

4. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ НАДЕЖНОСТИ

Математический аппарат теории надежности базируется на основных положениях и теоремах теории вероятностей, теории случайных функций и процессов, математической статистики, математической логики, комбинаторики и теории графов.

4.1 СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Основное явление, рассматриваемое в теории надежности, – отказ объекта – считается, как правило, случайным событием и может характеризоваться с помощью основных понятий теории вероятностей.

4.1.1 Основные понятия теории вероятностей

Случайное событие – событие, которое может произойти или не произойти в действительности. Событие, которое произойдет обязательно, называется *достоверным*, которое не может произойти – *невозможным*. *Совместными* называются события, появление одного из которых не исключает возможности появления другого, *несовместными* – события, появление одного из которых исключает появление другого. *Зависимыми* называются события, появление одного из которых влияет на появление другого, в противном случае события называются *независимыми*. *Противоположное* или *дополнительное событие* – событие, состоящее в непоявлении другого события. *Полная совокупность (группа) событий* – совокупность событий, хотя бы одно из которых произойдет обязательно.

Сумма (или объединение) событий – событие, появление которого эквивалентно появлению хотя бы одного из этих событий:

$$A = A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n = \bigcup_{i=1}^n A_i, \quad (4.1)$$

где A – сумма (объединение) событий $A_1, A_2, \dots, A_n$, $\vee$ – знак логического сложения, $\bigcup$ – знак логической суммы.

Если события A_i ($i=1, 2, \dots, n$) составляют полную совокупность, то, очевидно, их сумма образует достоверное событие:

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = E, \quad (4.2)$$

где E – обозначение достоверного события.

Сумма противоположных событий также достоверное событие:

$$A \vee \bar{A} = E, \quad (4.3)$$

где $\bar{A}$ – событие, противоположное событию A .

Для логической суммы событий справедливы равенства:

$$A \vee A = A, \quad A \vee e = A, \quad A \vee E = E, \quad (4.4)$$

где e – обозначение невозможного события.

Произведение (или пересечение) событий – событие, появление которого эквивалентно появлению всех этих событий одновременно:

$$A = A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n = \bigcap_{i=1}^n A_i, \quad (4.5)$$

где A – произведение (пересечение) событий $A_1, A_2, \dots, A_n$, $\wedge$ – знак логического умножения событий, $\bigcap$ – знак логического произведения событий.

Для логического произведения событий справедливы равенства:

$$A \wedge A = A, \quad A \wedge e = e, \quad A \wedge E = A, \quad A \wedge \bar{A} = e. \quad (4.6)$$

Часто вместо знаков логического сложения и логического умножения используются соответствующие арифметические символы. Тогда свойства суммы и произведения событий (4.3), (4.4), (4.6) запишутся в виде:

$$A + \bar{A} = E, \quad A + A = A, \quad A + e = A, \quad A + E = E, \quad (4.7)$$

$$AA = A, \quad Ae = e, \quad AE = A, \quad A\bar{A} = e. \quad (4.8)$$

Для случайных событий справедливы следующие *основные законы*:

- сочетательный (ассоциативный) закон:

$$A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C, \quad A(BC) = (AB)C = ABC; \quad (4.9)$$

- переместительный (коммутативный) закон:

$$A + B = B + A, \quad AB = BA; \quad (4.10)$$

- распределительный (дистрибутивный) закон:

$$A(B + C) = (AB) + (AC), \quad A + (BC) = (A + B)(A + C); \quad (4.11)$$

- закон инверсий (двойственности):

$$\overline{(A + B)} = \bar{A}\bar{B}, \quad \overline{AB} = \bar{A} + \bar{B}. \quad (4.12)$$

Вероятностью случайного события называется числовая характеристика степени возможности его появления. Вероятность случайного события обладает следующими основными свойствами:

$$P(e) = 0, P(E) = 1, \quad 0 \leq P(A) \leq 1, \quad P(A) + P(\bar{A}) = 1, \quad (4.13)$$

где $P(e)$, $P(E)$ и $P(A)$ – вероятности, соответственно, невозможного, достоверного и произвольного события A .

Условной вероятностью называется вероятность случайного события, вычисленная в предположении наступления другого события. Для любых случайных событий A_1 и A_2

$$P(A_1|A_2) = \frac{P(A_1A_2)}{P(A_2)}, \quad (4.14)$$

где $P(A_1|A_2)$ – условная вероятность события A_1 при наступлении события A_2 . Очевидно для независимых событий A_1 и A_2

$$P(A_1|A_2) = P(A_1|\bar{A}_2) = P(A_1); \quad P(A_2|A_1) = P(A_2|\bar{A}_1) = P(A_2) \quad (4.15)$$

Коэффициент регрессии характеризует степень зависимости одного события от другого. Численно коэффициент регрессии равен разности между условными вероятностями одного из событий (A_1) в случае наступления и в случае ненаступления другого события (A_2 и $\bar{A}_2$):

$$\rho(A_1, A_2) = P(A_1|A_2) - P(A_1|\bar{A}_2) = \frac{P(A_1A_2) - P(A_1)P(A_2)}{P(A_2)P(\bar{A}_2)}, \quad (4.16)$$

где $\rho(A_1, A_2)$ – коэффициент регрессии события A_1 относительно события A_2 .

Коэффициент корреляции характеризует степень взаимной зависимости событий друг от друга и равен среднему геометрическому значению коэффициентов регрессии $\rho(A_1, A_2)$ и $\rho(A_2, A_1)$:

$$r(A_1, A_2) = \pm \sqrt{\rho(A_1, A_2)\rho(A_2, A_1)} = \frac{P(A_1A_2) - P(A_1)P(A_2)}{\sqrt{P(A_1)P(\bar{A}_1)P(A_2)P(\bar{A}_2)}}, \quad (4.17)$$

где $r(A_1, A_2)$ – коэффициент корреляции событий A_1 и A_2 .

В общем случае $-1 < r(A_1, A_2) < +1$. Для любых событий $r(A_1, A_2) = r(A_2, A_1)$, для независимых событий $r(A_1, A_2) = r(A_2, A_1) = 0$, для совместных событий $r(A_1, A_2) = r(A_2, A_1) = +1$, для противоположных событий $r(A_1, A_2) = r(A_2, A_1) = -1$. Кроме того, коэффициент корреляции обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned}
&\text{Если } r(A_1, A_2) = +1, \text{ то } r(A_1, \overline{A_2}) = -1 \\
&r(A_1, A_2) = r(\overline{A_1}, \overline{A_2}) \\
&r(A_1, A_2) = -r(A_1, \overline{A_2}) = -r(\overline{A_1}, A_2)
\end{aligned} \tag{4.18}$$

4.1.2 Теоремы сложения вероятностей

Вероятность суммы независимых событий (т.е. вероятность появления хотя бы одного из событий)

$$\begin{aligned}
P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) &= P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = 1 - [1 - P(A_1)][1 - P(A_2)] \dots \\
&\dots [1 - P(A_n)] = 1 - \prod_{i=1}^n [1 - P(A_i)].
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Для двух независимых событий

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1)P(A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2). \tag{4.20}$$

Вероятность суммы несовместных событий

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i). \tag{4.21}$$

Для несовместных событий, составляющих полную совокупность,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = P(E) = 1. \tag{4.22}$$

4.1.3 Теоремы умножения вероятностей

Вероятность произведения событий (т.е. вероятность появления всех событий)

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = P(A_1)P(A_2|A_1) \dots P(A_n|A_1 A_2 \dots A_{n-1}). \tag{4.23}$$

Для двух событий

$$P(A_1 A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1). \tag{4.24}$$

Вероятность появления независимых событий

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = P(A_1)P(A_2) \dots P(A_n) = \prod_{i=1}^n P(A_i). \tag{4.25}$$

Для несовместных событий, составляющих полную совокупность,

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = P(A_1) = P(e) = 0. \quad (4.26)$$

Если событие A_0 может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий $A_1, A_2, \dots, A_n$, то его вероятность (*формула полной вероятности*):

$$\begin{aligned} P(A_0) &= P(A_1)P(A_0|A_1) + P(A_2)P(A_0|A_2) + \dots + P(A_n)P(A_0|A_n) = \\ &= \sum_{i=1}^n P(A_i)P(A_0|A_i). \end{aligned} \quad (4.27)$$

4.1.4 Предельные теоремы теории вероятностей

Предельные теоремы устанавливают зависимость между случайностью и необходимостью, связь теории с ее практическим применением.

Теорема Бернулли. Если проводится n независимых опытов и в каждом из них событие появляется с вероятностью p , то относительная частота появления события m/n при $n \rightarrow \infty$ сходится по вероятности к p , т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right|\right) = 0, \quad (4.28)$$

где m – число появлений события из общего числа опытов n .

По теореме Бернулли при достаточно большом числе опытов относительная частота появления события приближается к его вероятности, т.е. при n -кратном повторении опыта событие произойдет np раз.

Теорема Пуассона. Если проводится n независимых опытов и в каждом из них событие появляется с вероятностью p_i (i – номер опыта), то относительная частота появления события m/n при $n \rightarrow \infty$ сходится по вероятности к среднему арифметическому вероятностей p_i , т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i\right|\right) = 0, \quad (4.29)$$

Теорема Пуассона имеет практическое значение, так как условия проведения испытаний или опытов часто непостоянны и вероятность появления какого-либо события является переменной величиной. По теореме Пуассона в реальных условиях частота появления события приближается к средней вероятности, характерной для данной группы событий.

Формула Бернулли связывает вероятность появления события m раз в n опытах с вероятностью его появления в каждом из опытов p :

$$P_n^m = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}, \quad (4.30)$$

где C_n^m – биномиальный коэффициент из n по m ($0 \leq m \leq n$).

Очевидно, что вероятность появления события не более m раз

$$P_n^{k \leq m} = \sum_{k=0}^m C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad (4.31)$$

а вероятность появления события более m раз

$$P_n^{k > m} = \sum_{k=m+1}^n C_n^k p^k (1-p)^{n-k}. \quad (4.32)$$

При $m = n$

$$P_n^{k \leq m} = 1; \quad P_n^{k > m} = 0. \quad (4.33)$$

Вычисления по формуле Бернулли (4.30) при больших значениях n и m связаны с определенными трудностями, поэтому в этих случаях можно воспользоваться приближенными формулами Лапласа:

– локальная формула Лапласа:

$$P_n^m \approx \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}} \varphi\left(\frac{m - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right); \quad (4.34)$$

– интегральная формула Лапласа:

$$P_n^{a \leq m \leq b} \approx \Phi\left(\frac{b - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{a - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right); \quad (4.35)$$

где $\varphi(x)$ и $\Phi(x)$ – функции нормального распределения. При $x > 4$ с точностью до 0,0001 можно считать $\varphi(x) = 0$ и $\Phi(x) = 0,5$.

Теорема Лапласа – предельный случай формулы Бернулли при $n \rightarrow \infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(a < \frac{m - np}{\sqrt{np(1-p)}} < b\right) = \Phi(b) - \Phi(a). \quad (4.36)$$

4.2 СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Поскольку отказ технического объекта считается случайным событием и некоторые параметры процессов и явлений – случайными величинами, то и характеристики надежности (наработка на отказ или до отказа, ресурс, срок службы, некоторые характеристики элементов и систем и др.) являются также

случайными величинами и описываются соответствующими функциями распределения случайных величин.

4.2.1 Основные понятия и определения

Случайная величина – величина, значение которой может случайным образом меняться от опыта к опыту. Если случайная величина может принимать только конечное или счетное множество значений, то она называется *дискретной*, если любые значения из замкнутого или открытого (в том числе бесконечного) интервала – то *непрерывной*.

Интегральная функция распределения – вероятность того, что случайная величина примет значение x_i , меньше фиксированного x :

$$F(x) = p(x_i < x). \quad (4.37)$$

Из определения функции распределения следуют ее основные свойства:

$$F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1, 0 \leq F(x) \leq 1, p(a < x_i < b) = F(b) - F(a). \quad (4.38)$$

Плотность распределения случайной величины (дифференциальная функция распределения или плотность вероятности) – предел отношения вероятности того, что случайная величина примет значение, лежащее в малом интервале, к величине этого интервала при ее стремлении к нулю:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{dF(x)}{dx}. \quad (4.39)$$

Плотность распределения обладает следующими свойствами:

$$f(-\infty < x < +\infty) \geq 0, \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1, F(x) = \int_{-\infty}^x dF(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx, \quad (4.40)$$

$$p(a < x < b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx. \quad (4.41)$$

Условной плотностью распределения случайной величины называется отношение плотности распределения к вероятности того, что случайная величина превысит фиксированное значение:

$$\lambda(x) = \frac{f(x)}{p\{x_i > x\}} = \frac{f(x)}{1 - F(x)}. \quad (4.42)$$

Если в качестве случайной величины рассмотреть наработку объекта до отказа, то интегральной функции распределения соответствует вероятность отказа, плотности распределения – плотность распределения наработки, условной плотности распределения – интенсивность отказов.

4.2.2 Числовые характеристики случайных величин

Для характеристики случайной величины иногда удобнее пользоваться не функциями распределения, а количественными показателями, содержащими достаточную информацию о ее распределении. Основными характеристиками случайной величины являются математическое ожидание, дисперсия, моменты, мода, медиана и коэффициент вариации.

Математическое ожидание – среднее значение случайной величины:

– для дискретных случайных величин:

$$M(x) = x_{\text{ср}} = \sum_i x_i p(x_i); \quad (4.43)$$

– для непрерывных случайных величин:

$$M(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF(x); \quad (4.44)$$

– для неотрицательных непрерывных случайных величин:

$$M(x) = \int_0^{+\infty} [1 - F(x)] dx = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx; \quad (4.45)$$

Из определения математического ожидания следуют его основные свойства:

$$M(c + x) = c + M(x), \quad M(cx) = cM(x), \quad (4.46)$$

$$M(x + y) = M(x) + M(y), \quad M(x \times y) = M(x) \times M(y), \quad (4.47)$$

где c – константа, x и y – независимые случайные величины.

Дисперсия случайной величины – математическое ожидание квадрата ее отклонения от математического ожидания:

$$D(x) = M[x - M(x)]^2 = M(x^2) - M^2(x). \quad (4.48)$$

Для непрерывной случайной величины

$$D(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - M(x)]^2 dF(x). \quad (4.49)$$

Из определения дисперсии следуют ее основные свойства:

$$D(c + x) = D(x), \quad D(cx) = c^2 D(x), \quad D(x + y) = D(x) + D(y), \quad (4.50)$$

$$D(x \times y) = M(x) \times M(y) + M^2(x) \times D(y) + M^2(y) \times D(x). \quad (4.51)$$

Дисперсия характеризует разброс случайной величины.

Недостатком дисперсии как характеристики распределения случайной величины является ее размерность квадрата этой величины, поэтому разброс часто характеризуется *средним квадратическим отклонением*, которое имеет размерность самой случайной величины:

$$\sigma_x = |\sqrt{D(x)}|. \quad (4.52)$$

Коэффициент вариации случайной величины – отношение среднего квадратического отклонения к математическому ожиданию:

$$v_x = \frac{\sigma_x}{M(x)}. \quad (4.53)$$

Медиана (срединное значение) – значение непрерывной случайной величины, при котором интегральная функция распределения равна 0,5. Медиана – частный случай квантиля: *квантилем* уровня p называется величина u_p , при которой $p(x < u_p) = F(u_p) = p$, т.е. квантиль – корень уравнения $F(u_p) = p$ (медиана – квантиль уровня $p = 0,5$).

Мода – значение случайной величины, при котором плотность распределения принимает максимальное значение.

При табулировании наиболее распространенных функций распределения часто используется центрирование и нормирование случайных величин. *Центрированная случайная величина* получается из исходной вычитанием из ее значения математического ожидания

$$x' = x - M(x), \quad (4.54)$$

нормированная случайная величина – делением на среднее квадратическое отклонение

$$\bar{x} = \frac{x'}{\sigma_x}. \quad (4.55)$$

4.2.3 Законы распределения дискретных случайных величин

Для дискретных случайных величин наиболее часто в теории надежности используются биномиальное распределение и распределение Пуассона.

Биномиальное распределение характеризует число успешных испытаний x из общего числа испытаний n . Биномиальное распределение задается формулой Бернулли

$$P(x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} = C_n^x p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \dots, n \quad (4.56)$$

или функцией распределения

$$F(x) = \sum_{i=0}^x P(i) = \sum_{i=0}^x \frac{i!}{i!(n-i)!} p^i (1-p)^{n-i} = \sum_{i=0}^x C_n^i p^i (1-p)^{n-i}, \quad (4.57)$$

где p – вероятность одного успешного испытания, $P(x)$ – вероятность x успешных испытаний при общем числе испытаний n , C_n^x – биномиальные коэффициенты. Основные характеристики биномиального распределения:

$$M(x) = np, \quad D(x) = np(1-p), \quad v = \sqrt{\frac{1-p}{np}}. \quad (4.58)$$

Биномиальному закону, в частности, подчиняется число объектов, отказавших за фиксированное время. Оно применяется также при ограниченной информации о надежности для сортировки партии объектов на годные и негодные.

Если $n \rightarrow \infty$ и $p \rightarrow 0$ при $np = \text{const}$, то биномиальное распределение приближается к распределению Пуассона с параметром $\lambda = np$.

Распределение Пуассона задается формулой вида

$$P(x) = \frac{\lambda^x}{x!} \exp(-\lambda), \quad x = 0, 1, 2, \dots \quad (4.59)$$

и интегральной функцией распределения

$$P(x) = \sum_{i=1}^x \frac{\lambda^i}{i!} \exp(-\lambda), \quad (4.60)$$

Основные характеристики распределения Пуассона:

$$M(x) = D(x) = \lambda, \quad v = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}. \quad (4.61)$$

Распределение Пуассона описывает количество отказов за промежуток времени для объектов с постоянной интенсивностью отказов λ . Особенностью распределения Пуассона является равенство математического ожидания и дисперсии, что часто используется для проверки соответствия исследуемого распределения распределению Пуассона.

При $\lambda > 9$ распределение Пуассона хорошо аппроксимируется нормальным распределением с математическим ожиданием и дисперсией λ .

Отрицательное биномиальное распределение (распределение Паскаля) задается формулой

$$P(x) = C_{k+x-1}^x p^k (1-p)^x, \quad x = 0, 1, \dots, k \quad (4.62)$$

или функцией распределения

$$F(x) = \sum_{i=0}^x C_{k+x-1}^i p^k (1-p)^i, \quad (4.63)$$

Основные характеристики распределения Паскаля:

$$M(x) = \frac{k(1-p)}{p}, \quad D(x) = \frac{k(1-p)}{p^2}, \quad v = \frac{1}{\sqrt{k(1-p)}}. \quad (4.64)$$

Распределение Паскаля является распределением числа «неуспехов», предшествующих k -му «успеху» в схеме независимых испытаний Бернулли. Оно используется при планировании выпуска изделий для получения заданного количества исправных изделий при известном проценте брака.

Гипергеометрическое распределение используется для определения надежности продукции при выборочном контроле качества и определяет вероятность числа годных изделий в выборке объема n из партии объемом N , содержащей M годных изделий:

$$P(x) = \frac{C_M^x C_{N-M}^{n-x}}{C_N^n}, \quad 1 \leq x \leq \min(n, M) \quad (4.65)$$

Тогда функция распределения

$$F(x) = \sum_{i=0}^x \frac{C_M^i C_{N-M}^{n-i}}{C_N^n}. \quad (4.66)$$

Основные характеристики гипергеометрического распределения:

$$M(x) = \frac{nM}{N}, \quad D(x) = \frac{nM(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)}, \quad v = \sqrt{\frac{(N-M)(N-n)}{nM(N-1)}}. \quad (4.67)$$

При $n < 0,1N$ и $M < 0,1N$ распределение хорошо аппроксимируется распределением Пуассона с параметром $\lambda = \frac{nM}{N}$, при $N \rightarrow \infty$, $n < 0,1N$ и $\frac{M}{np} \rightarrow p$ – биномиальным распределением с параметрами n и $p = \frac{M}{N}$, при $\frac{nM}{N} \rightarrow \infty$ – нормальным распределением с математическим ожиданием и дисперсией (4.67).

4.2.4 Законы распределения непрерывных случайных величин

Равномерное распределение в теории надежности характеризует параметры элементов и систем (например, прочность) или нагрузку, величина которых может принимать любое случайное значение в известном интервале (a,b) (рис. 4.1):

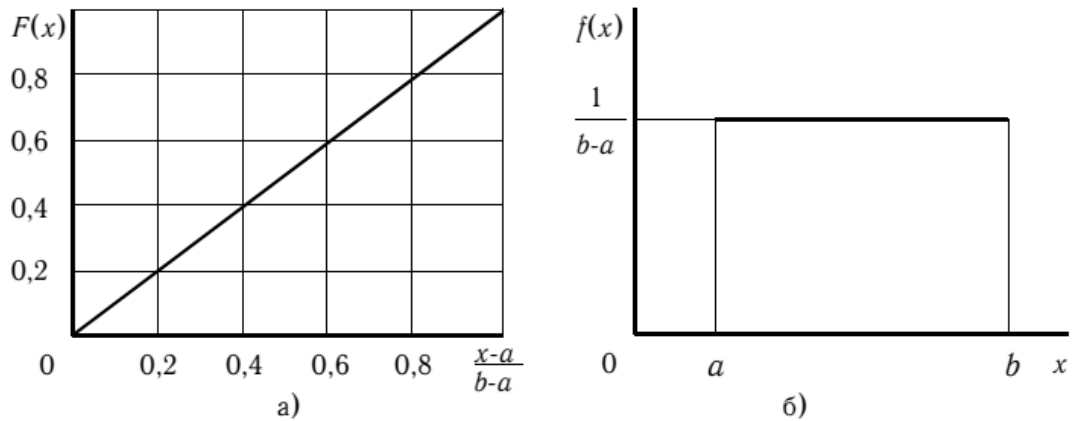


Рис. 4.1. Интегральная (а) и дифференциальная (б) функции равномерного распределения

Формулы, задающие равномерное распределение, интуитивно понятны из рис. 4.1:

$$F(x) = \frac{x-a}{b-a}, \quad f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad a \leq x \leq b$$

$$M(x) = \frac{a+b}{2}, \quad D(x) = \frac{(b-a)^2}{12}, \quad v_x = \frac{2(b-a)}{\sqrt{3}(a+b)}$$

Экспоненциальное (показательное) распределение (рис. 4.2) в теории надежности используется для характеристики наработки объекта до первого отказа или между отказами при их постоянной интенсивности $\lambda = \text{const}$ и средней наработке $t = 1/\lambda$. Достоинством распределения является его простота, благодаря чему некоторые задачи допускают аналитические решения.

Экспоненциальное распределение задается интегральной функцией или плотностью распределения

$$F(x) = 1 - \exp(-\lambda x), \quad f(x) = \lambda \exp(-\lambda x), \quad x \geq 0, \quad (4.68)$$

где λ – параметр распределения, который в теории надежности имеет смысл *интенсивности отказов*.

При $\lambda x < 0,1$ формулу распределения после ее разложения в ряд можно заменить приближенной формулой

$$F(x) = 1 - \left[1 - \lambda x + \frac{(\lambda x)^2}{2!} - \frac{(\lambda x)^3}{3!} + \dots \right] \approx \lambda x, \quad (4.69)$$

которая часто используется при приближенных расчетах параметров надежности. Основные свойства экспоненциального распределения:

$$M(x) = \frac{1}{\lambda}, \quad D(x) = \frac{1}{\lambda^2}, \quad v = 1. \quad (4.70)$$

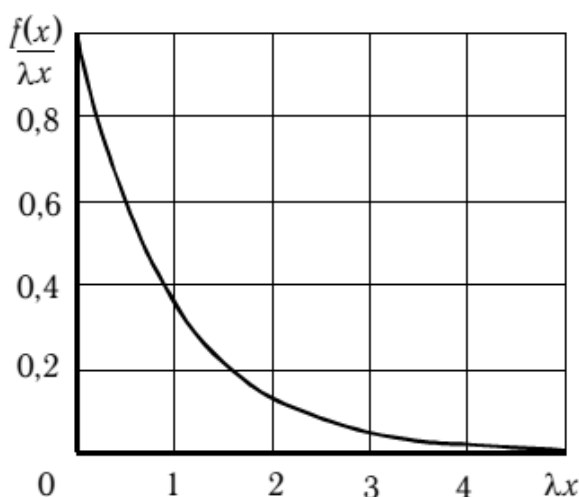


Рис. 4.2. Экспоненциальное распределение.

Экспоненциальное распределение можно считать частным случаем распределения Вейбулла и гамма-распределения.

Нормальное распределение (распределение Гаусса) (рис.2.3) часто используется для описания износных отказов или в случаях, когда отказ может быть следствием большого числа различных причин. Оно может считаться предельным для многих распределений случайных величин – распределения Пуассона, биномиального, гамма-распределения и др.

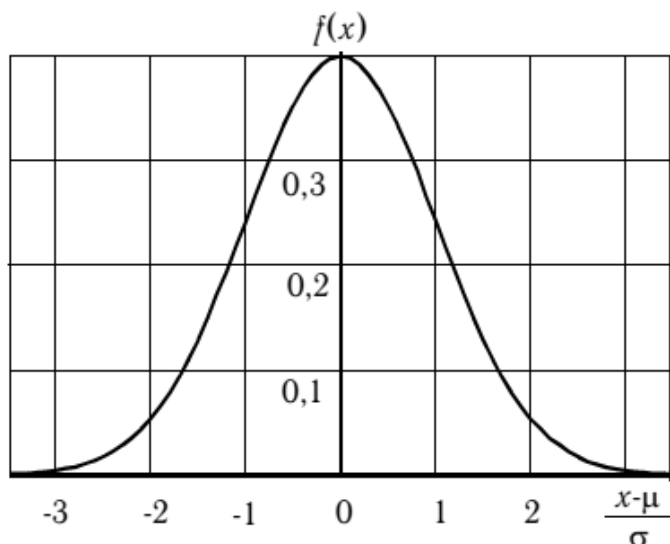


Рис.4.3. Нормальное распределение

Нормальное распределение задается интегральной функцией или плотностью распределения

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx, \quad f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]. \quad (4.71)$$

Для нормального распределения $M(x) = \mu$, $D(x) = \sigma^2$, $v = \sigma/\mu$, параметры $-\infty < \mu < +\infty$ и $\sigma > 0$ – параметры сдвига и масштаба (рис.4.4).

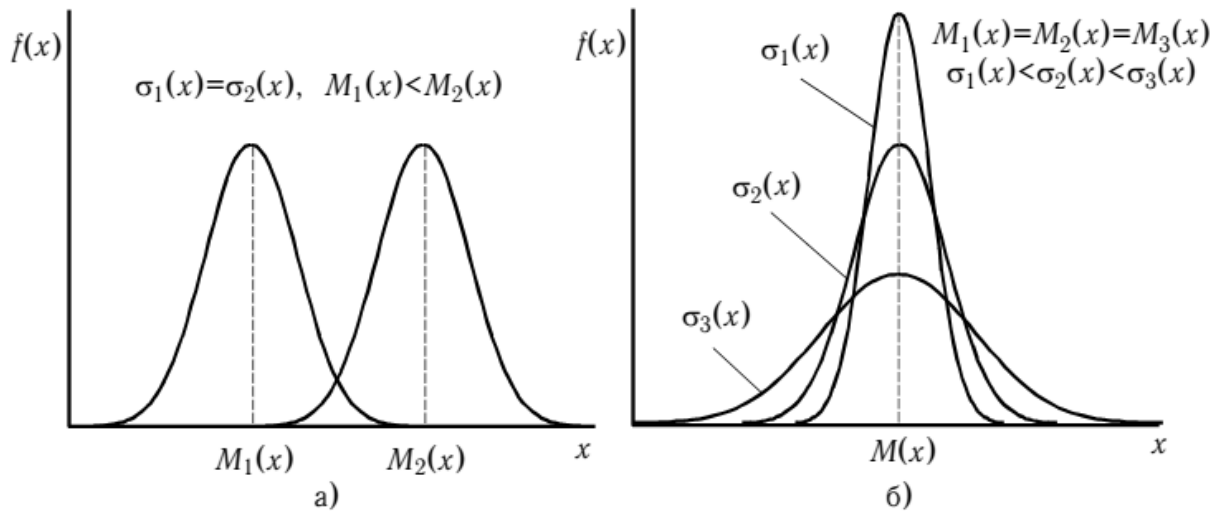


Рис. 4.4. Плотность вероятности нормального распределения при различных значениях математического ожидания (а) и среднего квадратического отклонения (б)

Нормальное распределение часто задается также нормированной функцией Лапласа $\Phi(z)$ или плотностью распределения $\varphi(z)$ для центрированной и нормированной случайной величины $z = (x - \mu)/\sigma$:

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz, \quad \varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right), \quad (4.71)$$

Значения функций $\Phi(z)$ и $\varphi(z)$ табулированы.

Функции $\Phi(z)$ и $F(x)$ связаны соотношениями:

$$F(x) = \frac{1}{2} + \Phi(z), \quad \Phi(-z) = -\Phi(z). \quad (4.72)$$

Нормальное распределение задается также значениями квантилей u_p уровня p , по которым можно определить вероятность заданного значения случайной величины x :

$$x_p = M(x) + u_p \sigma. \quad (4.73)$$

Для нормально распределенной случайной величины вероятность попадания в пределы интервала, ограниченного точками, расположенными на расстоянии σ от математического ожидания, составляет 0,6813, интервала от $M(x) - 2\sigma$ до $M(x) + 2\sigma - 0,9544$ и от $M(x) - 3\sigma$ до $M(x) + 3\sigma - 0,9973$, т.е. с вероятностью 99,73% можно считать, что

$$M(x) - 3\sigma \leq x \leq M(x) + 3\sigma. \quad (4.74)$$

Усеченное нормальное распределение получается из нормального при ограничении интервала изменения случайной величины только положительными значениями. Оно вносит уточнение в расчеты надежности по сравнению с нормальным распределением при больших значениях коэффициента вариации $v = \sigma/\mu$.

Функция плотности вероятности усеченного нормального распределения записывается аналогично нормальному распределению (4.71), но с коэффициентом пропорциональности c :

$$f(x) = \frac{c}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(x - x_0)^2}{2\sigma^2} \right], \quad (4.75)$$

где x_0 – значение, соответствующее максимуму функции $f(x)$, т.е. мода.

Коэффициент c для распределения, ограниченного пределами изменения x от a до b , определяется из условия

$$\int_a^b f(x) dx = c[F(b) - F(a)] = 1 \quad (4.76)$$

откуда

$$c = \frac{1}{F(b) - F(a)} = \frac{1}{\Phi\left(\frac{b - x_0}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - x_0}{\sigma}\right)}, \quad (4.77)$$

где $F(a)$ и $F(b)$ – значения интегральной функции нормального распределения для предельных значений x .

Усеченное нормальное распределение в основном используется с предельными значениями $a = 0$ и $b = \infty$ (в задачах надежности это означает невозможность отказов при отрицательных значениях времени). Поскольку $\Phi(\infty) = 0,5$ и $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$, то для этого случая формула (4.77) принимает вид

$$c = \frac{1}{\Phi(\infty) - \Phi\left(-\frac{x_0}{\sigma}\right)} = \frac{1}{0,5 + \Phi\left(\frac{x_0}{\sigma}\right)} \quad (4.78)$$

Таким образом, для определения коэффициента c можно использовать таблицы функции Лапласа или квантилей нормального распределения.

При $0 \leq x \leq \infty$ характеристики усеченного нормального распределения

$$\overline{M}(x) = M(x) + k\sigma, \quad \overline{D}(x) = \overline{\sigma}^2 = \sigma^2 \left[1 - k^2 - k \frac{M(x)}{\sigma} \right], \quad (4.79)$$

где $\overline{M}(x)$, $\overline{D}(x)$ и $\overline{\sigma}$ – математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение для усеченного нормального распределения, $M(x)$, $D(x)$ и σ – те же параметры для нормального распределения,

$$k = \frac{c}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{M^2(x)}{2\sigma^2} \right]. \quad (4.80)$$

Анализ формулы (4.78) показывает, что при $x_0 > 2\sigma$, что обычно имеет место на практике, коэффициент c очень незначительно отличается от единицы ($c \approx 1$), в связи с чем необходимость учета усечения нормального распределения, связанного с ограничением интервала изменения случайной величины, отпадает. При этом $\overline{M}(x) \approx M(x)$ и $\overline{\sigma} \approx \sigma$.

Для усеченного нормального распределения интегральная функция

$$F(x) = c \left[\frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x - x_0}{\sigma}\right) \right]. \quad (4.81)$$

В теории надежности для описания наработки до отказа элементов в период наступления усталости материалов и износных отказов, а также наработки некоторых сложных технических систем часто используется логарифмически нормальное распределение (рис.4.5), когда по нормальному закону распределен логарифм случайной величины.

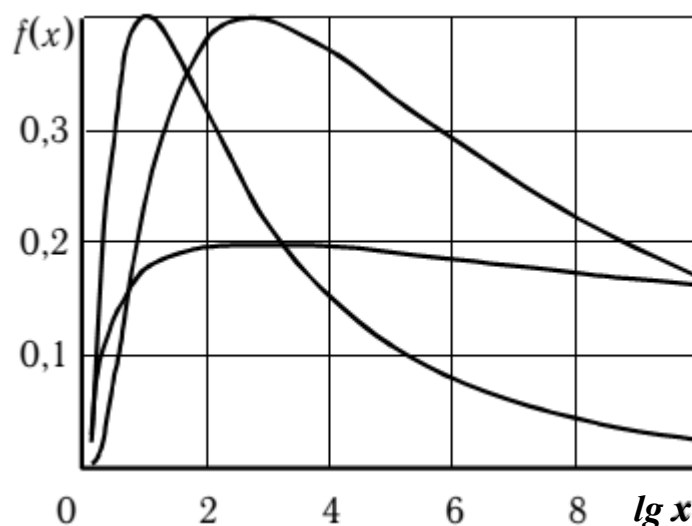


Рис. 4.5. Логарифмически нормальное распределение

Распределение Вейбулла (рис.4.6) в теории надежности используется для описания отказов объектов с монотонной интенсивностью и обладает большим разнообразием форм. Оно может задаваться в виде:

$$F(x) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{x}{a} \right)^b \right], \quad f(x) = \frac{b}{a} \left(\frac{x}{a} \right)^{b-1} \exp \left[- \left(\frac{x}{a} \right)^b \right], \quad x \geq 0 \quad (4.82)$$

где $a > 0$ и $b > 0$ – параметры масштаба и формы.

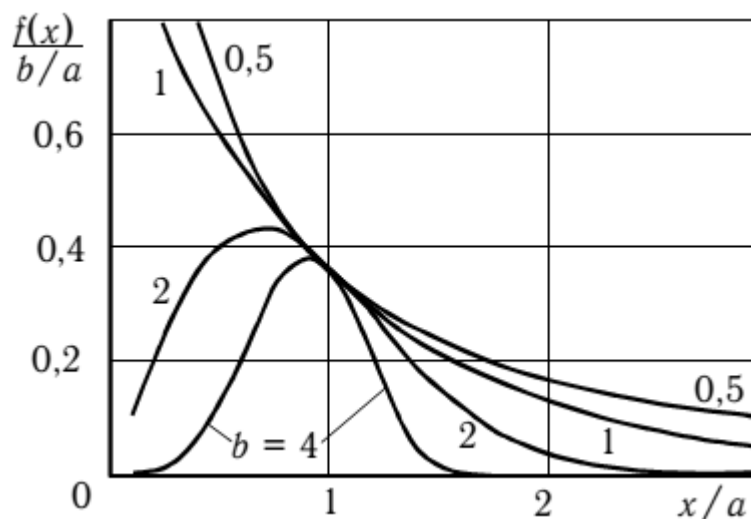


Рис.4.6. Распределение Вейбулла

Особенностью распределения Вейбулла является то, что с изменением параметра формы b изменяется и вид графика функции плотности распределения (рис.4.6). Это свойство часто позволяет соответствующим подбором параметров обеспечить хорошее совпадение опытных данных с аналитическими выражениями.

Основные характеристики распределения Вейбулла:

$$M(x) = aK, \quad D(x) = a^2(C - K^2), \quad v = \sqrt{\frac{C}{K^2} - 1}, \quad (4.83)$$

где $K = \Gamma(1 + 1/b)$, $C^2 = \Gamma(1 + 2/b) - K^2$, $\Gamma(z) = \int_0^\infty u^{z-1} \exp(-u) du$ – гамма-функция.

Распределение Вейбулла включает в себя как частные случаи экспоненциальное распределение (при $b = 1$) и *распределение Рэлея* ($b = 2$), при $b > 3,5$ близко к нормальному. Иногда используется форма записи, отличная от формулы (4.82):

$$F(x) = 1 - \exp(-\lambda x^\alpha), \quad f(x) = \alpha \lambda x^{\alpha-1} \exp(-\lambda x^\alpha). \quad (4.84)$$

Очевидно при этом $\alpha = b$ и $\lambda = (1/\alpha)^b$.

Гамма-распределение также достаточно универсально:

$$F(x) = \frac{1}{a\Gamma(b+1)} \int_0^x \left(\frac{x}{a}\right)^b \exp\left(-\frac{x}{a}\right) dx, \quad f(x) = \frac{1}{a\Gamma(b+1)} \left(\frac{x}{a}\right)^b \exp\left(-\frac{x}{a}\right). \quad (4.85)$$

Параметры $a > 0$ и $b > -1$ в гамма-распределении являются параметрами масштаба и формы (рис.4.7).

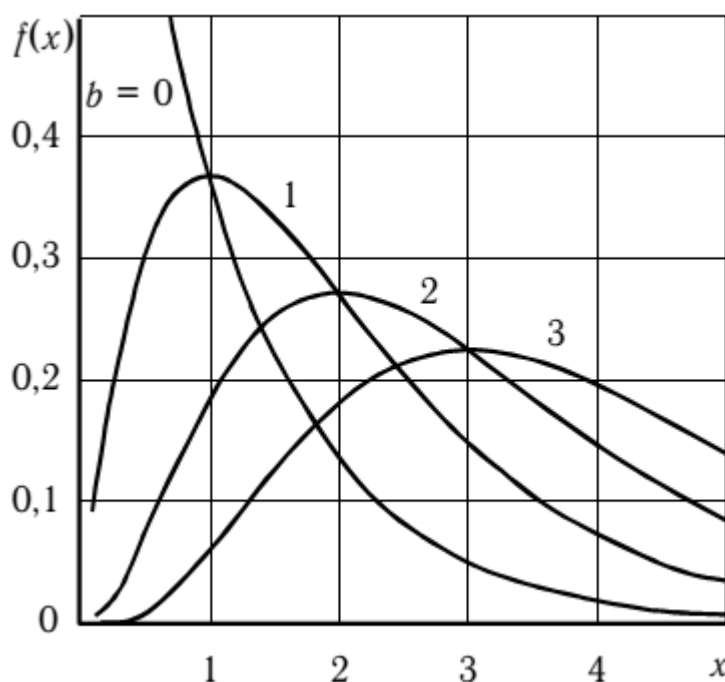


Рис. 4.7. Стандартное гамма-распределение.

Основные характеристики гамма-распределения:

$$M(x) = a(b + 1), \quad D(x) = a^2(b + 1), \quad v = \frac{1}{\sqrt{b + 1}}. \quad (4.86)$$

Гамма-распределение хорошо описывает наработку до отказа многих невосстанавливаемых технических систем. Если независимые случайные величины x_i имеют одинаковое экспоненциальное распределение, то их сумма имеет гамма-распределение, поэтому оно может использоваться для описания системы с резервированием элементов замещением.

4.2.5 Смеси распределений

Часто в практических ситуациях случайная величина является смесью двух или более случайных величин с различными распределениями.

Если функции $f_1(x_1), f_2(x_1), \dots, f_n(x_n)$ являются функциями плотности вероятности некоторых случайных величин и сумма вероятностей этих величин p_i равна единице ($p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$), то функция

$$f(x) = p_1 f_1(x_1) + p_2 f_2(x_2) + \dots + p_n f_n(x_n) = \sum_{i=1}^n p_i f_i(x_i) \quad (4.87)$$

является плотностью смеси распределений.

Соответствующая интегральная функция имеет вид

$$F(x) = p_1 F_1(x_1) + p_2 F_2(x_2) + \dots + p_n F_n(x_n) = \sum_{i=1}^n p_i F_i(x_i), \quad (4.88)$$

где $F_i(x_i)$ – интегральные функции распределений плотности $f_i(x_i)$.

Из формулы (4.87) следует, что математическое ожидание смеси распределений

$$M(x) = p_1 M_1(x_1) + p_2 M_2(x_2) + \dots + p_n M_n(x_n) = \sum_{i=1}^n p_i M_i(x_i). \quad (4.89)$$

Одной из практически важных теорем теории вероятностей является *центральная предельная теорема*, согласно которой распределение суммы независимых случайных величин $x = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ с любыми распределениями вероятностей стремится в пределе к нормальному закону с математическим ожиданием $n\mu$, и дисперсией $n\sigma^2$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ a < \frac{x - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} < b \right\} = \Phi(b) - \Phi(a). \quad (4.90)$$

Центральная предельная теорема является теоретической основой применения нормального распределения при решении многих задач теории надежности, в частности при определении наработки на отказ в результате усталостных изменений и при расчетах параметров надежности методами статистического моделирования.

4.2.6 Регрессионные зависимости

Случайные величины, зависящие от одних и тех же случайных факторов, называются *стохастически* (или *статистически*) *зависимыми*. Например, если случайные величины x и y зависят от случайных факторов z_i

$$x = x(z_1, z_2, \dots, z_n), \quad y = y(z_1, z_2, \dots, z_m), \quad (4.91)$$

то они стохастически зависимы. В общем случае, если $n \neq m$, то среди случайных факторов z_i есть такие, которые влияют на одну из величин x и y .

Регрессией называется любая функция $g(x)$, приближенно представляющая стохастическую зависимость одной случайной величины y от другой x . Случайная величина y представляется как сумма двух случайных величин

$$y = g(x) + h(x, y), \quad (4.92)$$

при этом случайная величина $h(x, y)$ рассматривается в качестве поправочного члена (*остатка*).

Средняя квадратическая регрессия

$$g(x) = M(y|x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{y|x}(y|x) dx \quad (4.93)$$

минимизирует средний квадрат отклонения $g(x)$ от y (т.е. минимизирует среднее значение квадрата остатка $h(x, y)$):

$$M\{[y - g(x)]^2\} = M[h^2(x, y)]. \quad (4.94)$$

Соответствующая кривая $y = M(y|x)$ называется кривой средней квадратической регрессии.

Часто оказывается достаточным аппроксимировать регрессию (4.93) линейной функцией (*линейной регрессией*) вида

$$g(x) = M(y) + \beta_{yx}[x - M(x)] = \mu_y + \beta_{yx}(x - \mu_x), \quad (4.95)$$

где μ_x и μ_y – математические ожидания, β_{yx} – теоретический коэффициент регрессии.

Для того чтобы минимизировать средний квадрат отклонения (4.94), в выражении (4.95) коэффициент регрессии β_{yx} рассчитывается по формуле

$$\beta_{yx} = \rho_{yx} \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x \sigma_y} \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x^2}, \quad (4.96)$$

где ρ_{yx} и $\text{cov}(x, y)$ – коэффициент корреляции и ковариация случайных величин x и y , σ_x и σ_y – средние квадратические отклонения случайных величин x и y .

При определении коэффициента регрессии по формуле (4.96) средний квадрат отклонения (4.94) (*остаточная дисперсия*) равен $\sigma_y^2(1 - \rho_{yx}^2)$, поэтому коэффициент корреляции ρ_{yx} может служить мерой качества линейной аппроксимации (4.95).

Регрессия (4.93) может быть более точно аппроксимирована многочленами более высоких степеней или другими функциями, однако линейная регрессия (4.95) используется чаще всего.