7 МОДЕЛИ НАДЕЖНОСТИ

Методы прогнозирования состояния технических объектов (элементов и систем), основанные на изучении происходящих в них процессов («физика отказов») способны значительно уменьшить влияние случайных (нерегулируемых, неконтролируемых и непредсказуемых) факторов, более точно описать поведение объектов и возможность появления отказов. Однако для оценки надежности элементов по данным о приближении к отказам необходимо составить модели процессов, происходящих в элементах и приводящих к их отказам (*модели отказов*), которые, как правило, имеют вероятностный характер.

7.1 ОСНОВЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ НАДЕЖНОСТИ

Выбор модели надежности может быть произведен на основании статистического анализа данных о функционировании объектов при испытаниях или в условиях эксплуатации. Физические модели надежности иногда существенно помогают построить удачные гипотезы о распределениях вероятностных характеристик надежности, которые затем могут быть проверены статистическими методами.

Как уже отмечалось, состояние объекта и его параметры X_i , определяющие свойства надежности, являются функцией входных параметров Z_j и времени t

$$X_i = f(Z_1, Z_2, \ldots, Z_k, t). \tag{7.1}$$

Здесь Z_1, Z_2,..., Z_k - параметры, характеризующие условия эксплуатации, и характеристики состояния объекта.

Любой из определяющих параметров X_i и его изменение под действием различных факторов может быть приближенно представлен в виде

$$X_i = X_{i0} + \Delta X_i = X_{i0} + \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial X_i}{\partial Z_j} \Delta Z_j + \frac{\partial X_i}{\partial t} \Delta t. \tag{7.2}$$

Основные показатели надежности в свою очередь могут быть представлены как функции физических характеристик и параметров элементов и скорости их изменения в зависимости от различных факторов.

Например, изменение вероятности отказа можно выразить через параметры элемента в виде

$$q_i = \int_0^t \frac{\partial q_i}{\partial t} dt = \int_0^t \frac{\partial q_i}{\partial X_i} \frac{\partial X_i}{\partial t} dt, \quad (7.3)$$

где $\frac{\partial X_i}{\partial t}$ – скорость изменения параметра X_i вследствие физических или физико-химических процессов в элементе; $\frac{\partial q_i}{\partial X_i}$ – изменение вероятности отказа вследствие изменения параметра X_i.

В общем случае при анализе надежности элементов необходимо рассматривать различные свойства материалов (механические, электрические, тепловые и т.д.) и действие различных внешних и внутренних факторов, вызывающих их изменение. Тогда вероятность отказа

$$q(t) = \prod_{i=1}^{n} q_i = \prod_{i=1}^{n} \int_0^t \frac{\partial q_i}{\partial \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X_i}{\partial t} dt. \quad (7.4)$$

Если надежность оценивается интенсивностью отказов $\lambda(t)$, то для достаточно надежных объектов ($p(t) \approx 1$)

$$\lambda_i(t) = \frac{\partial q_i}{\partial t} \frac{1}{p_i} \approx \frac{\partial q_i}{\partial t} = \frac{\partial q_i}{\partial X_i} \frac{\partial X_i}{\partial t}. \quad (7.5)$$

Тогда общая интенсивность отказов

$$\lambda(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial q_i}{\partial \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X_i}{\partial t}. \quad (7.6)$$

Однако в формулах (7.1) – (7.6) аргументы Z_1, Z_2, ..., Z_k и, тем более, определяющие параметры X_i часто являются случайными величинами, большинство физических процессов и явлений в материалах элементов имеют физико-статистическую природу, поэтому модель надежности должна учитывать как физическую структуру объектов, так и статистические закономерности процессов.

7.1.1 Методы моделирования надежности

Как уже отмечалось, основным источником достоверной информации о надежности технических объектов являются экспериментальные исследования и результаты эксплуатации. Однако сложность, часто уникальность и высокая стоимость современных технических объектов в ряде случаев практически исключают возможность использования традиционных эмпи-

рических и полуэмпирических методов проектирования и физических экспериментальных исследований.

В некоторых случаях сложные технические системы не удается полностью исследовать даже в течение всего периода эксплуатации, при этом опытная проверка в аварийных ситуациях часто просто невозможна. Вместе с тем случайный характер явлений и процессов, происходящих в системах и элементах, сложность, нелинейность и нестационарность характеристик затрудняют технические расчеты.

Кроме того, многие современные технические системы обладают высокой надежностью, могут безотказно работать в течение длительного времени, и их полномасштабные лабораторные испытания должны занимать тысячи часов. Использование же методов ускоренных физических испытаний не всегда приводит к искомому результату, поскольку любые процессы в элементах и системах протекают в определенных интервалах параметров и нагрузок, выход за пределы которых может привести к появлению дополнительных эффектов и механизмов отказов, что, естественно, вызовет искажение получаемых результатов.

С другой стороны, экспериментальные исследования остаются практически единственным источником достоверных сведений и исходных данных для расчетов надежности технических объектов и обойтись без них иногда просто невозможно.

Перечисленные причины в ряде случаев при проектировании и исследовании надежности объектов создают непреодолимые преграды и приводят к необходимости разработки и использования методов моделирования, в том числе и компьютерного.

При этом исследуется не сам технический объект, а его физическая или математическая модель в виде алгоритма функционирования, отражающая все основные существенные свойства и характеристики объекта. Основной целью имитационного моделирования является получение новой информации о свойствах, характеристиках и поведении изучаемого реального технического объекта.

Благодаря моделированию в ряде случаев удается оказаться от грубых допущений, применяемых при расчетах надежности технических объектов.

Вместе с тем моделирование дает возможность при минимальных затратах предсказать результаты функционирования технических объектов или технологических систем задолго до их изготовления (моделирование технологических систем отличается тем, что имитируется состояние продукта в процессе функционирования системы).

В зависимости от степени физического сходства между оригиналом и моделью можно различать ***моделирование на основе подобия*** и ***моделирование по аналогии***.

При моделировании на основе подобия создается подобная оригиналу материальная система (физическая модель), с помощью которой изучаются процессы, протекающие в оригинале. Системы или явления называются ***подобными***, если все количественные характеристики одного из них можно получить пропорциональным преобразованием характеристик другого.

Моделирование на основе подобия целесообразно использовать для оценки надежности уникальных объектов.

При этом для объектов, изготовленных по известной технологии, может быть использован опыт эксплуатации подобных объектов, которые в этом случае играют роль моделей. Показатели надежности этих моделей пересчитываются на оригинал (исследуемый объект) по определенной методике. Для оценки надежности объектов, изготовленных по новой технологии, могут быть использованы испытания малых моделей. Для этого по той же технологии изготавливается некоторое количество малых моделей и проводятся их испытания. Затем результаты испытаний пересчитываются на оригинал.

Целесообразно испытания моделей проводить в форсированном режиме (ускоренные испытания) и осуществлять двойной пересчет: на нормальный режим и затем на оригинал.

Достоинства моделирования на основе подобия – большая достоверность результатов и возможность выявления физических причин явлений. Однако часто возможности такого моделирования ограничены трудностями изготовления моделей и проведения экспериментов, их высокой стоимостью, недостаточной точностью методов и средств измерения.

Под ***аналогией*** понимается частичное сходство (сходство в каком-либо отношении) между предметами и явлениями, в остальном различными. Моделирование по аналогии с использованием математических моделей (математического моделирования) широко применяется для исследования процессов функционирования систем путем имитации на вычислительных машинах изменения состояний элементов и системы.

Математическое моделирование – процесс создания имитирующей математической модели и ее использование с целью получения сведений о реальном объекте.

Математическое моделирование является альтернативой физическому моделированию, но у него есть ряд существенных преимуществ: меньшие

сроки на подготовку, значительно меньшая материалоемкость (особенно при исследовании крупногабаритных объектов), возможность выполнения экспериментов на критических и закритических режимах, которые привели бы к разрушению образца, и др.

Математическая модель – совокупность математических объектов (чисел, символов, множеств и т.д.) и связей между ними, отражающих важнейшие свойства технического объекта.

Моделирование большинства технических объектов можно выполнять на микро-, макро- и метауровнях, различающихся степенью детализации рассмотрения процессов в объекте.

Математической моделью технического объекта на ***микроуровне*** является система уравнений, описывающая процессы и явления в материалах и средах с заданными краевыми условиями. Система уравнений обычно известна (уравнения Ламе в механике упругих сред, уравнения Навье-Стокса в гидродинамике, уравнения теплопроводности в термодинамике и т. д.), но ее точное решение удается получить лишь для некоторых частных случаев, поэтому первая задача, возникающая при моделировании, состоит в построении адекватной приближенной дискретной модели.

Так как получаемая при дискретизации аппроксимирующая система алгебраических уравнений имеет высокий порядок, то при моделировании достаточно сложных технических объектов приходится принимать ряд допущений и упрощений и переходить к моделированию на макроуровне.

В основе математических моделей на ***макроуровне*** лежат компонентные уравнения отдельных элементов и топологические уравнения, вид которых определяется связями между элементами.

Предпосылкой создания единого математического и программного обеспечения анализа на макроуровне являются аналогии компонентных и топологических уравнений физически однородных подсистем, из которых состоит технический объект. Для сложных технических объектов размерность математических моделей на макроуровне становится чрезмерно высокой, и для моделирования приходится переходить на ***метауровень***.

Модель на этом уровне воспроизводит объект с большими или меньшими упрощениями, которые зависят от цели и возможностей моделирования. При этом должен достигаться компромисс между точностью и сложностью модели. Однако в общем случае математическая модель процесса или объекта, как и любая другая, должна отвечать двум основным требованиям: экономичности и традуктивности (traduir (франц.) – переводить, передавать , преобразовывать).

Традуктивность – свойство модели, выражающееся в возможности перевода результатов, полученных с ее помощью, на оригинал.)

Требование ***экономичности*** заключается в том, что исследование модели должно быть более экономичным, чем исследование самого объекта, т.е. ее использование должно экономить средства, время или быть более безопасным. Экономичности можно добиться, создав либо дешевую модель, либо дорогую, но универсальную, способную моделировать широкий круг объектов. В этом смысле математическая модель, хотя и может быть соизмерима по стоимости с самим объектом, но способна моделировать самые различные системы и многократно повторять эксперименты.

Требование ***традуктивности*** означает, что при моделировании должна быть полная уверенность в том, что полученные результаты могут быть с достаточной степенью точности и достоверности использованы при расчетах, проектировании или оптимизации функционирования самого объекта. Это требование может быть выполнено только в результате глубокого изучения процессов и явлений, правильной постановки задачи моделирования, корректного использования методов математического моделирования, обработки, анализа и проверки полученных результатов.

Структурное сходство модели и объекта в ряде случаев дает возможность их совместного использования: например , при моделировании сложной системы применяются закономерности и используются параметры, характеризующие функционирование ее элементов или структурных групп, полученные при экспериментальных исследованиях.

В общем случае любая модель содержит случайные величины (внешние воздействия, характеристики элементов и другие параметры) и поэтому по сути является ***вероятностной моделью***.

Детерминированную модель, в которой все параметры могут принимать только определенные значения, можно считать частным случаем вероятностной модели.

Хотя математические модели надежности являются идеализацией законов функционирования технических объектов, они позволяют в вероятностной форме предсказать поведение объектов в реальных условиях функционирования и оценить многие количественные характеристики надежности. При этом степень идеализации в основном определяется требованием простоты используемых моделей.

Сложные модели надежности могут потребовать очень большого объема выборки для оценки ее параметров при экспериментальных исследованиях, в результате чего использование такой модели становится технически и экономически бессмысленным.

Вероятностные методы теории надежности привлекаются для выявления и описания физико-химических процессов и явлений, влияющих на надежность и приводящих к отказам, установления их кинетических закономерностей в зависимости от состояния элементов и внешних воздействий, описания взаимодействия элементов системы и т.д.

Математические модели надежности элементов, используемые на практике, представляют собой обычно простые законы распределения. Показатели надежности при этом являются некоторыми функциями параметров математической модели. Модели надежности технических систем – более сложные функциональные зависимости, учитывающие модели отказов элементов и структуру системы.

Определение показателей надежности на основании вероятностных моделей включает, как правило, три этапа.

Сначала устанавливается тип модели (вид распределения). Это может быть сделано на основании известных законов распределения, полученных для объектов-аналогов, путем использования априорной информации о физико-статистических механизмах процессов или путем обработки результатов экспериментальных исследований объекта. *На втором этапе* оцениваются параметры распределения и таким образом устанавливается конкретный вид вероятностной модели для данного технического объекта. *На третьем этапе* на основании полученной вероятностной модели (закона распределения) определяются необходимые показатели надежности.

В качестве вероятностных моделей элементов надежности используются дискретные и непрерывные распределения.

7.1.2 Дискретные модели надежности

Дискретные распределения описывают случайные величины, которые принимают конечное или счетное множество значений (число отказов, число исправных или отказавших объектов и т.д.).

Биномиальное распределение определяет вероятность k успешных испытаний из общего числа испытаний n, если известно, что вероятность одного успешного испытания равна p, или число k исправных элементов системы, состоящей из n элементов, если вероятность безотказной работы каждого элемента равна p:

$$P(k) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \qquad (7.7)$$

где C_n^k – биномиальные коэффициенты.

При достаточно большом числе n и малых значениях p биномиальное распределение хорошо аппроксимируется *распределением Пуассона* с параметром $\lambda = np$ и ошибкой аппроксимации порядка λ^2/n

$$P(k) = \frac{\lambda^k}{k!}\exp(-\lambda) \tag{6.8}$$

или нормальным распределением

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) = 1 - 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\right), \tag{6.9}$$

где $\Phi(z)$ – нормированная функция Лапласа.

Биномиальное распределение (7.7) характерно для вероятности появления в объекте k дефектов за время или наработку t, если известно, что вероятность появления дефекта в одном из n интервалов t/n равна p. При $n \to \infty$ можно использовать распределение Пуассона (7.8) в виде

$$P(k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!}\exp(-\lambda t). \tag{6.10}$$

При $k = 0$ это распределение можно рассматривать как вероятность безотказной работы (вероятность отсутствия отказа) за время t

$$P(k = 0) = \exp(-\lambda t), \tag{7.11}$$

причем в теории надежности параметр λ интерпретируется как интенсивность отказов.

Отрицательное биномиальное распределение (распределение Паскаля)

$$P(n) = C_{k+n-1}^{n} p^k (1-p)^n \tag{7.12}$$

используется, например, для определения вероятности числа неисправных изделий n, предшествующих k-му исправному, при планировании выпуска изделий для получения заданного количества исправных изделий при известной вероятности брака p.

При $k = 1$ отрицательное биномиальное распределение приобретает вид *геометрического распределения*.

Гипергеометрическое распределение используется для определения надежности продукции при выборочном контроле качества и определяет вероятность числа годных изделий k в выборке объема n из партии объемом N, содержащей M годных изделий:

$$P(k) = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^k}. \qquad (7.13)$$

7.1.3 Непрерывные модели надежности

В *непрерывных распределениях* в теории надежности непрерывной случайной величиной обычно является время или наработка - время безотказной работы, появления отказа, восстановления, наработка на отказ, между отказами, до отказа и т.д.

Наиболее простой и вместе с тем одной из самых используемых моделей является *экспоненциальное (показательное) распределение* наработки на отказ, которое получается из выражения основного закона надежности при постоянном значении интенсивности отказов $\lambda = const$:

$$P(t) = \exp(-\lambda t). \qquad (6.14)$$

Широкое использование экспоненциальной модели объясняется, в первую очередь, тем, что она описывает период нормальной эксплуатации, когда интенсивность отказов λ примерно постоянна и старение объекта еще мало сказывается на его надежности. Экспоненциальное распределение типично для технических систем, состоящих из большого количества элементов с различными распределениями наработки до отказа.

Кроме того, экспоненциальное распределение описывает функционирование объекта под действием пуассоновского потока импульсов нагрузки, обусловливающего отказы сложных систем с восстановлением элементов. Экспоненциальное распределение можно также рассматривать как предельное для распределения Пуассона и геометрического распределения.

При использовании экспоненциальной модели в качестве характеристики наработки объекта на отказ величину $t_0 = 1/\lambda$ можно рассматривать как среднюю наработку и тогда выражение (7.14) запишется в виде

$$P(t) = \exp(-\frac{t}{t_0}). \qquad (7.15)$$

Существенным преимуществом экспоненциального закона является также возможность разложения функции (7.14) или (7.15) в ряд и аппроксимации при $\lambda t = \frac{t}{t_0} \leq 0{,}1$ линейной зависимостью вида

$$P(t) = 1 - \lambda t + \frac{(\lambda t)^2}{2!} - \frac{(\lambda t)^3}{3!} + \cdots \approx 1 - \lambda t = 1 - \frac{t}{t_0}, \qquad (7.16)$$

которая часто используется при приближенных расчетах параметров надежности.

Важным свойством экспоненциальной модели надежности является то, что вероятность безотказной работы и вероятность отказа в интервале времени $(t,t+\Delta t)$ (т.е. $P(t,t+\Delta t)$ и $Q(t,t+\Delta t) = 1-P(t,t+\Delta t)$) зависят только от длины этого интервала Δt и не зависят от предшествующего времени t. Это свойство в значительной степени ограничивает возможности использования этой модели – она может применяться только в случаях, когда необратимые изменения (старение) объектов несущественны и отказы связаны только со случайными воздействиями.

Экспоненциальное распределение можно обобщить *распределением Вейбулла* в виде

$$P(t) = \exp(-\lambda t^{\alpha}). \qquad (7.17)$$

В отличие от экспоненциального, распределение Вейбулла задается двумя параметрами. Параметр λ определяет масштаб кривой распределения (при его изменении кривая сжимается или растягивается). Параметр формы α делает модель Вейбулла универсальной.

При $\alpha < 1$ модель Вейбулла позволяет описывать приработочные отказы, обусловленные скрытыми дефектами, при $\alpha = 1$ – внезапные отказы в период нормальной эксплуатации, при $1 < \alpha < 2$ – отказы быстро стареющих объектов, у которых почти нет скрытых дефектов, при $\alpha > 2$ – износовые отказы. Кроме того, при $\alpha = 2$ (*распределение Релея*) модель описывает функционирование объекта, состоящего из нескольких последовательно соединенных дублированных элементов. Обычно значение α лежит в интервале от 1 до 2.

Гамма-распределение

$$P(t) = \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t t^{\alpha-1} \exp(-\lambda t)\, dt \qquad (7.18)$$

используется для определения момента отказа с номером α при испытаниях с заменой элементов (если наработка подчиняется экспоненциальному закону), а также для определения общего срока службы группы объектов при испытаниях без замены (также если наработка каждого из них подчиняется экспоненциальному закону) и в некоторых других случаях.

Одним из самых популярных в теории надежности является *нормальное распределение*

$$P(t) = 1 - F(t) = 1 - \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} \exp\left[-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dt. \qquad (7.19)$$

Фундаментальное значение нормального распределения связано с центральной предельной теоремой теории вероятностей, согласно которой распределение суммы любых случайных величин в пределе стремится к нормальному.

Нормальное распределение чаще всего используется для описания постепенных износовых отказов, оно образуется, когда на случайную величину действует большое количество равноправных факторов. Его недостатком в некоторых случаях может оказаться наличие области отрицательных значений аргумента, что для описания наработки на отказ не имеет смысла. С целью устранения этого недостатка можно воспользоваться *усеченным нормальным распределением*

$$P(t) = 1 - F(t) = 1 - \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{t} \exp\left[-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dt. \qquad (7.20)$$

или *логарифмически нормальным распределением*

$$P(t) = 1 - F(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{t} \frac{1}{t} \exp\left[-\frac{(\ln t - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] dt. \qquad (7.21)$$

Логарифмически нормальное распределение может также использоваться для описания долговечности металлов, износовых отказов материалов, старения электронной аппаратуры, процессов восстановления некоторых объектов и т.д.

При описании надежности используются также модели, объединяющие несколько распределений. Например, если отказы объекта происходят под действием двух независимых факторов, приводящих к отказам по экспоненциальному и нормальному законам, то результирующая модель будет представлять собой композицию (произведение) этих распределений:

$$P(t) = \exp(-\lambda t)\left[1 - \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)\right]. \qquad (7.22)$$

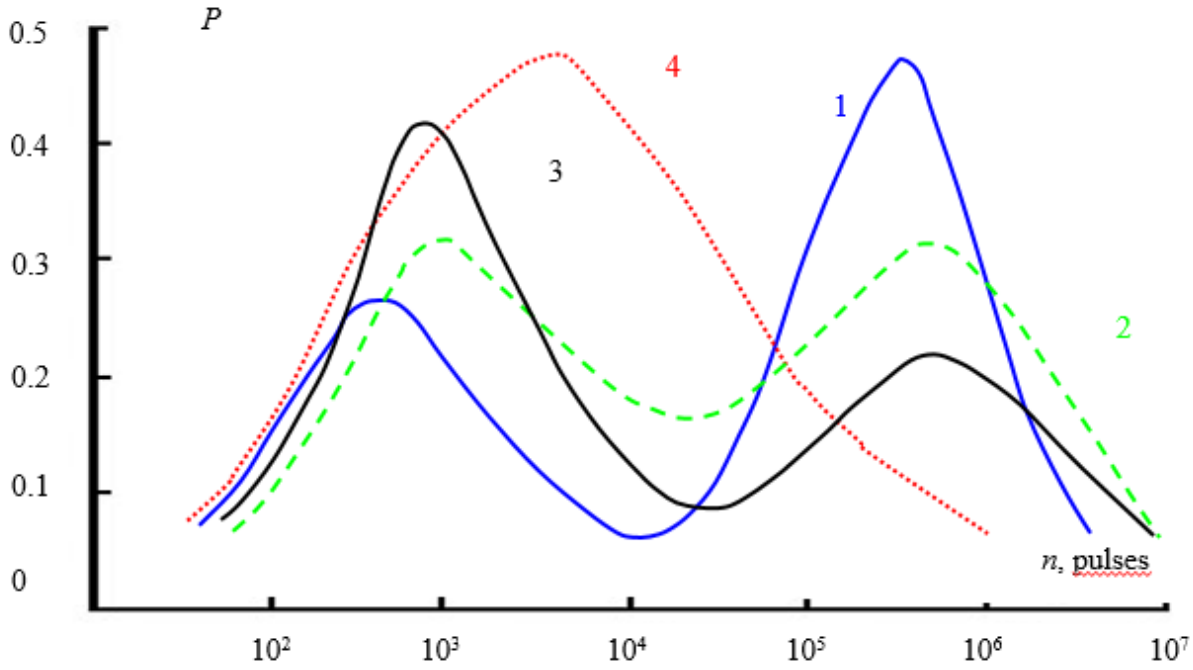
Для того чтобы получить теоретическое распределение, близкое к экспериментальному, иногда плотность распределения наработки до отказа или между отказами удобно представить в виде суммы (смеси) нескольких распределений

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i\,(t), \qquad (7.23)$$

где $f_i(t)$ – i-е теоретическое распределение; c_i – весовой коэффициент i-го распределения (очевидно, $\sum_{i=1}^{n} c_i = 1$).

Например, для суммы (суперпозиции) двух экспоненциальных распределений

$$f(t) = c_1\lambda_1 \exp(-\lambda_1 t) + c_2\lambda_2 \exp(-\lambda_2 t). \qquad (7.24)$$

При этом вероятность безотказной работы, интенсивность отказов и средняя наработка

$$P(t) = c_1 \exp(-\lambda_1 t) + c_2 \exp(-\lambda_2 t);$$
$$\lambda(t) = \frac{c_1\lambda_1 \exp(-\lambda_1 t) + c_2\lambda_2 \exp(-\lambda_2 t)}{c_1 \exp(-\lambda_1 t) + c_2 \exp(-\lambda_2 t)}; \qquad (6.25)$$
$$T_{\text{ср}} = \frac{c_1}{\lambda_1} + \frac{c_2}{\lambda_2}.$$