ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 2.

Аналитическое определение количественных характеристик надёжности изделия.

Теоретические сведения

Выпишем формулы, по которым определяются количественные характеристики надежности изделия

$$p(t) = \exp(-\int_0^t \lambda(t)dt) = 1 - \int_0^t f(t)dt; \qquad (2.1)$$

$$q(t) = 1 - p(t); \qquad (2.2)$$

$$f(t) = \frac{dq(t)}{dt} = -\frac{dp(t)}{dt}; \qquad (2.3)$$

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{p(t)}; \qquad (2.4)$$

$$m_t = \int_0^\infty p(t)dt, \qquad (2.5)$$

где p(t) - вероятность безотказной работы изделия на интервале времени от 0 до t; q(t) - вероятность отказа изделия на интервале времени от 0 до t; f(t) - частота отказов изделия или плотность вероятности времени безотказной работы изделия T;

λ(t) - интенсивность отказов изделия; m_t - среднее время безотказной работы изделия.

Формулы (2.1) - (2.5) для экспоненциального закона распределения времени безотказной работы изделия примут вид

$$p(t) = e^{-\lambda t}; \tag{2.6}$$

$$q(t) = 1 - e^{-\lambda t}; \tag{2.7}$$

$$f(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t}; \tag{2.8}$$

$$\lambda(t) = \frac{\lambda \cdot e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = \lambda \;; \quad (2.9)$$

$$m_t = \frac{1}{\lambda} \;. \quad (2.10)$$

где p(t) - вероятность безотказной работы изделия на интервале времени от 0 до t; q(t) - вероятность отказа изделия на интервале времени от 0 до t; f(t) - частота отказов изделия или плотность вероятности времени безотказной работы изделия T;
λ(t) - интенсивность отказов изделия; m_t - среднее время безотказной работы изделия.

Формулы (2.1) - (2.5) для нормального закона распределения времени безотказной работы изделия примут вид

$$p(t) = 0{,}5 - \Phi(U); \qquad U = \frac{t - m_t}{\sigma_t}\ ; \qquad (2.11)$$

$$q(t) = 0{,}5 + \Phi(U); \qquad \Phi(U) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^U e^{-\frac{U^2}{2}} dU\ ; \qquad (2.12)$$

$$f(t) = \frac{\varphi(U)}{\sigma_t}\ ; \qquad \varphi(U) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{U^2}{2}}\ ; \qquad (2.13)$$

$$\lambda(t) = \frac{\varphi(U)}{\sigma(t)} \cdot \frac{1}{0.5 - \Phi(U)}\ , \qquad (2.14)$$

где Ф(U) - функция Лапласа, обладающая свойствами

$$\Phi(0)=0 \ ; \qquad (2.15)$$

$$\Phi(-U) = -\Phi(U) \ ; \qquad (2.16)$$

$$\Phi(\infty)=0.5 \ . \qquad (2.17)$$

Значения функции Лапласа и функции ϕ(U) табулированы, их можно найти в справочной литературе.

Здесь m_t - среднее значение случайной величины Т;

σ_t^2 - дисперсия случайной величины Т;

Т- время безотказной работы изделия.

Формулы (2.1) - (2.5) для закона распределения Вейбулла времени безотказной работы изделия имеют вид

$$\mathrm{p(t)} = e^{-at^{k}} \;; \tag{2.18}$$

$$\mathrm{q(t)} = 1 - e^{-at^{k}} \;; \tag{2.19}$$

$$f(t) = akt^{k-1} \cdot p(t) \;; \tag{2.20}$$

$$\lambda(t) = akt^{k-1} \;; \tag{2.21}$$

$$m(t) = \frac{\frac{1}{k}\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)}{a^{\frac{1}{k}}} \;, \tag{2.22}$$

где a,k - параметры закона распределения Вейбулла. Г (x) - гамма-функция.

Формулы (2.1) - (2.5) для закона распределения Релея времени безотказной работы изделия имеют вид

$$p(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma_t^{\ 2}}\right) \ ; \tag{2.23}$$

$$q(t) = 1 - \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma_t^{\ 2}}\right) \ ; \tag{2.24}$$

$$f(t) = \frac{t}{\sigma_t^{\ 2}} \cdot \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma_t^{\ 2}}\right) \ ; \tag{2.25}$$

$$\lambda(t) = \frac{t}{\sigma_t^{\ 2}} \ ; \tag{2.26}$$

$$m(t) = \sigma_t \sqrt{\frac{\pi}{2}} \ , \tag{2.27}$$

где σ_t - мода распределения случайной величины T;
T - время безотказной работы изделия.

<u>Решение типовых задач</u>.

<u>Задача 2.1</u>. Время работы элемента до отказа подчинено экспоненциальному закону распределения с параметром $\lambda=2.5\bullet10^{-5}$ 1/час.

Требуется вычислить количественные характеристики надежности элемента $p(t), q(t), f(t), m_t$ для t=1000час.

<u>Решение</u>. Используем формулы (2.6), (2.7), (2.8), (2.10) для $p(t), q(t), f(t), m_t$.

1. Вычислим вероятность безотказной работы:

$$p(t) = e^{-\lambda t} = e^{-2.5\cdot10^{-5}t} .$$

Используя данные таблицы П.7.14 [1] получим

$$p(1000) = e^{-2.5\cdot10^{-5}\cdot1000} = e^{-0.025} = 0.9753 .$$

2. Вычислим вероятность отказа q(1000). Имеем

q(1000)=1-p(1000)=0.0247 .

3. Вычислим частоту отказов

$$f(t) = \lambda(t)p(t) = 2.5\cdot10^{-5}\cdot e^{-2.5\cdot10^{-5}\cdot t} ;$$

$$f(1000) = 2.5\cdot10^{-5}\cdot e^{-2.5\cdot10^{-5}1000} = 2.5\cdot10^{-5}\cdot0.9753 = 2.439\cdot10^{-5}\ 1/\text{час}.$$

4. Вычислим среднее время безотказной работы

$$m_t = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2.5\cdot10^{-5}} = 40000\ \text{час}.$$

<u>Задача 2. 2.</u> Время работы элемента до отказа подчинено нормальному закону с параметрами m_t =8000 час, σ_t=2000 час. Требуется вычислить количественные характеристики надежности $p(t), f(t), \lambda(t), m_t$ для t=10000 час.

Решение. Воспользуемся формулами (2.11), (2.12), (2.13),(2.14) для p(t), f(t), $\lambda(t)$,m_t.

1. Вычислим вероятность безотказной работы

$p(t)=0.5-\Phi(U)$; $U=(t-m_t)/\sigma_t$;

$U=(10000-8000)/2000=1$; $\Phi(1)=0.3413$;

$p(10000)=0.5-0.3413=0.1587$.

2. Определим частоту отказа f(t)

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_t}\cdot\exp\left[-\frac{(t-m_t)^2}{2\sigma_t^{\ 2}}\right].$$

Введем обозначение

$$\varphi(U)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{U^2}{2}};\varphi(-U)=\varphi(U).$$

Тогда

$f(t)=\varphi(U)/\sigma_t$; $U=(t-m_t)/\sigma_t$;

$f(1000)=\varphi(1)/2000=0.242/2000=12.1*10^{-5}$ 1/час.

3. Рассчитаем интенсивность отказов $\lambda(t)$

$\lambda(t)=f(t)/p(t)$;

$\lambda(10000)=f(10000)/p(10000)=12.1\bullet10^{-5}/0.1587=76.4\bullet10^{-5}$ 1/час.

4. Среднее время безотказной работы элемента

$m_t = 8000$ час.

Задача 2.3. Время работы изделия до отказа подчиняется закону распределения Релея. Требуется вычислить количественные характеристики надежности изделия $p(t), f(t), \lambda(t), m_t$ для $t=1000$час ,если параметр распределения $\sigma_t=1000$ час.

Решение. Воспользуемся формулами (2.23), (2.25), (2.27),(2.26) для $p(t), f(t)$, m_t ,$\lambda(t)$.

1. Вычислим вероятность безотказной работы $p(t)$

$$p(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma_t^2}\right);$$

$$p(1000) = \exp\left(-\frac{1000^2}{2\cdot 1000^2}\right) = e^{-0.5} = 0.606.$$

2. Определим частоту отказа $f(t)$

$f(t)=t*p(t)/\sigma_t^2$;

$f(1000)=1000*0.606/1000^2=0.606*10^{-3}$ 1/час.

3. Рассчитаем интенсивность отказов

$\lambda(t)= t/\sigma_t^2$;

$\lambda(1000)=1000/1000^2 =10^{-3}$ 1/час.

4. Определим среднее время безотказной работы изделия

$$m_t = \sigma_t\sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1000\cdot 1.253 = 1253 \text{ час.}$$

Задача 2.4. Время безотказной работы изделия подчиняется закону Вейбулла с параметрами $k=1.5$; $a=10^{-4}$ 1/час, а время работы изделия $t=100$ час. Требуется вычислить количественные характеристики надежности изделия $p(t), f(t), \lambda(t), m_t$.

Решение. 1. Определим вероятность безотказной работы $p(t)$ по формуле (2.18) . Имеем

$p(t)=\exp(-at^k)$; $p(100)=\exp(-10^{-4} \bullet 100^{1.5})$; $x=100^{1.5}$;

$\lg x=1{,}5\bullet\lg 100=3$; $x=1000$; $p(100)=e^{-0,1}=0{,}9048$.

2. Определим частоту отказов $f(t)$

$f(t)=akt^{k-1}\,p(t)$;

$f(100)=10^{-4} \bullet 1{,}5\bullet 100^{0,5} \bullet 0{,}9048\approx 1{,}35\bullet 10^{-3}$ 1/час.

3. Определим интенсивность отказов $\lambda(t)$

$\lambda(t)=f(t)/p(t)$;

$\lambda(100)=f(100)/p(100)=1{,}35\bullet 10^{-3}/0.9048\approx 1{,}5\bullet 10^{-3}$ 1/час.

4. Определим среднее время безотказной работы изделия m_t

$$m_t=\frac{\frac{1}{k}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)}{a^{1/k}}=\frac{\frac{1}{1{,}5}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{1{,}5}\right)}{(10^{-4})^{1/1{,}5}}=\frac{0{,}666\cdot\Gamma(0{,}666)}{10^{-2{,}666}}\quad;$$

Так как $z\Gamma(z)=\Gamma(z+1)$, то

$$m_t=\frac{\Gamma(1{,}666)}{10^{-2{,}666}}\quad;$$

$x=10^{-2,666}$; $\lg x=-2{,}666\bullet\lg 10=-2{,}666=\bar{3}{,}333$; $x=0{,}00215$.

Используя приложение П.7.18 [1], получим

$m_t=0{,}90167/0{,}00215=426$ час.

Задача 2.5. В результате анализа данных об отказах аппаратуры частота отказов получена в виде

$$f(t) = c_1\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + c_2\lambda_2 e^{-\lambda_2 t} \ .$$

Требуется определить количественные характеристики надежности: $p(t)$, $\lambda(t)$, m_t.

Решение. 1. Определим вероятность безотказной работы. На основании формулы (2.1) имеем

$$p(t) = 1 - \int_0^t f(t)dt = 1 - \left[\int_0^t c_1\lambda_1 e^{-\lambda_1 t}dt + \int_0^t c_2\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}dt\right] = 1 - \left[-c_1 e^{-\lambda_1 t}\Big|_0^t - c_2 e^{-\lambda_2 t}\Big|_0^t\right] =$$

$$= 1 - \left[-c_1 e^{-\lambda_1 t} + c_1 - c_2 e^{-\lambda_2 t} + c_2\right] = 1 - (c_1 + c_2) + c_1 e^{-\lambda_1 t} + c_2 e^{-\lambda_2 t}.$$

Вычислим сумму $C_1 + C_2$ Так как $\int_0^\infty f(t)dt = 1$, то

$$\int_0^\infty c_1\lambda_1 e^{-\lambda_1 t}dt + \int_0^\infty c_2\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}dt = c_1 + c_2 = 1 \ .$$

Тогда

$$P(t) = c_1 e^{-\lambda_1 t} + c_2 e^{-\lambda_2 t}.$$

2. Найдем зависимость интенсивности отказов от времени по формуле

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{p(t)} = \frac{c_1\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + c_2\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}}{c_1 e^{-\lambda_1 t} + c_2 e^{-\lambda_2 t}} \ .$$

2. Определим среднее время безотказной работы аппаратуры. На основании формулы (2.5) будем иметь

$$m_t = \int_0^\infty p(t)dt = c_1 \int_0^\infty e^{-\lambda_1 t} dt + c_2 \int_0^\infty e^{-\lambda_2 t} dt = \frac{c_1}{\lambda_1} + \frac{c_2}{\lambda_2}.$$

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 2.6.Вероятность безотказной работы автоматической линии изготовления цилиндров автомобильного двигателя в течении 120 час равна 0.9. Предполагается, что справедлив экспоненциальный закон надежности. Требуется рассчитать интенсивность отказов и частоту отказов линии для момента времени t =120 час., а также среднее время безотказной работы.

Задача 2.7. Среднее время безотказной работы автоматической системы управления равно 640 час. Предполагается, что справедлив экспоненциальный закон надежности. Необходимо определить вероятность безотказной работы в течение 120 час., частоту отказов для момента времени t=120 час и интенсивность отказов.

Задача 2.8. Время работы изделия подчинено нормальному закону с параметрами m_t = 8000 час., σ_t =1000 час. Требуется вычислить количественные характеристики надежности $p(t)$, $f(t)$, $\lambda(t)$, m_t для t=8000 час.

Задача 2.9.Время безотказной работы прибора подчинено закону Релея с параметром σ_t= 1860 час. Требуется вычислить $P(t)$, $f(t)$,$\lambda(t)$ для t = 1000 час и среднее время безотказной работы прибора.

Задача 2.10. Время исправной работы скоростных шарикоподшипников подчинено закону Вейбулла с параметрами к=2,6 ; а= $1,65*10^{-7}$ 1/час.
Требуется вычислить количественные характеристики надежности $P(t)$, $f(t)$, $\lambda(t)$ для t=150 час. и среднее время безотказной работы шарикоподшипников.

Задача 2.11.Вероятность безотказной работы изделия в течение t=1000 час. P(1000)=0,95. Время исправной работы подчинено закону Релея. Требуется определить количественные характеристики надежности $f(t)$, $\lambda(t)$, m_t.

Задача 2.12. Среднее время исправной работы изделия равно 1260 час. Время исправной работы подчинено закону Релея. Необходимо найти его количественные характеристики надежности $P(t)$, $f(t)$, $\lambda(t)$ для $t=1000$ час.

Задача 2.13. В результате анализа данных об отказах изделия установлено, что частота отказов имеет вид $f(t)=2\lambda e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})$. Необходимо найти количественные характеристики надежности $P(t)$, $\lambda(t)$, m_t.

Задача 2.14. В результате анализа данных об отказах изделий установлено, что вероятность безотказной работы выражается формулой $P(t)=3e^{-\lambda t}-3e^{-2\lambda t}+e^{-3\lambda t}$. Требуется найти количественные характеристики надежности $P(t)$, $\lambda(t)$, m_t.

Задача 2.15. Определить вероятность безотказной работы и интенсивность отказов прибора при $t = 1300$ часов работы, если при испытаниях получено значение среднего времени безотказной работы $m_t=1500$ час. и среднее квадратическое отклонение $\sigma_t= 100$ час.