ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 6.

Расчет надежности системы с поэлементным резервированием.

Теоретические сведения

При поэлементном резервировании резервируются отдельно элементы системы (рис.6.1.). Определим количественные характеристики надежности системы.

Запишем вероятность отказа i - ой группы. Имеем

$$q_i(t) = \prod_{j=0}^{m} q_{ij}(t) \ ; \quad i = \overline{1,n}, \tag{6.1}$$

где $q_{ij}(t)$ - вероятность отказа элемента $Э_{ij}$ на интервале времени (0, t).

Запишем вероятность безотказной работы j-ой группы. Получим

$$p_i(t) = 1 - q_i(t) = 1 - \prod_{j=o}^{m_i}\left[1 - p_{ij}(t)\right] \ ; \quad i = \overline{1,n} \ , \tag{6.2}$$

где $P_{ij}(t)$ - вероятность безотказной работы элемента $Э_{ij}$ на интервале времени (0,t); m_i - кратность резервирования элемента j-ой группы.

Запишем вероятность безотказной работы системы с поэлементным резервированием

$$p_c(t) = \prod_{i=1}^{n} p_i(t)$$

или

$$p_c(t) = \prod_{i=1}^{n}\left\{1 - \prod_{j=0}^{m_i}\left[1 - p_{ij}(t)\right]\right\}. \tag{6.3}$$

Теоретические сведения

Для равнонадежных элементов системы и m_i=m=const имеем

$$P_{ij}(t)=P(t)\ ; \tag{6.4}$$

$$P_c(t) =[1-[1-P(t)]^{m+1}]^n\ . \tag{6.5}$$

Если

$$P_{ij}(t)=P_i(t), \tag{6.6}$$

то формула (6.3) примет вид

$$p_c(t)=\prod_{i=1}^{n}\left\{1-\left[1-p_i(t)\right]^{m_i+1}\right\}\ .$$

(6.7)

При экспоненциальном законе надежности, когда $P_i(t)=e^{-\lambda_i t}$,

$$p_c(t)=\prod_{i=1}^{n}\left\{1-\left[1-e^{-\lambda_i t}\right]^{m_i+1}\right\}. \tag{6.8}$$

В этом случае формула (6.5) примет вид

$$p_c(t)=\left\{1-\left[1-e^{-\lambda t}\right]^{m+1}\right\}^{n}, \tag{6.9}$$

Теоретические сведения

а среднее время безотказной работы системы определяется соотношением

$$m_{tc} = \int_0^{\infty} p_c(t)dt. \qquad (6.10)$$

Подставляя (6.9) в (6.10),получим

$$m_{tc} = \frac{(n-1)!}{\lambda(m+1)} \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{\nu_j(\nu_j+1)\ldots(\nu_j+n-1)}, \qquad (6.11)$$

где $\nu_j=(j+1)/(m+1)$.

Решение типовых задач.

Задача 6.1. Для повышения надежности усилителя все его элементы дублированы. Предполагается, что справедлив экспоненциальный закон надежности для элементов системы. Необходимо найти вероятность безотказной работы усилителя в течение t =5000 час. Состав элементов нерезервированного усилителя и данные по интенсивности отказов элементов приведены в табл.6.1.

Таблица 6.1.

Элементы	Количество элементов	Интенсивность отказов элемента λ, 10^{-5} 1/час
Транзисторы	1	2,16
Резисторы	5	0,23
Конденсаторы	3	0,32
Диоды	1	0,78
Катушки индуктивности	1	0,09

Решение. В рассматриваемом случае имеет место раздельное резервирование с кратностью m_i = m= 1, число элементов нерезервированного усилителя n = 11. Тогда, используя данные табл.6.1., на основании формулы (6.8) получим

$$p_c(5000) = \prod_{i=1}^{11}\left\{1-\left[e^{-\lambda_i \cdot 5000}\right]^2\right\}.$$

Так как $\lambda_i \ll 1$, то для приближенного вычисления показательную функцию можно разложить в ряд и ограничиться первыми двумя членами разложения: $1-\exp(-5000\lambda_i) \approx 5000\lambda_i$.

Решение типовых задач.

Тогда

$$p_c(5000) \approx \prod_{i=1}^{11}\left[1-(5000\lambda_i)^2\right] \approx 1-\sum_{i=1}^{11}(5000\lambda_i)^2 = 1-5000^2\cdot\sum_{i=1}^{11}\lambda_i^2 =$$

$$=1-25*10^{-6}[2.16^2+5*0.23^2+3*0.32^2+0.78^2+0.09^2]*10^{-10}\approx 0.985\ .$$

Задача 6.2. Схема расчета надежности резервированного устройства приведена на рис.6.2. Интенсивности отказов элементов имеют следующие значения : λ_1=0,23*10^{-3} 1/час; λ_2=0,5*10^{-4} 1/час; λ_3=0,4*10^{-3} 1/час. Предполагается, что справедлив экспоненциальный закон надежности для элементов системы. Необходимо найти среднее время безотказной работы устройства, вероятность безотказной работы устройства, интенсивность отказов устройства.

Решение.

$$m_{tc} = \int_0^{\infty} p_c(t)dt. \qquad (6.12)$$

где $P_c(t)$ - вероятность безотказной работы устройства. Очевидно

$$P_c(t) = P_I(t)*P_{II}(t)*P_{III}(t)\ . \qquad (6.\ 13$$

Решение типовых задач.

Здесь $P_I(t)$, $P_{II}(t)$, $P_{III}(t)$ - вероятность безотказной работы I,П и Ш группы элементов. Имеем

$$P_I(t) = 1 - q_I(t);\ q_I(t) = [1 - P_1(t)]^2;$$
$$P_I(t) = 1 - [1 - P_1(t)]^2 = 2P_1(t) - P_1^2(t);$$
$$P_{II}(t) = P_2(t);$$
$$P_{III}(t) = 1 - q_{III}(t);\ q_{III}(t) = [1 - P_3(t)]^2;$$
$$P_{III}(t) = 1 - [1 - P_3(t)]^2 = 2P_3(t) - P_3^2(t).$$

Из (16.13) имеем

$$P_c(t) = [2P_1(t) - P_1^2(t)]P_2(t)\,[2P_3(t) - P_3^2(t)] =$$
$$= 4P_1(t)\,P_2(t)\,P_3(t) - 2P_1^2(t)P_2(t)\,P_3(t) - 2P_1(t)P_2(t)\,P_3^2(t) + P_1^2(t)P_2(t)\,P_3^2(t).$$

Так как $P_1(t) = e^{-\lambda_1 t}$; $P_2(t) = e^{-\lambda_2 t}$; $P_3(t) = e^{-\lambda_3 t}$, то

$$P_c(t) = 4e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)t} - 2e^{-(2\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)t} - e^{-(\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3)t} + e^{-(2\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3)t}$$

или

$$P_c(t) = 4e^{-0,68*0,001*t} - 2e^{-0,91*0,001*t} - 2e^{-1,08*0,001*t} + e^{-1,31*0,001*t}. \qquad (6.14$$

Подставляя (6.14) в (6.12), получим

$$m_{tc} = \frac{4}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} - \frac{2}{2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} - \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3} + \frac{1}{2\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3}$$

Решение типовых задач.

или

$$m_{tc} = \frac{4}{10^{-3}(0.23+0.05+0.4)} - \frac{2}{10^{-3}(0.46+0.05+0.4)} -$$

$$-\frac{2}{10^{-3}(0.23+0.05+0.8)} + \frac{1}{10^{-3}(0.46+0.05+0.8)} \approx 2590 \text{ ÷àñ} .$$

Известно, что $$\lambda_c(t) = \frac{f_c(t)}{p(t)} . \qquad (6.15)$$

Определим $f_c(t)$. Имеем

$$f_c(t) = -\frac{dp_c(t)}{dt} = 4(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)t} - 2(2\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)e^{-(2\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)t} - \qquad (6.16)$$

$$-2(\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3)e^{-(\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3)t} + (2\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3)e^{-(2\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3)t}$$

или

$$f_c(t) = 10^{-3}(2.72e^{-0.68\cdot 10^{-3}t} - 1.82e^{-0.91\cdot 10^{-3}t} - 2.16e^{-1.08\cdot 10^{-3}t} + 1.31e^{-1.31\cdot 10^{-3}t}).$$

Из (6.15) получим

$$\lambda_c(t) = \frac{10^{-3}\left(2.72e^{-0.68\cdot 10^{-3}t} - 1.82e^{-0.91\cdot 10^{-3}t} - 2.16e^{-1.08\cdot 10^{-3}t} + 1.31e^{-1.31\cdot 10^{-3}t}\right)}{4e^{-0.68\cdot 10^{-3}t} - 2e^{-0.91\cdot 10^{-3}t} - 2e^{-1.08\cdot 10^{-3}t} + e^{-1.31\cdot 10^{-3}t}}.$$

Решение типовых задач.

Задача 6,3. Схема расчета надежности устройства приведена на рис. 6.3. Предполагается, что справедлив экспоненциальный закон надежности, для элементов устройства и все элементы устройства равнонадежны. Интенсивность отказов элемента $\lambda = 1{,}33*10^{-3}$ 1/час. Требуется определить $f_c(t)$,m_{tc}, $P_c(t)$, $\lambda_c(t)$ резервированного устройства.

Решение

$$m_{tc} = \int_0^\infty p_c(t)dt \quad ; \qquad (6.17)$$

$P_c(t)=P_I(t)*P_{II}(t)=P_I^2(t)$, т.к. $P_I(t)=P_{II}(t)$;

$P_I(t)=1-q_I(t)$; $q_I(t)=q^2(t)$; $q(t)=1-P(t)$; $P(t)=e^{-\lambda t}$;

$q(t)=1-e^{-\lambda t}$; $q_I(t)=(1-e^{-\lambda t})^2$; $P_I(t)=1-(1-e^{-\lambda t})^2$;

$P_c(t)=[1-(1-e^{-\lambda t})^2]^2$

или

$$P_c(t)=(1-1+2e^{-\lambda t}-e^{-2\lambda t})^2 = 4e^{-2\lambda t} - 4e^{-3\lambda t} + e^{-4\lambda t} . \qquad (6.18)$$

Подставляя (6.18) в (6.17), получим

$$m_{tc} = \int_0^\infty (4e^{-2\lambda t} - 4e^{-3\lambda t} + e^{-4\lambda t})dt = \frac{2}{\lambda} - \frac{4}{3\lambda} + \frac{1}{4\lambda} = \frac{11}{12\lambda};$$

$$m_{tc} = \frac{11}{12 \cdot 1.33 \cdot 10^{-3}} = 690 \text{ час} .$$

Решение типовых задач.

0пределим $f_c(t)$, Имеем

$$f_c(t) = -\frac{dp_c(t)}{dt} = 8\lambda e^{-2\lambda t} - 12\lambda e^{-3\lambda t} + 4\lambda e^{-4\lambda t} = 4\lambda e^{-2\lambda t}(2 - 3e^{-\lambda t} + e^{-2\lambda t}).$$

Определим $\lambda_c(t)$. Имеем

$$\lambda_c(t) = \frac{f_c(t)}{p_c(t)} = \frac{4\lambda \cdot e^{-2\lambda t}\left(2 - 3e^{-\lambda t} + e^{-2\lambda t}\right)}{e^{-2\lambda t}\left(4 - 4e^{-\lambda t} + e^{-2\lambda t}\right)} =$$

$$= \frac{4\lambda \cdot \left(2 - 3e^{-\lambda t} + e^{-2\lambda t}\right)}{\left(2 - e^{-\lambda t}\right)^2} = \frac{4\lambda \cdot \left(1 - e^{-\lambda t}\right) \cdot \left(2 - e^{-\lambda t}\right)}{\left(2 - e^{-\lambda t}\right)^2} = \frac{4\lambda \cdot \left(1 - e^{-\lambda t}\right)}{2 - e^{-\lambda t}}.$$

Задача 6.4. Нерезервированная система управления состоит из $n=5000$ элементов. Для повышения надежности системы предполагается провести раздельное дублирование элементов. Чтобы приближенно оценить возможность достижения заданной вероятности безотказной работы системы $P_c(t) = 0{,}9$ при $t = 10$ час, необходимо рассчитать среднюю интенсивность отказов одного элемента при предположении отсутствия последействия отказов.

Решение, Вероятность безотказной работы системы при раздельном дублировании и равнонадежных элементах равна:

$$p_c(t) = \left\{1 - \left[1 - p(t)\right]^2\right\}^n,$$

где $P(t)$ - вероятность безотказной работы одного элемента.

Решение типовых задач.

Так как должно быть

$$\left\{1-\left[1-p(t)\right]^2\right\}^n \geq 0.9,$$

то

$$p(t) \geq 1-\sqrt{1-\sqrt[n]{0.9}}.$$

Разложив $\sqrt[n]{0.9}=(1-0.1)^{1/n}$ по степени 1/n в ряд и пренебрегая членами ряда высшего порядка малости, получим

$$(1-0.1)^{1/5000} \approx 1-\frac{1}{5000}\cdot 0.1 = 1-2\cdot 10^{-5}.$$

Учитывая, что $P(t)=\exp(-\lambda t)\approx 1-\lambda t$, интенсивность отказов элемента должна быть

$$\lambda \leq \frac{1}{t}\sqrt{1-\sqrt[n]{0.9}} = \frac{1}{10}\sqrt{1-1+2\cdot 10^{-5}} \approx 4.4\cdot 10^{-4} \quad 1/\text{час}.$$

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 6.5. Схема расчета надежности устройства показана на рис.б.4. Предполагается, что справедлив экспоненциальный закон надежности для элементов устройства. Интенсивности отказов элементов имеет следующие значения $\lambda_1=0{,}3*10^{-3}$ 1/час, $\lambda_2=0{,}7*10^{-3}$ 1/час. Необходимо определить вероятность безотказной работы устройства в течении времени $t = 100$ час.

Задача 6.7. В телевизионном канале связи, состоящем из приемника и передатчика, применено раздельное дублирование передатчика и приемника. Передатчик и приемник имеют интенсивности отказов $\lambda_п=2*10^{-3}$ 1/час и $\lambda_{пр}=1*10^{-3}$ 1/час соответственно. Схема канала представлена на рис.б.б. Требуется определить вероятность безотказной работы канала $P_c(t)$, среднее время безотказной работы m_{tc}, частоту отказов $f_c(t)$, интенсивность отказов $\lambda_c(t)$.

Задача 6.8, Схема расчета надежности системы приведена на рис.6.7., где также приведены интенсивности отказов элементов. Требуется определить вероятность безотказной работы системы $P_c(t)$ и частоту отказов $f_c(t)$.

Задача 6.9. Радиоэлектронная аппаратура состоит из трех блоков: I,П, и Ш. Интенсивности отказов для этих трех блоков соответственно равны: $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$. Требуется определить вероятность безотказной работы аппаратуры Pc(t) для следующих случаев:

а) резерв отсутствует

б) имеется дублирование каждого блока.

Задача 6.10. Нерезервированная система управления состоит из $n =4000$ элемвнтов. Известна требуемая вероятность безотказной работы системы $P_c(t) =0{,}9$ при $t=100$ час. Необходимо рассчитать допустимую среднюю интенсивность отказов одного элемента, считая элементы равнонадежными, для того чтобы приближенно оценить достижение заданной вероятности безотказной работы при отсутствии профилактических осмотров в следующих

Задачи для самостоятельного решения.

случаях. а) резервирование отсутствует; б) применено раздельное (поэлементное) дублирование.

Задача 6.11. В радиопередатчике, состоящем из трех равнонадежных каскадов (n=3) применено раздельное дублирование каждого каскада. Интенсивность отказов каскадов равна $\lambda = 5*10^{-4}$ 1/час. Рассчитать вероятность безотказной работы $P_c(t)$ в течение времени t = 100 час и среднее время безотказной работы m_{tc} радиопередатчика.

Задача 6.12. Вычислитель состоит из двух блоков, соединенных последовательно и характеризуется соответственно интенсивностями отказов $\lambda_1 = 120{,}54 \cdot 10^{-6}$ *1/час* и $\lambda_2 = 185{,}66 \cdot 10^{-6}$ *1/час*.

Выполнено пассивное поэлементное резервирование с неизменной нагрузкой блока 2 (см. рис. 6.8). Требуется определить вероятность безотказной работы $P_c(t)$ вычислителя, среднее время безотказной работы m_{tc}, частоту отказов $f_c(t)$ и интенсивность отказов $\lambda_c(t)$ вычислителя. Определить $P_c(t)$ при t=20 час.

Задача 6.13. Вычислительное устройство состоит из n=3 одинаковых блоков, к каждому из которых подключен блок в нагруженном резерве. Интенсивность отказов каждого блока равна $\lambda = 10^{-4}$ *1/час*. Требуется определить вероятность безотказной работы $P_c(t)$ устройства и среднее время безотказной работы устройства m_{tc}.