

7 МОДЕЛИ НАДЕЖНОСТИ

7.2 ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МОДЕЛИ ОТКАЗОВ ЭЛЕМЕНТОВ

Выбор адекватной вероятностной модели надежности элементов возможен на основании анализа физических процессов, происходящих в объекте при его эксплуатации. Поэтому, хотя второй этап определения показателей надежности (оценка параметров модели) предусматривает проверку адекватности модели по экспериментальным данным, критерии согласия не всегда позволяют однозначно выбрать модель. В ряде случаев для этого, прежде всего, необходимо учитывать физическую природу отказов и характер течения физических процессов.

Для оценки надежности различных по назначению элементов могут быть рассмотрены модели отказов двух основных типов: «нагрузка – прочность» (*прочностная надежность*) и «параметр – поле допуска» (*параметрическая надежность*). В обоих случаях элемент считается работоспособным, пока его основные характеристики (определяющие параметры) в процессе эксплуатации не достигнут предельных значений (границ рабочей области) и между моделями этих двух видов имеются только методологические различия. Однако если в первом случае имеют место в основном внезапные отказы (практически мгновенное нарушение работоспособности), то во втором - в основном постепенные (достаточно плавное «сползание» параметров к границе допустимых значений).

7.2.1 ПРОЧНОСТНАЯ НАДЕЖНОСТЬ (МОДЕЛЬ ВНЕЗАПНЫХ ОТКАЗОВ)

Прочность – свойство материала элемента сопротивляться разрушению или изменению формы и свойств под действием внешних или внутренних нагрузок различной физической природы и сохранять в заданных пределах значения всех характеристик. Параметрами прочности являются пределы прочности (механической, электрической, тепловой и т.д.), пределы текучести, ползучести, выносливости и другие характеристики материалов.

Отказы по параметрам прочности могут быть связаны с разрушением элемента, недопустимыми деформациями или резким изменением механических, электрических, тепловых и других свойств материала вследствие дефектов материала или в результате однократных или многократных статических или динамических перегрузок.

Надежность по параметрам прочности (прочностная надежность) – свойство элемента сохранять работоспособное состояние под воздействием внешних нагрузок.

Показателями надежности по параметрам прочности могут быть средняя наработка до отказа или вероятность безотказной работы элемента. Показатели прочностной надежности определяются в зависимости от принятых критериев предельного состояния. Критериями предельного состояния по параметрам прочности могут быть определенное число циклов нагружения или накопление определенной величины остаточных изменений параметров, другие характеристики элемента.

В общем случае отказ элемента по параметрам прочности возникает тогда, когда уровень внешних воздействий (механических, тепловых, электрических и т.д.) превысит запас его прочности. При этом внезапные отказы являются следствием того, что отдельные элементы имеют запас прочности ниже допустимого и не могут противостоять случайным всплескам нагрузок, возникающим в реальных условиях эксплуатации. Постепенные отказы происходят в результате уменьшения прочности элемента (механической, тепловой, электрической и т.д.) вследствие естественных процессов старения или износа материалов.

Оценка надежности элементов технических систем с учетом характеристик и особенностей внешних нагрузок и запаса прочности и их изменения во времени должна отражать физическую сущность процессов и явлений, происходящих в элементе, и требует гораздо меньшего по сравнению со статистическими методами объема вычислений. Кроме того, при таком подходе появляется гораздо больше возможностей учета свойств элементов, нагрузок и условий работы, в том числе при крайних допустимых предельных значениях.

Несмотря на очевидные преимущества такого подхода, в настоящее время расчет прочности элементов часто проводится по упрощенным методикам, иногда чисто интуитивно.

Появление внезапных отказов и изменение характеристик элементов технических систем всегда обусловлено определенными физическими причинами. Например, разрыв троса или механическое разрушение детали являются следствием превышения приложенной к ним нагрузки допустимой прочности.

Элементы радиоэлектронной аппаратуры могут потерять работоспособность вследствие перегрузки (короткого замыкания, разрыва цепи, резкого изменения параметров элемента и т.д.). Поэтому при проектировании и изготовлении технических устройств всегда стремятся обеспечить достаточный запас работоспособности (разность между допустимой для данного элемента прочностью и приложенной к нему нагрузкой) или коэффициент запаса прочности (отношение этих величин).

Нагрузки, которые испытывают элементы различных технических систем, можно разделить на внешние и внутренние. *Внешние нагрузки* возникают вне самого элемента независимо от его функционирования и определяют

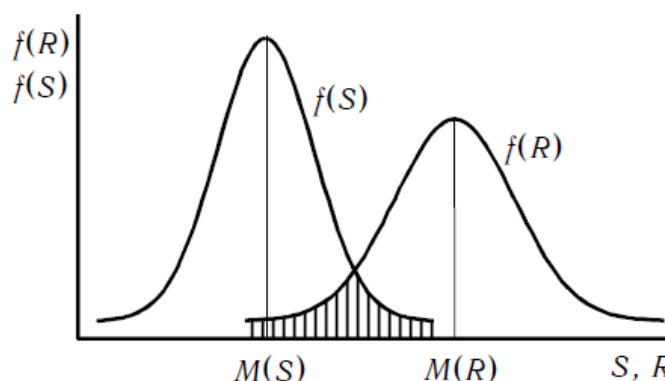
ся условиями работы (механическими, климатическими, радиационными, акустическими и т.д.). **Внутренние нагрузки** возникают в самом элементе и связаны с ошибками при конструировании, производстве и эксплуатации (локальные напряжения, перегревы, уходы параметров, физико-химические изменения в структуре элемента и т.д.).

Внутренние нагрузки зависят как от особенностей строения и эксплуатации технических объектов, так и от параметров внешних нагрузок. Следует отметить, что принадлежность конкретных условий работы элемента к внешним или внутренним нагрузкам определяется постановкой задачи исследования: например, изменение температуры окружающей среды – внешняя нагрузка, а местный перегрев из-за ошибок в конструкции – внутренняя, механические усилия, возникающие при взаимодействии элементов системы, для системы в целом являются внутренними нагрузками, а для отдельного элемента системы – внешними и т.д.

В реальных условиях при изготовлении и эксплуатации практически всегда наблюдаются разбросы фактических значений прочности, внешних и внутренних нагрузок, прочность и нагрузки являются величинами достаточно случайными. Эти разбросы связаны с особенностями проектирования, изготовления и применения элементов, строением и структурой конструкционных материалов, многими другими причинами.

Характеристики распределений прочности и нагрузки могут быть получены аналитическими или экспериментальными методами с использованием методов математической статистики.

Для наглядности кривые плотности вероятности нагрузки $f(S)$ и прочности $f(R)$ удобно совместить на одном графике.



Работоспособность элемента будет обеспечена, если нагрузка не будет превышать нижнего предела диапазона прочности. На практике при расчетах элементов различных технических систем часто ограничиваются введением коэффициента запаса прочности, который равен отношению математических ожиданий (или средних значений) величин прочности и нагрузки:

$$K = \frac{M(R)}{M(S)}.$$

На самом деле очевидно, что при сравнительно большом разбросе возможных значений величин нагрузки и прочности существует вероятность отказа элемента по параметру прочности даже при сравнительно большом значении коэффициента запаса прочности K .

Состояние элемента по условию прочности может считаться безотказным, если нагрузка S не превышает прочности элемента R , и тогда вероятность безотказной работы элемента при известных законах распределения S и R равна вероятности этого события:

$$P = p(R > S_i) = \int_{S_i}^{\infty} f(R) dR. \quad (7.26)$$

В общем случае вероятность безотказной работы при всех возможных значениях нагрузки может быть определена по распределению случайной величины запаса прочности $L = R - S$, которая представляет собой композицию законов распределения:

$$P = p(R > S) = p(L > 0) = \int_{M(R)-M(S)}^{\infty} f(L) dL. \quad (7.27)$$

Если нагрузка и прочность распределены по нормальному закону, то запас прочности (их композиция) распределен также по нормальному закону

$$f(L) = \frac{1}{\sigma_L \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(L - M(L))^2}{2\sigma_L^2} \right] \quad (7.28)$$

с математическим ожиданием и средним квадратическим отклонением

$$M(L) = M(R) - M(S); \sigma_L = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}, \quad (7.29)$$

где $M(R)$ и $M(S)$ – математические ожидания прочности и нагрузки; σ_R и σ_S – их средние квадратические отклонения.

Тогда вероятность безотказной работы определяется формулой

$$P = p(L > 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \int_0^{\infty} \exp \left\{ -\frac{[L - (M(R) - M(S))]^2}{2(\sigma_R^2 + \sigma_S^2)} \right\} dL \quad (7.30)$$

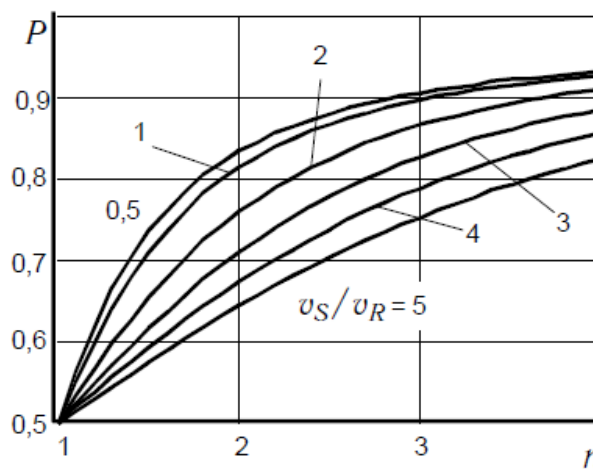
или, с использованием нормированной функции Лапласа $\Phi(z)$

$$P = \frac{1}{2} + \Phi(z) = \frac{1}{2} + \Phi \left(\frac{M(R) - M(S)}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \right). \quad (7.31)$$

Формулу (7.31) можно записать через коэффициент запаса прочности $K = \frac{M(R)}{M(S)}$ и коэффициенты вариации нагрузки $v_S = \frac{\sigma_S}{M(S)}$ и прочности $v_R = \frac{\sigma_R}{M(R)}$:

$$P = \frac{1}{2} + \Phi \frac{K - 1}{\sqrt{K v_R^2 + v_S^2}}. \quad (7.32)$$

Зависимости вероятности безотказной работы элемента по параметрам прочности от значения коэффициента запаса прочности при различных отношениях коэффициентов вариации нагрузки и прочности представлены на следующем рисунке.



Зависимость вероятности безотказной работы элемента от коэффициента запаса прочности ($v_R = 0,5$)

Вероятностные расчеты прочности позволяют учесть случайный характер нагрузок и свойств элементов, перейти от оценки прочности по коэффициентам запаса к оценке вероятности безотказной работы и прогнозированию ресурса. Однако использование вероятностных критериев и получение дополнительной исходной информации о прочности и нагрузках значительно усложняют расчет. Поэтому перед проведением расчетов целесообразно ограничить номенклатуру элементов (деталей, узлов, конструкций и т.д.), для которых вероятностный расчет необходим.

К числу таких элементов можно отнести элементы, надежность которой лимитирует надежность всей системы, элементы с небольшими коэффициентами запаса прочности (запас прочности можно считать достаточным, если выполняется условие $L = R - S > 3(\sigma_R + \sigma_S)$, при этом вероятность безотказной работы $P > 0,999$), элементы, *испытывающие* нагрузки с широким диапазоном значений, элементы с нестабильными свойствами и характеристиками прочности.

7.2.2 ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ НАДЕЖНОСТЬ (МОДЕЛЬ ПОСТЕПЕННЫХ ОТКАЗОВ)

В моделях типа «параметр – поле допуска» (*кумулятивных моделях*) рассматривается результат действия нагрузок в виде изменений физических параметров элементов технических систем. Каждый элемент можно характеризовать каким-либо *определяющим параметром* X , который служит мерой качества этого элемента (в общем случае определяющий параметр может быть векторным, т.е. иметь несколько составляющих).

Параметр X под воздействием случайных и детерминированных факторов (процессов износа, старения, разрегулирования и т.д.) изменяется в процессе эксплуатации (или хранения) элемента и в конце концов достигает предельного (критического) значения, после чего состояние элемента считается неработоспособным, т.е. происходит отказ. Область изменения параметра, в пределах которой состояние элемента считается работоспособным, называется *рабочей областью* или *полем допуска*.

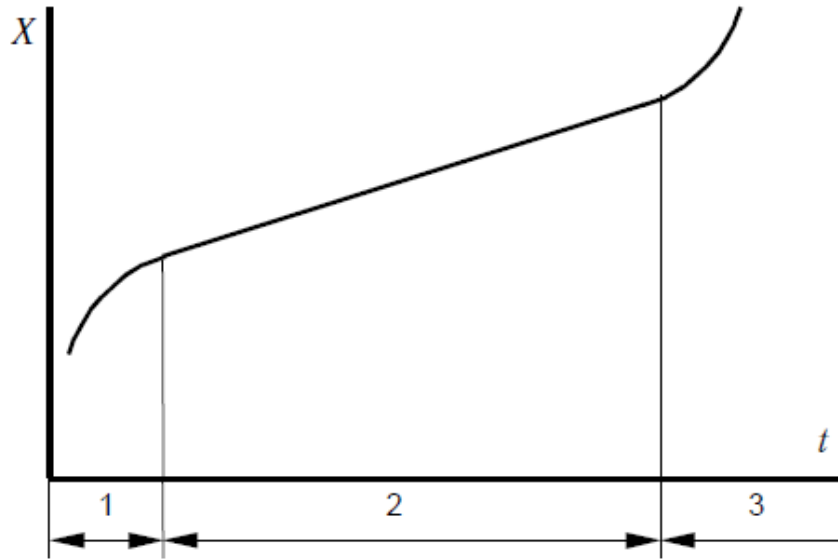
Скорость изменения определяющего параметра $\gamma = \frac{dx}{dt}$ может быть определена экспериментально или на основании анализа моделей физико-химических процессов, происходящих в элементе при эксплуатации.

Процесс изменения определяющего параметра элемента можно, как правило, разделить на три периода. В первом периоде происходит приработка элемента, под действием внешних воздействий и внутренних процессов происходит его приспособление к конкретным условиям эксплуатации, и скорость изменения параметров обычно довольно велика. К концу периода приработки скорость, как правило, уменьшается и на протяжении достаточно продолжительного второго (основного) периода остается примерно постоянной. В процессе эксплуатации в элементе происходят различные необратимые процессы и наступает последний, третий, период (износа и старения), в стремительно растет и в конце периода происходит отказ или элемент снимается с эксплуатации.

Период приработки обычно составляет несколько процентов от общего времени эксплуатации. Кроме того, иногда приработка осуществляется на заводе-изготовителе. С другой стороны, обычно элементы проектируются и изготавливаются с расчетом только на второй (основной) период, и их эксплуатация в третьем периоде не выгодна и часто недопустима. Поэтому можно считать, что для большинства элементов скорость изменения определяющих параметров постоянна на всем периоде их эксплуатации:

$$X = X_0 + \gamma t. \quad (7.33)$$

Средняя наработка элемента до отказа T (или средний ресурс, или срок службы) является функцией двух независимых случайных величин: начального значения параметра X_0 и скорости его изменения γ .



Очевидно

$$T = \frac{X_{\text{пр}} - X_0}{\gamma} \quad (6.34)$$

(здесь и далее предполагается, что $X_0 < X_{\text{пр}}$, хотя возможен и обратный случай, когда величина определяющего параметра имеет ограничение снизу, однако модель отказа при этом принципиально не изменится).

Если аргументы X_0 и γ распределены по нормальному закону с математическими ожиданиями $M(X_0) = \bar{X}_0$ и $M(\gamma) = \bar{\gamma}$ и средними квадратическими отклонениями σ_{X_0} и σ_γ , то и параметр X в момент времени t также будет распределен по нормальному закону с математическим ожиданием и средним квадратическим отклонением

$$\begin{aligned} M(X) &= \bar{X} = M(X_0) + M(\gamma)t = \bar{X}_0 + \bar{\gamma}t, \\ \sigma_X &= \sqrt{\sigma_{X_0}^2 + (\sigma_\gamma t)^2}. \end{aligned} \quad (7.35)$$

Учитывая, что вероятность безотказной работы элемента $P(t)$ равна вероятности того, что в течение времени t параметр X не выйдет за заданное значение X_{max} , получим

$$P(t) = p(X \leq X_{\text{max}}) = \frac{1}{2} + \Phi \left[\frac{X_{\text{max}} - (\bar{X}_0 + \bar{\gamma}t)}{\sqrt{\sigma_{X_0}^2 + (\sigma_\gamma t)^2}} \right]. \quad (7.36)$$

В более общем случае, если математическое ожидание $\bar{\gamma}$ и среднее квадратическое отклонение σ_γ скорости изменения параметра X также являются функциями времени (т.е. изменение параметра происходит не по линейному закону (7.33)), формулу (7.36) можно записать в виде

$$P(t) = \frac{1}{2} + \Phi \left\{ \frac{X_{max} - [\bar{X}_0 + \bar{\gamma}(t)t]}{\sqrt{\sigma_{X_0}^2 + [\sigma_{\gamma}(t)t]^2}} \right\}. \quad (7.37)$$

В наиболее простых случаях аналогичный анализ изменения определяющего параметра в процессе эксплуатации элемента может быть проведен и при других законах распределения параметров X_0 и γ , в том числе и при двухстороннем ограничении определяющего параметра. При более сложных или эмпирических законах распределения для получения функции $P(t)$ можно использовать методы компьютерного статистического моделирования.

7.2.3 ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ ТЕХНИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ К УСЛОВИЯМ ЭКСПЛУАТАЦИИ

Еще одной разновидностью модели надежности можно считать зависимость ее характеристик от условий применения, в частности от испытываемых нагрузок. Например, наработка объекта до отказа или между отказами T конкретного технического объекта, очевидно, является случайной функцией случайной нагрузки S :

$$T = F(S). \quad (7.38)$$

Зависимость (7.38) позволяет одновременно учитывать случайный характер нагрузки и случайные характеристики самого технического объекта.

Сравнивать различные технические объекты по наработке до отказа можно лишь в случае, если они находятся в одинаковых условиях. Для изделий определенного назначения при испытаниях целесообразно принять стандартные условия испытаний с нагрузкой, близкой к математическому ожиданию типичных нагрузок. Если стандартное значение нагрузки принять за начало отсчета, то случайную нагрузку можно представить в виде

$$S = S_0 + \Delta S. \quad (7.39)$$

Здесь S_0 - стандартная неслучайная нагрузка; ΔS - случайное отклонение нагрузки от стандартного значения.

Разложив функцию (7.38) в ряд Тейлора в окрестностях точки S_0 , ограничившись только тремя первыми членами, получим

$$T \approx T_0 + \left(\frac{\partial T}{\partial S} \right)_{S=S_0} \Delta S + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial S^2} \right)_{S=S_0} (\Delta S)^2 = T_0 + U_1 \Delta S + U_2 (\Delta S)^2, \quad (7.40)$$

где T_0 - случайное время безотказной работы при стандартной нагрузке S_0 ;

$$\Delta S = S - S_0;$$

$$U_1 = \frac{\partial T}{\partial S} \text{ и } U_2 = \frac{\partial^2 T}{\partial S^2} - \text{значения производных в окрестностях точки } S = S_0.$$

В формуле (7.40) случайные величины T_0 , U_1 и U_2 характеризуют технический объект, а случайная величина ΔS – отклонение случайной нагрузки от стандартной.

Случайные величины U_n иногда называют *чувствительностью n -го порядка к нагрузке*. Применив к зависимости (7.40) теоремы о числовых характеристиках случайных величин, получим выражение для математического ожидания наработки (средней наработки)

$$M(T) = M(T_0) + M(U_1)M(\Delta S) + \frac{1}{2}M(U_2)[M^2(\Delta S) + \sigma_S^2], \quad (7.41)$$

где $M(T_0)$ – средняя наработка при стандартной нагрузке (стандартная средняя наработка); $M(U_1) = dM(T)/dS$ и $M(U_2) = d_2M(T)/dS^2$ – значения производных средней наработки по нагрузке при $S = S_0$ (средние чувствительности к нагрузке); $M(\Delta S)$ и σ_S – среднее значение (математическое ожидание) и среднее квадратическое отклонение отклонения нагрузки от стандартной.

Таким образом, надежность технического объекта можно приближенно характеризовать величинами, не зависящими от условий эксплуатации: стандартной средней наработкой $M(T_0) = T_{cp0}$ и средними чувствительностями к нагрузке первого и второго порядков $M(U_1) = U_{cp1}$ и $M(U_2) = U_{cp2}$.

7.3 СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАДЕЖНОСТИ

Приведенные модели отказов являются формализованными описаниями процессов потери элементом работоспособности. Они позволяют установить функциональные связи характеристик элемента с происходящими в нем при эксплуатации процессами и параметрами надежности в некоторых простейших случаях. Статистическая природа этих закономерностей проявляется в том, что аргументы функций являются случайными величинами и зависят от большого числа факторов.

Если случайные величины, значения которых оказывают определяющее влияние на работоспособность элемента (начальное значение параметра X_0 , время начала процессов износа или старения t_0 , скорость изменения параметра γ) распределены по более сложным законам или являются дискретными случайными величинами, или надежность элемента определяется воздействием еще и других случайных факторов (например, параметров окружающей среды, характеристик обрабатываемых материалов и т.д.), то аналитический расчет надежности становится практически неразрешимой задачей.

В этих случаях для прогнозирования поведения элементов целесообразно воспользоваться *методами статистического имитационного моделирования*, в частности *методом Монте-Карло*, который является практи-

чески универсальным методом определения закона распределения параметров состояния технических объектов и расчета надежности по известным законам распределения влияющих на него случайных величин.

7.3.1 Метод Монте-Карло

Основная идея метода Монте-Карло заключается в многократном расчете определяющего параметра (или параметров) по известным зависимостям, описывающим процесс потери работоспособности, причем для случайных аргументов, входящих в расчетные формулы, перебираются их наиболее вероятные значения в соответствии с известными законами распределения. Таким образом, каждое статистическое испытание заключается в выявлении одной из реализаций случайного процесса, а их совокупность позволяет оценить ход этого процесса и его основные параметры.

В общем случае можно считать, что значение определяющего параметра X определяется набором случайных величин Z_i ($i=1,2,...,n$), законы распределения которых известны (или дискретные значения которых заданы своими вероятностями), т.е.

$$X = X(Z_1, Z_2, \dots, Z_n), \quad (7.42)$$

причем зависимость (7.42) может быть задана как одной или несколькими расчетными формулами, так и алгоритмом, таблицей, графиком и т.д.

Так как аргументы функции (7.42) являются случайными величинами, то и параметр X является случайной величиной. Поэтому для анализа надежности по параметру X необходимо проанализировать его распределение и для оценки вероятности безотказной работы определить долю, которую составляют допустимые режимы (в общем случае $X_{min} < X < X_{max}$).