ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 5.

Резервирование замещением в режиме облегченного (теплого) резерва и в режиме ненагруженного (холодного) резерва.

Теоретические сведения

В этом случае резервные элементы находятся в облегченном режиме до момента их включения в работу. Надежность резервного элемента в этом случав выше надежности основного элемента, так как резервные элементы находятся в режиме недогрузки до момента их включения в работу.

Вероятность отказа резервированной системы с облегченным резервированием определяется соотношением

$$q_c(t) = 1 - e^{-\lambda_0 t}\left[1 + \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i}{i!}\left(1 - e^{-\lambda_1 t}\right)^i\right], \tag{5.1}$$

где

$$a_i = \prod_{j=0}^{i-1}\left(j + \frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right). \tag{5.2}$$

Здесь λ_1 - интенсивность отказа резервного элемента в режиме недогрузки до момента включения его в работу ; λ_0 - интенсивность отказа резервного элемента в состоянии работы; m - кратность резервирования или количество резервных элементов. Вероятность безотказной работы системы с облегченным резервированием определяется формулой

$$P_c(t) = 1 - q_c(t) = e^{-\lambda_0 t}\left[1 + \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i}{i!}\left(1 - e^{-\lambda_1 t}\right)^i\right]. \tag{5.3}$$

Теоретические сведения

Имеем

$$m_{tc} = \int_0^\infty p_c(t)dt = \frac{1}{\lambda_0}\sum_{i=0}^{m}\frac{1}{1+ik}, \tag{5.4}$$

где

$$k = \frac{\lambda_1}{\lambda_0}. \tag{5.5}$$

Определим частоту отказов $f_c(t)$ системы с облегченным резервированием.

Имеем

$$f_c(t) = \lambda_0 e^{-\lambda_0 t}\left[1+\sum_{i=1}^{m}\frac{a_i}{i!}\left(1-e^{-\lambda_1 t}\right)^i - \frac{\lambda_1}{\lambda_0}e^{-\lambda_1 t}\sum_{i=1}^{m}\frac{a_i}{(i-1)!}\left(1-e^{-\lambda_1 t}\right)^{i-1}\right]. \tag{5.6}$$

Определим интенсивность отказов $\lambda_c(t)$ системы с облегченным резервированием.

Получим

$$\lambda_c(t) = \frac{f_c(t)}{p_c(t)} = \lambda_0\left[1-\frac{\lambda_1}{\lambda_0}e^{-\lambda_1 t}\frac{\sum_{i=1}^{m}\frac{a_i}{(i-1)!}\left(1-e^{-\lambda_1 t}\right)^{i-1}}{1+\sum_{i=1}^{m}\frac{a_i}{i!}\left(1-e^{-\lambda_1 t}\right)^i}\right]. \tag{5.7}$$

Теоретические сведения

При $\lambda_1 = 0$ имеем режим ненагруженного (холодного) резерва. Вероятность отказа резервированной системы с ненагруженным резервированием определяется соотношением

$$q_c(t) = 1 - e^{-\lambda_0 t} \sum_{i=0}^{m} \frac{(\lambda_0 t)^i}{i!}. \tag{5.8}$$

Вероятность безотказной работы системы с ненагруженным резервом определяется формулой

$$P_c(t) = 1 - q_c(t) = e^{-\lambda_0 t} \sum_{i=0}^{m} \frac{(\lambda_0 t)^i}{i!}. \tag{5.9}$$

Определим среднее время безотказной работы системы с ненагруженным резервом. Имеем

$$m_{tc} = \int_0^\infty p_c(t)dt = \frac{m+1}{\lambda_0}. \tag{5.10}$$

Определим частоту отказов $f_c(t)$ системы с ненагруженным резервом. Имеем

$$f_c(t) = -\frac{dp_c(t)}{dt} = \frac{\lambda_0^{m+1}}{m!} t^m e^{-\lambda_0 t}. \tag{5.11}$$

Теоретические сведения

Определим интенсивность отказов $\lambda_c(t)$ системы с ненагруженным резервом. Получим

$$\lambda_c(t) = \frac{f_c(t)}{p_c(t)} = \frac{\lambda_0^{m+1} t^m}{m! \sum_{i=0}^{m} \frac{(\lambda_0 t)^i}{i!}}. \qquad (5.\ 12)$$

Решение типовых задач.

Задача 5.1. Система состоит из 10 равнонадежных элементов, среднее время безотказной работы элемента $m_t = 1000$ час. Предполагается, что справедлив экспоненциальный закон надежности для элементов системы и основная и резервная системы равнонадежны. Необходимо найти вероятность безотказной работы системы $P_c(t)$, среднее время безотказной работы системы m_{tc}, а также частоту отказов $f_c(t)$ и интенсивность отказов $\lambda_c\,(t)$ в момент времени $t = 50$ час в следующих случаях:

а) нерезервированной системы,

б) дублированной системы при включении резерва по способу замещения (ненагруженный резерв).

Решение:

а)
$$\lambda_c = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i,$$

где λ_c – интенсивность отказов системы, λ_i – интенсивность отказов i - го элемента; $n = 10$,

$$\lambda_i = \frac{1}{m_{ti}} = \frac{1}{1000} = 0.001;\ i = \overline{1, n};\lambda = \lambda_i,$$

$$\lambda_c = \lambda n = 0.001 \cdot 10 = 0.01 \quad 1/\text{÷àñ},$$

$$m_{tc} = \frac{1}{\lambda_c} = 100 \ \text{÷àñ}; \quad p_c(t)=e^{-\lambda_c t};$$

Решение типовых задач.

$$f_c(t)=\lambda_c(t)*p_c(t)\ ;\quad \lambda_c(50)=\lambda_c\ ;$$

$$f_c(50)=\lambda_c e^{-\lambda_c t}=0.01*e^{-0.01*50}\approx 6*10^{-3}\ 1/\div\grave{a}\tilde{n}\ ;$$

$$\lambda_c(50)=0.01\ 1/\div\grave{a}\tilde{n}\ .$$

á)

$$m_{tc}=\frac{m+1}{\lambda_c}\ ;\quad m=1\ ;$$

$$m_{tc}=\frac{2}{0.01}=200\ \div\grave{a}\tilde{n}\ .$$

Определяем $P_c(t)$ по формуле

$$p_c(t)=e^{-\lambda_0 t}\sum_{i=0}^{m}\frac{(\lambda_0 t)^i}{i!}=e^{-\lambda_0 t}(1+\lambda_0 t).$$

Так как $\lambda_0=\lambda_c$, то

$$P_c(t)=e^{-\lambda\tilde{n}t}(1+\lambda_c t)\ .$$

Определяем $f_c(t)$. Имеем

$$f_c(t)=-\frac{dp_c(t)}{dt}=-\left[-\lambda_c e^{-\lambda_c t}(1+\lambda_c t)+\lambda_c e^{-\lambda_c t}\right]=\lambda_c^2 t e^{-\lambda_c t}.$$

Решение типовых задач.

Определяем $\lambda_c(t)$. Получим

$$\lambda_c(t)=\frac{f_c(t)}{p_c(t)}=\frac{\lambda_c^2 t e^{-\lambda_c t}}{e^{-\lambda_c t}(1+\lambda_c t)}=\frac{\lambda_c^2 t}{1+\lambda_c t}.$$

0пределяем $P_c(50)$, $f_c(50)$, $\lambda_c(50)$.Имеем

$$p_c(50)=e^{-0.01*50}(1+0.01*50)=e^{-0.5}*1.5=0.6065*1.5\approx 0.91\ ,$$

$$f_c(50)=0.01^2*50*e^{-0.01*50}=0.01*0.5*e^{-0.5}\approx 3*10^{-3}\ 1/\text{час}\ ,$$

$$\lambda_c(50)=\frac{f_c(50)}{p_c(50)}=\frac{3\cdot 10^{-3}}{0.91}\approx 3.3\cdot 10^{-3}\ 1/\text{час}\ .$$

Задача 5.2. Радиопередатчик имеет интенсивность отказов λ_0=0,4*10^{-3} 1/час. Его дублирует такой же передатчик, находящийся до отказа основного передатчика в режиме ожидания (в режиме облегченного резерва). В этом режиме интенсивность отказов передатчика λ_1= 0,06*10^{-3} 1/час. Требуется вычислить вероятность безотказной работы передающей системы в течение времени t = 100 час., а также среднее время безотказной работы m_{tc}, частоту отказов $f_c(t)$ и интенсивность отказов $\lambda_c(t)$.

Решение. В рассматриваемом случае кратность резервирования m = 1. Используя формулу (5.3), получим

$$p_c(t)=e^{-\lambda_0 t}\cdot\left[1+\sum_{i=1}^{1}\frac{a_i}{i!}(1-e^{-\lambda_1 t})^i\right]=e^{-\lambda_0 t}\left[1+a_1(1-e^{-\lambda_1 t})\right]\quad ;$$

Решение типовых задач.

$$a_i = \prod_{j=0}^{i-1}\left(j+\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right) \quad ; \qquad a_1 = \prod_{j=0}^{0}\left(j+\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right) = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \ .$$

Тогда

$$p_c(t) = e^{-\lambda_0 t}\left(1+\frac{\lambda_0}{\lambda_1} - \frac{\lambda_0}{\lambda_1}e^{-\lambda_1 t}\right). \tag{5.13}$$

Из (5.13) имеем

$$p_c(100) = e^{-0.4\cdot 10^{-3}\cdot 100}\left(1+\frac{0.4\cdot 10^{-3}}{0.06\cdot 10^{-3}} - \frac{0.4\cdot 10^{-3}}{0.06\cdot 10^{-3}}e^{-0.06\cdot 10^{-3}\cdot 100}\right) =$$

$$= e^{-0.04}\left(1+\frac{40}{6} - \frac{40}{6}e^{-0.006}\right) \approx 0.96[1+6.67-6.67(1-0.006)]\approx 0.998 \ .$$

Определим m_{tc} по формуле (5.4.). Получим

$$m_{tc} = \frac{1}{\lambda_0}\sum_{i=0}^{1}\frac{1}{1+i\frac{\lambda_1}{\lambda_0}} = \frac{1}{\lambda_0}\left(1+\frac{1}{1+\frac{\lambda_1}{\lambda_0}}\right) = \frac{1}{\lambda_0}\left(1+\frac{\lambda_0}{\lambda_1+\lambda_0}\right) =$$

$$= \frac{1}{0.4\cdot 10^{-3}}\left(1+\frac{0.4\cdot 10^{-3}}{0.46\cdot 10^{-3}}\right) = 4668 \text{ час} \ .$$

Решение типовых задач.

$$f_c(t) = -\frac{dp_c(t)}{dt} = -\left[-\lambda_0 e^{-\lambda_0 t}\left(1+\frac{\lambda_0}{\lambda_1}-\frac{\lambda_0}{\lambda_1}e^{-\lambda_1 t}\right) + e^{-\lambda_0 t}\lambda_0 e^{-\lambda_1 t}\right] =$$

$$= \lambda_0 e^{-\lambda_0 t}\left[1+\frac{\lambda_1}{\lambda_0}-\frac{\lambda_1}{\lambda_0}e^{-\lambda_1 t} - e^{\lambda_1 t}\right] = \lambda_0 \frac{\lambda_1+\lambda_0}{\lambda_1} e^{-\lambda_0 t}\left(1-e^{-\lambda_1 t}\right).$$

Перепишем (5.13) в виде

$$p_c(t) = \frac{\lambda_1+\lambda_0}{\lambda_1} e^{-\lambda_0 t}\left(1-\frac{\lambda_0}{\lambda_1+\lambda_0}e^{-\lambda_1 t}\right).$$

Определим $\lambda_c(t)$. Получим

$$\lambda_c(t) = \frac{f_c(t)}{p_c(t)} = \frac{\lambda_0\left(1-e^{-\lambda_1 t}\right)}{1-\frac{\lambda_0}{\lambda_1+\lambda_0}e^{-\lambda_1 t}}.$$

Задача 5.3. Вероятность безотказной работы преобразователя постоянного тока в переменный в течении времени t=1000 час. равна 0,95, т. е. P(1000) = 0,95. Для повышения надежности системы электроснабжения на объекте имеется такой же преобразователь, который включается в работу при отказе первого (режим ненагруженного резерва). Требуется рассчитать вероятность безотказной работы и среднее время безотказной работы системы, состоящей из двух преобразователей, а также определить частоту отказов $f_c(t)$ и интенсивность отказов $\lambda_c(t)$ системы.

Решение типовых задач.

Решение. В рассматриваемом случае кратность резервирования $m = 1$. Используя формулу (5.9), получим

$$p_c(t) = e^{-\lambda_0 t} \sum_{i=0}^{m} \frac{(\lambda_0 t)^i}{i!} = e^{-\lambda_0 t}(1 + \lambda_0 t). \qquad (5.14)$$

Так как для отдельного преобразователя имеет место экспоненциальный закон надежности то

$$P(t)=e^{-\lambda \hat{\imath} t}, \qquad (5.15)$$

где P(t)- вероятность безотказной работы преобразователя; λ_0 – интенсивность отказов преобразователя в состоянии работы.

Из (5.15) имеем

$$P(1000)=e^{-\lambda o*1000}=0{,}95\ .$$

Из приложения П.7.14 [1] получим

$$\lambda_0*1000=0{,}051,$$

откуда

$$\lambda_0=0{,}051/1000\approx0{,}5*10^{-4}\ 1/\text{час}.$$

Тогда из (5.14) имеем

$$P_c(1000)=0{,}95(1+0{,}05)=0{,}9975\ .$$

Определим m_{tc} по формуле (5.10). Получим

$$m_{tc} = (m+1)/\lambda_0=2/\lambda_0=2/(0{,}5*10^{-4}) = 40000\ \text{час}\ .$$

Решение типовых задач.

Отметим, что среднее время безотказной работы нерезервированного преобразователя равно

$$m_{tc} = 1/\lambda_0 = 20000 \text{ час.}$$

Определим частоту отказов $f_c(t)$ по формуле (5.11). Имеем

$$f_c(t) = \frac{\lambda_0^2}{1!} t e^{-\lambda_0 t} = \lambda_0^2 t e^{-\lambda_0 t}.$$

Определим $\lambda_c(t)$. Получим

$$\lambda_c(t) = \frac{f_c(t)}{p_c(t)} = \frac{\lambda_0^2 t \cdot e^{-\lambda_0 t}}{e^{-\lambda_0 t}(1+\lambda_0 t)} = \frac{\lambda_0^2 t}{1+\lambda_0 t}.$$

Решение типовых задач.

Разложив $\left(1-\sqrt{0.1}\right)^{1/n}$ по степени 1/n в ряд и пренебрегая членами ряда высшего порядка малости, получим

$$\left(1-\sqrt{0.1}\right)^{1/5000} \approx 1-\frac{1}{5000}\sqrt{0.1} = 1-6.32\cdot 10^{-5}.$$

Учитывая, что $P(t)= \exp(-\lambda t) \approx 1-\lambda t$, получим

$$1-\lambda t \geq 1-6{,}32*10^{-5}$$

или

$$\lambda \leq (6{,}32*10^{-5})/t=(6{,}32*10^{-5})/10=6{,}32*10^{-6}\ \text{1/час}.$$

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 5.4. Система состоит из двух одинаковых элементов. Для повышения ее надежности конструктор предложил дублирование системы по способу замещения с ненагруженным состоянием резерва (рис.5.1). Интенсивность отказов элемента равна λ . Требуется определить вероятность безотказной работы системы $P_c(t)$, среднее время безотказной работы m_{tc} , частоту отказов $f_c(t)$, интенсивность отказов $\lambda_c(t)$.

Задача 5.5. Схема расчета надежности изделия приведена на рис.5.2. Необходимо определить вероятность безотказной работы $P_c(t)$, частоту отказов $f_c(t)$, интенсивность отказов $\lambda_c(t)$ изделия. Найти $\lambda_c(t)$ при $t = 0$.

Задача 5.6. Схема расчета надежности системы приведена на рис.5.3, где А,Б,В,Г - блоки системы. Определить вероятность безотказной работы $P_c(t)$ системы.

Задача 5.7. Схема расчета надежности системы приведена на рис.5.4. Определить вероятность безотказной работы Pc(t) системы.

Задача 5.8. Передающее устройство состоит из одного работающего передатчика ($\lambda=8*10^{-3}$ 1/час) и одного передатчика в облегченном резерве ($\lambda_0 = 8*10^{-4}$ 1/час) . Требуется определить вероятность безотказной работы устройства $P_c(t)$, среднее время безотказной работы устройства m_{tc}. Определить Pc(t) при t = 20 час.

Задача 5.9. В радиопередающем канале связной системы используется основной передатчик $П_1$, два передатчика $П_2$ и $П_3$, находящиеся в ненагруженном резерве. Интенсивность отказов основного работающего передатчика равна $\lambda_0=10^{-3}$ 1/час. С момента отказа передатчика $П_1$ в работу включается $П_2$, после отказа передатчика $П_2$ включается $П_3$. При включении резервного передатчика в работу его интенсивность отказов становится равной λ_0.. Считая переключатель абсолютно надежным, определить вероятность безотказной работы $P_c(t)$ радиопередающего канала, среднее время безотказной работы m_{tc} канала. Определить также $P_c(t)$ при t=100 час.

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 5.10. Устройство автоматического поиска неисправностей состоит из двух логических блоков. Среднее время безотказной работы этих блоков одинаково и для каждого из них равно $m_t = 200$ час. Требуется определить среднее время безотказной работы устройства m_{tc} для двух случаев: а) имеется ненагруженный резерв всего устройства; б) имеется ненагруженный резерв каждого блока.