, выигрыш надежности по средней наработке G_T при ненагруженном резерве тем больше, чем больше кратность резервирования: например, при $n = 2$ $G_T \approx 1{,}3$, а при $n = 10$ $G_T \approx 3{,}4$.

8.4.3 Облегченное резервирование

Облегченное резервирование используется в технических системах при большой инерционности процессов перехода элементов из резервного в основной режим в случаях, когда использовать нагруженное резервирование нецелесообразно из-за недостаточного выигрыша в надежности. При этом считается, что замена отказавшего элемента резервным происходит мгновенно, отказ резервной группы произойдет тогда, когда откажет ее последний элемент, и в состоянии резерва (в облегченном режиме) элемент может отказать и его надежность изменяется.

Очевидно, облегченный резерв занимает промежуточное положение между нагруженным и ненагруженным.

Точные формулы для расчета надежности системы при облегченном резервировании даже с идеальными переключателями довольно громоздки, однако при экспоненциальном законе распределения характеристик надежности элементов можно воспользоваться приближенной формулой

$$P = \frac{t^n}{n!}\lambda(\lambda+\lambda_0)(\lambda+2\lambda_0)\cdots[\lambda+(n-1)\lambda_0] = \frac{t^n}{n!}\prod_{i=0}^{n-1}(\lambda+i\lambda_0), \quad (8.37)$$

где λ_0 – интенсивность отказов элементов в облегченном режиме.

8.4.4 Скользящее резервирование

Скользящее резервирование используется для резервирования нескольких одинаковых (или взаимозаменяемых) элементов системы одним или несколькими резервными, причем резервирование может быть как нагруженным, так и ненагруженным. Отказ системы произойдет, если число отказавших основных элементов превысит число резервных.

При *нагруженном скользящем резервировании* с идеальными переключателями расчет надежности системы аналогичен расчету систем типа «*m* из *n*».

Если интенсивности отказов основных и резервных элементов постоянны и одинаковы, то вероятность безотказной работы системы, содержащей *n* основных и *m* резервных элементов, в режиме нагруженного резерва можно определить по формуле

$$P = \sum_{k=0}^{m} C_{n+m}^{k}\, p^{n+m-k}(1-p)^k. \quad (8.38)$$

Если вероятность безотказной работы элементов подчиняется экспоненциальному закону, то можно рассчитать и среднюю наработку системы:

$$T = \frac{1}{n\lambda} + \frac{1}{(n+1)\lambda} + \cdots + \frac{1}{(n+m)\lambda} = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=n}^{n+m}\frac{1}{k}. \quad (8.39)$$

При *ненагруженном скользящем резервировании* в общем случае характеристики надежности системы выражаются сложными формулами. Однако если интенсивности отказов основного и резервных элементов постоянны и одинаковы, т.е. вероятность безотказной работы элементов подчиняется экспоненциальному закону, то вероятность безотказной работы системы, содержащей *n* основных и *m* резервных элементов, в режиме ненагруженного резерва можно определить по формуле Пуассона

$$P = \sum_{k=0}^{m}\frac{(n\lambda t)^k}{k!}\exp(-n\lambda t). \quad (8.40)$$

Так как при ненагруженном скользящем резервировании суммарная интенсивность отказов равна $n\lambda$ и отказ системы произойдет в момент отказа $(m+1)$-го элемента, то средняя наработка системы

$$T = \frac{m+1}{n\lambda}. \qquad (8.41)$$

8.4.5 Оптимизация структурного резервирования

Структурное резервирование позволяет повысить надежность технической системы практически до любого уровня. Однако на практике часто возможности резервирования ограничиваются имеющимися ресурсами (например, числом элементов или их стоимостью, весом или объемом объекта и т.д.). Поэтому чаще всего ставится задача не максимального увеличения надежности, а обеспечение максимально возможной или достижение заданной надежности системы при минимальных или предельно допустимых затратах, т.е. оптимизация надежности.

Задачи оптимального резервирования отличаются большим разнообразием по постановке, числу и виду наложенных ограничений, однако, как правило, все они сводятся к задачам двух типов: определению числа резервных элементов, обеспечивающих заданную надежность при минимальном расходовании ресурсов (*прямая основная задача оптимизации*), или обеспечивающих максимальную надежность системы при ограниченных ресурсах (*обратная основная задача оптимизации*).

При этом в качестве показателей надежности могут использоваться вероятность безотказной работы, коэффициент готовности, средняя наработка и другие характеристики, а в качестве ресурса – стоимость, масса, габаритные размеры или число элементов.

При отсутствии ограничивающих факторов решение задачи оптимального структурного резервирования сводится, как правило, к определению элемента или элементов, резервирование которых дает максимальное увеличение показателей надежности или коэффициента выигрыша надежности.

Для систем с последовательным соединением элементов для этой цели выбирается самый ненадежный элемент, для систем с более сложной структурой применяются различные методы анализа, в том числе в первую очередь - аналитические.

Кроме того, простейшие задачи оптимального резервирования часто возникают при проектировании промышленного оборудования и технологических линий, когда требуется из нескольких возможных вариантов конструктивного или технологического решения выбрать наилучший (оптимальный).

В этих случаях, как правило, приходится рассчитывать и анализировать все возможные варианты, сравнивать их между собой.

Наличие ограничений усложняет задачу оптимизации и для ее решения применяются более сложные и трудоемкие методы: метод простого перебора, метод неопределенных множителей Лагранжа, градиентные методы (метод

наискорейшего покоординатного спуска), метод максимального элемента, метод динамического программирования, метод ветвей и границ и др.

Метод простого перебора сводится к расчету и сравнению друг с другом всех возможных в рамках наложенных ограничений вариантов резервирования, из которых затем выбирается оптимальный. При большом числе вариантов и для схем со сложной структурой и большим количеством элементов этот метод становится очень трудоемким и требует слишком большого объема вычислений.

Метод неопределенных множителей Лагранжа при решении задач структурной оптимизации достаточно прост и удобен. Однако в более сложных случаях (например, при ненагруженном или облегченном резервировании, при наличии нескольких ограничений и т.д.) его использование не всегда позволяет найти аналитическое решение и поэтому для этого часто приходится использовать численные методы, из-за чего преимущества метода множителей Лагранжа теряются.

В этих случаях может быть целесообразно воспользоваться ***методом наискорейшего спуска***, хорошо приспособленным для нахождения целочисленных решений.

Нахождение оптимальной структуры резервированной системы по методу наискорейшего спуска представляет собой многошаговый процесс, на каждом шаге которого добавляется резервный элемент, который обеспечит наибольшее удельное приращение надежности в расчете на единицу затрат.

Процесс продолжается до тех пор, пока не будет достигнуто требуемое значение вероятности безотказной работы или другой характеристики надежности (при решении прямой задачи оптимизации), или не будет достигнута предельная стоимость технической системы (при решении обратной задачи оптимизации). В качестве начального может рассматриваться как исходное состояние системы, так и какое-либо приближенное к оптимальному, выбранное по дополнительным соображениям исходя из конкретных условий задачи.

Модификацией метода наискорейшего спуска является метод ***максимального элемента***, который используется при решении комплексных задач оптимизации показателей надежности сложных систем.

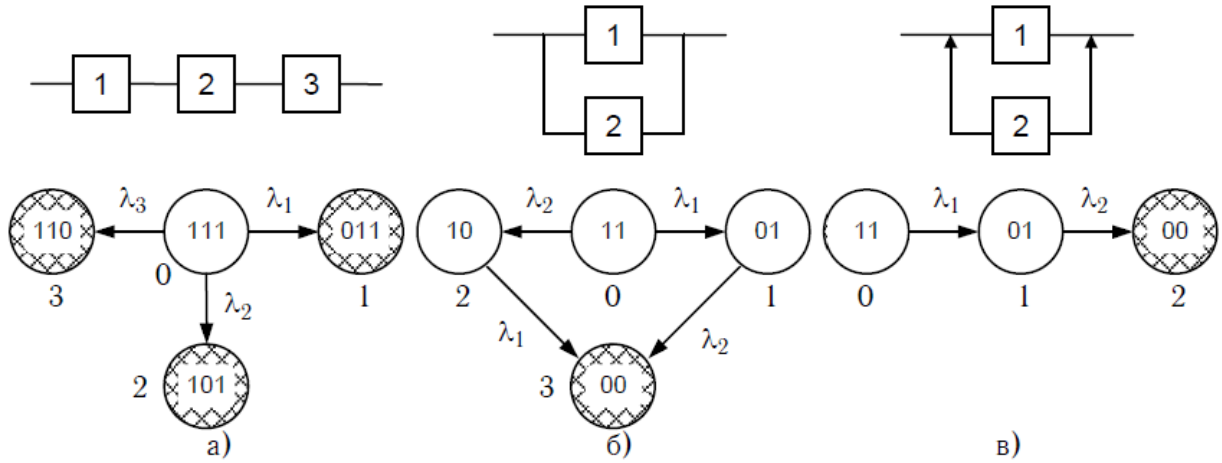
8.5 НАДЕЖНОСТЬ СИСТЕМ С ВОССТАНОВЛЕНИЕМ

Для нерезервированных систем восстановление отказавших элементов не изменяет значения вероятности безотказной работы, но приводит к повышению комплексных показателей надежности (например, коэффициента готовности). При резервировании восстановление является одним из действенных методов повышения надежности в целом, в том числе и вероятности безотказной работы.

Для расчета надежности системы с восстановлением чаще всего используется топологический метод с построением графа состояний.

8.5.1 Граф состояний технической системы

Граф состояний технической системы (граф переходов) - одна из графических форм математической модели надежности технической системы, в которой возможные состояния системы изображаются в виде точек (*вершин графа*), а возможные направления переходов из одного состояния в другое - в виде стрелок, соединяющих вершины (*ребер графа*).



Типовые графы состояний технических систем: последовательного (а) и параллельного соединений (б), ненагруженного резерва (в)

На рисунке представлены типовые графы состояний наиболее часто встречающихся соединений элементов: последовательного, параллельного (или нагруженного резерва) и ненагруженного резерва.

Вершины графа обозначены кодом, в котором число знаков равно числу элементов, место знака соответствует номеру элемента, работоспособное состояние элемента обозначено цифрой 1, неработоспособное (отказ) - 0. Около ребер графа указаны интенсивности переходов из состояния в состояние (интенсивности отказов элементов). Неработоспособные состояния системы выделены штриховкой.

При построении графа состояний необходимо руководствоваться следующими основными правилами:

- ✓ построение начинается с состояния, в котором все элементы системы работоспособны, этой вершине, как правило, присваивается номер 0;
- ✓ каждое последующее состояние получается из предыдущего при отказе одного из элементов системы;

- ✓ количество последующих состояний равно количеству элементов, которые могут отказать в предыдущем состоянии (считается, что неработающие и неработоспособные элементы отказать не могут);
- ✓ состояния, совпадающие по сочетанию состояний элементов, объединяются в одну вершину графа;
- ✓ новые состояния (вершины графа) добавляются до тех пор, пока все состояния не станут неработоспособными;
- ✓ все неработоспособные состояния системы являются конечными вершинами графа (считается, что неработоспособная система уже не может отказать), такие состояния и соответствующие им вершины графа для систем без восстановления называются поглощающими.

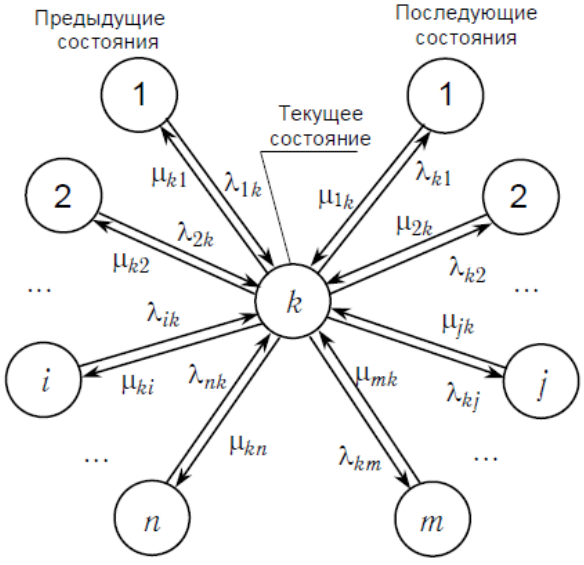
При построении графа состояний целесообразно воспользоваться методом декомпозиции и предварительно построить графы подсистем, в том числе подсистем с резервированием.

Очевидно, при нагруженном резервировании так же, как и при параллельном соединении элементов, все пути графа подсистемы сходятся к одному конечному состоянию, соответствующему отказу всех элементов подсистемы, а конечные состояния графа основной подсистемы являются начальными состояниями для подсистемы, находящейся в ненагруженном резерве.

8.5.2 Расчет надежности систем с восстановлением

При расчете надежности систем с восстановлением с использованием графов состояний необходимо учитывать некоторые особенности системы. В зависимости от назначения и режима применения системы к ней могут предъявляться различные требования. Например, если после включения система должна безотказно работать заданное время и перерывы в работе недопустимы, то для таких систем рассчитывается вероятность непрерывной безотказной работы (условная вероятность безотказной работы).

При этом возможность обратных переходов из неработоспособных (*поглощающих*) состояний в работоспособные не рассматривается. Если же перерывы в работе системы для восстановления элементов допускаются, но вероятность застать систему в работоспособном состоянии в заданный момент времени должна быть достаточно высокой (т.е. большое значение имеет готовность системы к функционированию), то для таких систем определяются коэффициенты готовности или коэффициент оперативной готовности.



При этом допускается возможность обратных переходов из неработоспособных (в данном случае *отражающих*) состояний в работоспособные.

Пусть для системы известны вероятности всех состояний в момент времени t.

Рассмотрим изменение состояния системы через малый промежуток времени Δt, настолько малый, что вероятность того, что в течение этого времени произойдет более одного события (отказа или восстановления элемента) пренебрежимо мала.

В момент времени $t+\Delta t$ система может находиться в k-м состоянии только в одном из следующих случаев:

1) В момент t система находилась в одном из предыдущих состояний i ($i=1,2,...,n$), и в течение времени Δt отказал один из элементов, т.е. произошел один из переходов $i \to k$.

Если надежность элементов подчиняется экспоненциальному закону, то вероятность каждого такого перехода

$$p_{ik}(t, t+\Delta t) = q_i(\Delta t) = 1 - \exp(-\lambda_{ik}\Delta t) \approx \lambda_{ik}\Delta t, \qquad (8.42)$$

где q_i и λ_{ik} – вероятность и интенсивность отказов элемента, работоспособность которого определяет прямой переход из i-го состояния в k-е.

2) В момент t система находилась в одном из последующих состояний j ($j=1,2,...,m$), и в течение времени Δt был восстановлен один элемент, т.е. произошел один из обратных переходов $j \to k$. Если процесс восстановления подчиняется экспоненциальному закону, то вероятность такого перехода

$$p_{jk}(t, t+\Delta t) = p_{вj}(\Delta t) = 1 - \exp(-\mu_{jk}\Delta t) \approx 1 - (1 - \mu_{jk}\Delta t) = \mu_{jk}\Delta t, \qquad (8.43)$$

где $p_{вj}$ и μ_{jk} – вероятность и интенсивность восстановления элемента, работоспособность которого определяет обратный переход из j-го состояния в k-е.

3) В момент времени t система уже находилась в k-м состоянии, и в течение времени Δt ни один из работоспособных элементов не отказал и ни один из отказавших не был восстановлен, т.е. не состоялись ни прямые ($i \to k$, $i=1,2,...,n$), ни обратные ($j \to k$, $j=1,2,...,m$) переходы. Вероятности этих событий, соответственно:

$$\bar{p}_{ik}(t, t+\Delta t) = 1 - p_{ik}(t, t+\Delta t) = 1 - q_i(\Delta t) = \\ = 1 - [1 - \exp(-\lambda_{ik}\Delta t)] \approx 1 - \lambda_{ik}\Delta t, \qquad (7.44)$$

$$\bar{p}_{jk}(t, t+\Delta t) = 1 - p_{jk}(t, t+\Delta t) = 1 - p_{вj}(\Delta t) = \\ = 1 - [1 - \exp(-\mu_{jk}\Delta t)] \approx 1 - \mu_{jk}\Delta t. \qquad (7.45)$$

Здесь q_i и λ_{ik} – вероятность и интенсивность отказов элемента, работоспособность которого определяет прямой переход $i \to k$, $p_{вj}$ и μ_{jk} – вероятность

и интенсивность восстановлений элемента, работоспособность которого определяет обратный переход $j \to k$.

Чтобы в момент $t+\Delta t$ система оказалась в k-м состоянии, необходимо, чтобы либо состоялся переход первого или второго вида, либо не состоялся ни один из переходов третьего вида.

По теореме сложения вероятностей (для первого и второго случая) и по теореме умножения вероятностей (для третьего) вероятность k-го состояния системы в момент времени $t+\Delta t$

$$P_k(t+\Delta t) = \sum_{i=1}^{n} P_i(t) p_{ik}(t, t+\Delta t) + \sum_{j=1}^{m} P_j(t) p_{jk}(t, t+\Delta t) +$$

$$+P_k(t)\left[\prod_{j=1}^{m} \bar{p}_{kj}(t, t+\Delta t) \prod_{i=1}^{n} \bar{p}_{ki}(t, t+\Delta t)\right] \approx$$

$$\approx \sum_{i=1}^{n} P_i(t)\lambda_{ik}\Delta t + \sum_{j=1}^{m} P_j(t)\mu_{jk}\Delta t + P_k(t)\left[\prod_{j=1}^{m}(1-\lambda_{kj}\Delta t)\prod_{i=1}^{n}(1-\mu_{ki}\Delta t)\right] \approx$$

$$\approx \Delta t \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ik} P_i(t) + \Delta t \sum_{j=1}^{m} \mu_{jk} P_j(t) + P_k(t)\left(1-\Delta t \sum_{j=1}^{m} \lambda_{kj}\right)\left(1-\Delta t \sum_{i=1}^{n} \mu_{ki}\right) \approx$$

$$\approx \Delta t \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ik} P_i(t) + \Delta t \sum_{j=1}^{m} \mu_{jk} P_j(t) + P_k(t)\left(1-\Delta t \sum_{j=1}^{m} \lambda_{kj} - \Delta t \sum_{i=1}^{n} \mu_{ki}\right) \quad (8.46)$$

Здесь $P_i(t)$, $P_j(t)$ и $P_k(t)$ – вероятности предыдущих, последующих состояний и k-го состояния в момент времени t.

Из выражения (8.46) можно получить

$$\frac{P_k(t+\Delta t) - P_k(t)}{\Delta t} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ik} P_i(t) + \sum_{j=1}^{m} \mu_{jk} P_j(t) - P_k(t)\left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_{kj} + \sum_{i=1}^{n} \mu_{ki}\right) \quad (8.47)$$

Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $P_k(t)$

$$\frac{dP_k(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ik} P_i(t) + \sum_{j=1}^{m} \mu_{jk} P_j(t) - P_k(t)\left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_{kj} + \sum_{i=1}^{n} \mu_{ki}\right) \quad (8.48)$$

Составив для каждого из $N+1$ состояний уравнение вида (8.48), получим систему $N+1$ дифференциальных уравнений. Так как система линейно зависима (сумма правых частей уравнений равна нулю), то для ее решения одно любое уравнение необходимо заменить нормирующим условием

$$\sum_{k=0}^{N} P_k(t) = 1 \qquad (8.49)$$

В качестве начальных условий можно воспользоваться значениями

$$P_0(0) = 1,\ P_1(0) = P_2(0) = \cdots = P_N(0) = 0, \qquad (8.50)$$

Нестационарный коэффициент готовности $K(t)$ (*функция готовности* - вероятность работоспособности системы в момент времени t) рассчитывается как сумма вероятностей всех ее работоспособных состояний

$$K(t) = \sum_{k=0}^{N_1} P_k(t)\,, \qquad (8.51)$$

где $P_0(t)$ – вероятность начального состояния (при всех работоспособных элементах), $P_k(t)$ – вероятность k-го состояния, N_1 – число работоспособных состояний. При определении коэффициента готовности системы

$$K_г = \frac{T}{T + T_в} = \lim_{t\to\infty} K(t) \qquad (8.52)$$

рассматривается установившийся режим эксплуатации ($t\to\infty$), при котором производные вероятностей всех состояний системы $P'(t) = 0$.

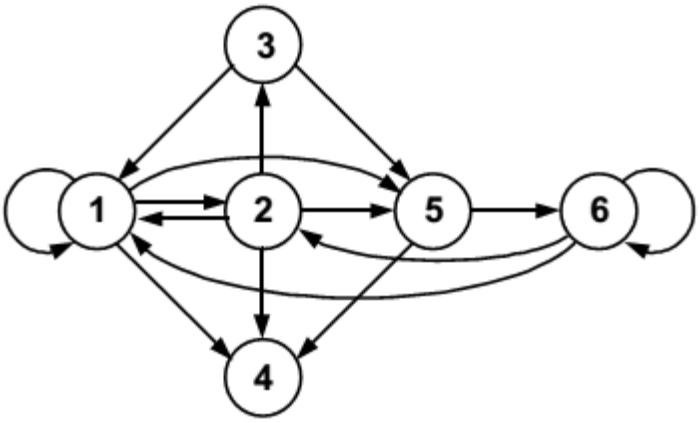
При этом система дифференциальных уравнений (8.48) сразу превращается в систему линейных алгебраических уравнений вида

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_{ik} P_i(t) + \sum_{j=1}^{m} \mu_{jk} P_j(t) - P_k(t)\left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_{kj} + \sum_{i=1}^{n} \mu_{ki}\right) = 0 \qquad (8.53)$$

Для определения условной вероятности безотказной работы из графа состояний и системы уравнений (8.48) исключаются обратные переходы из *поглощающих состояний* (из всех конечных вершин графа).

Метод расчета надежности по графу состояний и приведенные зависимости могут использоваться при экспоненциальных законах распределения наработки и времени восстановления элементов (λ_i=const и μ_i=const). Если для отказов это допущение оправдано (т.е. расчет производится в предположении, что все элементы находятся в периоде нормальной эксплуатации), то для восстановления оно маловероятно. Однако если средняя наработка элементов значительно больше времени их восстановления (и, соответственно, $\lambda_i << \mu_i$), то показатели надежности практически не зависят от характера распределения времени восстановления и допущение можно принять.

Кроме того, использование графов позволяет рассчитать параметры надежности систем, элементы которых могут находиться в различных состояниях (кроме работоспособного и неработоспособного), например, в состоянии профилактики, технического обслуживания, подготовки и т.д. На следующем слайде показан граф, описывающий практически все возможные варианты организации эксплуатации технического объекта.



Граф многорежимной эксплуатации технического объекта:

1 – хранение; 2 – контроль; 3 – техническое обслуживание; 4 – ремонт; 5 – подготовка к применению; 6 – применение.

Недостатком метода расчета по графу состояний является необходимость анализа большого количества состояний, сложность графа состояний и, соответственно, большой объем вычислений. Если каждый элемент системы может находиться только в двух состояниях (работоспособном и состоянии отказа), то, очевидно, общее количество состояний системы из N элементов равно 2^N и, следовательно, полный граф состояний может содержать 2^N вершин и до $(2^N)^2$ прямых и обратных переходов. Поэтому аналитический путь исследования таких систем не всегда целесообразен.

Уже для систем, модели которых содержат более пяти состояний, конечные аналитические зависимости для вероятностей этих состояний оказываются слишком громоздкими и практически непригодны для дальнейших аналитических исследований и оптимизации (например, оптимизации системы технического обслуживания). Кроме того, даже незначительное изменение таких моделей приводит к необходимости нового решения.

Поэтому для больших моделей решение систем уравнений вида (8.48) или (8.53) целесообразно осуществлять в численном виде с использованием основных свойств марковских процессов с непрерывным временем, в том числе и в целях оптимизации характеристик системы технического обслуживания.

В ряде случаев, пользуясь особенностями конкретной системы, технологическими и организационными ограничениями, наложенными на элементы и систему, количество рассматриваемых состояний удается существенно сократить.

8.6 НАДЕЖНОСТЬ СИСТЕМ С ЗАВИСИМЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

Если техническая система содержит элементы, выход из строя которых изменяет показатели надежности других элементов, то расчет ее надежности существенно усложняется.

В общем случае задача об определении надежности таких систем не решена из-за сложности и громоздкости формул и из-за неопределенности условных вероятностей отказа элементов, т.к. их определение требует проведения обширных экспериментальных исследований.

8.7 СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СТРУКТУРНОЙ НАДЕЖНОСТИ СИСТЕМ

Статистическое (вероятностно-статистическое) моделирование надежности сложных технических систем методами Монте-Карло заменяет физические исследования математическим анализом надежности систем, сохраняя при этом сущность и характер эксперимента. Показатели надежности системы определяются после статистической обработки результатов моделирования.

Статистическому моделированию поддаются самые разнообразные технические системы: без восстановления и с восстановлением отказавших элементов, без резервирования и с резервированием, с различными системами технического обслуживания и ремонта и т.д. Статистическое моделирование надежности применяется, как правило, в случаях, когда аналитическое решение задачи затруднено или невозможно.

Обычными условиями, определяющими необходимость и целесообразность применения статистического моделирования при анализе надежности технических систем, являются сложность структуры системы и многообразие особенностей взаимодействия ее элементов, длительность, сложность, трудоемкость и высокая стоимость физического экспериментального моделирования надежности. Кроме того, необходимыми условиями являются стохастический характер исследуемых процессов и параметров, определенность законов распределения вероятностей случайных параметров элементов системы.

Практическое использование методов статистического моделирования во многих случаях определяется затратами машинного времени. Это в первую очередь связано с необходимостью обработки большого количества реализаций случайных величин и процессов, определяющих надежность системы. Минимально необходимое количество реализаций, обеспечивающее необходимую точность оценок параметров надежности системы, при статистическом моделировании определяется аналогично физическому моделированию при экспериментальных исследованиях надежности.

Статистическая модель надежности представляет собой некоторый моделирующий алгоритм, который позволяет имитировать на ЭВМ стохастический процесс функционирования системы как последовательность конечного числа взаимосвязанных элементарных стохастических событий и состояний. В статистических моделях структура и особенности функционирования системы описываются с использованием математического аппарата алгебры логики, а количественная оценка надежности системы осуществляется с применением методов математической статистики.

Выбор способа моделирования зависит от того, оценки каких характеристик необходимо получить и от заданной точности расчета (обычная точность моделирования – от 0,1 до 1,0 % от оцениваемой величины).

Статистическое моделирование надежности систем включает в себя, как правило, четыре основных этапа: моделирование случайных событий, процессов или случайных величин с заданными законами распределения, построение вероятностных моделей процессов функционирования системы, статистическая оценка результатов моделирования и определение искомых характеристик надежности.

Соответственно статистические модели надежности включают в себя, как правило, следующие составные части: статистические модели надежности отдельных элементов, логические и математические модели взаимодействия элементов, управляющие алгоритмы, отражающие закономерности протекающих в системе процессов, вычислительные алгоритмы расчета по соответствующим математическим моделям и алгоритмы обработки результатов статистического моделирования.

Несмотря на большое разнообразие статистических моделей надежности систем и способов их реализации, практически все они содержат следующие основные блоки: блок моделирования реализаций случайных событий, блок моделирования реализаций случайных величин, блок проверки логических условий, блок обработки результатов моделирования и вычисления характеристик. Для сокращения объема вычислений используются различные методы ускоренного моделирования, которые позволяют исключить из рассмотрения маловероятные ситуации и повысить точность расчетов.

8.7.1 Моделирование надежности систем при внезапных отказах

Статистическое моделирование надежности систем при внезапных отказах позволяет рассчитать основные показатели надежности при любых распределениях характеристик надежности элементов и их сочетаниях, при любых структурных схемах надежности систем.

В этом случае рассматриваются потоки событий (отказы и восстановления) отдельных элементов и влияние этих событий на надежность системы в целом.

Поэтому сущность метода заключается в формировании потоков событий в соответствии с заданными законами распределения, анализе влияния этих событий на работоспособность системы, формировании потоков событий системы, статистической обработке полученных результатов и вычислении искомых параметров надежности.

Конкретный алгоритм реализации метода в значительной степени зависит от структурной схемы надежности, возможности восстановления работоспособности элементов и законов распределения параметров надежности элементов и многих других особенностей системы.

Метод целесообразно использовать, если потоки отказов элементов отличаются от простейших (т.е. при переменной интенсивности отказов) и для сложных технических систем с восстановлением.

8.7.2 Моделирование параметрической надежности систем

Статистическое моделирование параметрической надежности технических систем позволяет определить статистическую оценку попадания параметров системы в заданное поле допуска.

В этом случае искомые характеристики определяются в результате статистической обработки множества значений определяющих параметров системы, рассчитанных по множествам возможных значений параметров элементов.

Поэтому статистическое моделирование состоит, как правило, из трех этапов: моделирования законов распределения параметров элементов, определения параметров системы, статистической обработки полученных результатов и расчета характеристик надежности.

В зависимости от постановки задачи статистическая обработка результатов моделирования может заключаться в определении относительного числа попаданий рассчитанных значений параметров в заданное поле допуска.

Если работоспособность системы определяется несколькими параметрами, то статистическое исследование необходимо проводить по каждому из них, «удачными» при этом считаются реализации, при которых все определяющие параметры попадают в поле допуска.

Метод статистических испытаний позволяет проводить исследование системы при любых законах распределения параметров элементов.