Лекция 6

МОДЕЛИ НАДЕЖНОСТИ

Модели надежности

Методы прогнозирования состояния технических объектов (элементов и систем), основанные на изучении происходящих в них процессов («физика отказов») способны значительно уменьшить влияние случайных (нерегулируемых, неконтролируемых и непредсказуемых) факторов, более точно описать поведение объектов и возможность появления отказов. Однако для оценки надежности элементов по данным о приближении к отказам необходимо составить модели процессов, происходящих в элементах и приводящих к их отказам (*модели отказов*), которые, как правило, имеют вероятностный характер.

Модели надежности

Основы моделирования надежности

Выбор модели надежности может быть произведен на основании статистического анализа данных о функционировании объектов при испытаниях или в условиях эксплуатации. Физические модели надежности иногда существенно помогают построить удачные гипотезы о распределениях вероятностных характеристик надежности, которые затем могут быть проверены статистическими методами.

Как уже отмечалось, состояние объекта и его параметры X_i , определяющие свойства надежности, являются функцией входных параметров Z_j и времени t

$$X_i = f(Z_1, Z_2, ..., Z_k , t). \qquad (6.1)$$

Модели надежности

Основы моделирования надежности

Здесь $Z_1, Z_2, \ldots, Z_k$ - параметры, характеризующие условия эксплуатации, и характеристики состояния объекта.

Любой из определяющих параметров X_i и его изменение под действием различных факторов может быть приближенно представлен в виде

$$X_i = X_{i0} + \Delta X_i = X_{i0} + \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial X_i}{\partial Z_j} \Delta Z_j + \frac{\partial X_i}{\partial t} \Delta t. \quad (6.2)$$

Основные показатели надежности в свою очередь могут быть представлены как функции физических характеристик и параметров элементов и скорости их изменения в зависимости от различных факторов.

Модели надежности

Основы моделирования надежности

Например изменение вероятности отказа можно выразить через параметры элемента в виде

$$q_i = \int_0^t \frac{\partial q_i}{\partial t} dt = \int_0^t \frac{\partial q_i}{\partial X_i} \frac{\partial X_i}{\partial t} dt, \quad (6.3)$$

где $\frac{\partial X_i}{\partial t}$ - скорость изменения параметра X_i вследствие физических или физико-химических процессов в элементе; $\frac{\partial q_i}{\partial X_i}$ - изменение вероятности отказа вследствие изменения параметра X_i.

.

Модели надежности

Основы моделирования надежности

В общем случае при анализе надежности элементов необходимо рассматривать различные свойства материалов (механические, электрические, тепловые и т.д.) и действие различных внешних и внутренних факторов, вызывающих их изменение. Тогда вероятность отказа

$$q(t) = \prod_{i=1}^{n} q_i = \prod_{i=1}^{n} \int_0^t \frac{\partial q_i}{\partial\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X_i}{\partial t} dt. \quad (6.4)$$

Если надежность оценивается интенсивностью отказов $\lambda(t)$, то для достаточно надежных объектов ($p(t) \approx 1$)

$$\lambda_i(t) = \frac{\partial q_i}{\partial t} \frac{1}{p_i} \approx \frac{\partial q_i}{\partial t} = \frac{\partial q_i}{\partial X_i} \frac{\partial X_i}{\partial t}. \quad (6.5)$$

Модели надежности

Основы моделирования надежности

Тогда общая интенсивность отказов

$$\lambda(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial q_i}{\partial\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X_i}{\partial t}. \quad (6.6)$$

Однако в формулах (6.1) - (6.6) аргументы $Z_1, Z_2, \ldots, Z_k$ и, тем более, определяющие параметры X_i часто являются случайными величинами, большинство физических процессов и явлений в материалах элементов имеют физико-статистическую природу, поэтому модель надежности должна учитывать как физическую структуру объектов, так и статистические закономерности процессов.

Модели надежности

Основы моделирования надежности

Методы моделирования надежности

Как уже отмечалось, основным источником достоверной информации о надежности технических объектов являются экспериментальные исследования и результаты эксплуатации. Однако сложность, часто уникальность и высокая стоимость современных технических объектов в ряде случаев практически исключают возможность использования традиционных эмпирических и полуэмпирических методов проектирования и физических экспериментальных исследований.

Модели надежности

Основы моделирования надежности

Методы моделирования надежности

В некоторых случаях сложные технические системы не удается полностью исследовать даже в течение всего периода эксплуатации, при этом опытная проверка в аварийных ситуациях часто просто невозможна. Вместе с тем случайный характер явлений и процессов, происходящих в системах и элементах, сложность, нелинейность и нестационарность характеристик затрудняют технические расчеты.

Модели надежности

Основы моделирования надежности

Методы моделирования надежности

Кроме того, многие современные технические системы обладают высокой надежностью, могут безотказно работать в течение длительного времени, и их полномасштабные лабораторные испытания должны занимать тысячи часов. Использование же методов ускоренных физических испытаний не всегда приводит к искомому результату, поскольку любые процессы в элементах и системах протекают в определенных интервалах параметров и нагрузок, выход за пределы которых может привести к появлению дополнительных эффектов и механизмов отказов, что, естественно, вызовет искажение получаемых результатов.

Модели надежности

Основы моделирования надежности

Методы моделирования надежности

С другой стороны, экспериментальные исследования остаются практически единственным источником достоверных сведений и исходных данных для расчетов надежности технических объектов и обойтись без них иногда просто невозможно.

Перечисленные причины в ряде случаев при проектировании и исследовании надежности объектов создают непреодолимые преграды и приводят к необходимости разработки и использования методов моделирования, в том числе и компьютерного.

Модели надежности

Основы моделирования надежности

Методы моделирования надежности

При этом исследуется не сам технический объект, а его физическая или математическая модель в виде алгоритма функционирования, отражающая все основные существенные свойства и характеристики объекта. Основной целью имитационного моделирования является получение новой информации о свойствах, характеристиках и поведении изучаемого реального технического объекта.

Благодаря моделированию в ряде случаев удается оказаться от грубых допущений, применяемых при расчетах надежности технических объектов.

Модели надежности

Основы моделирования надежности

Методы моделирования надежности

Вместе с тем моделирование дает возможность при минимальных затратах предсказать результаты функционирования технических объектов или технологических систем задолго до их изготовления (моделирование технологических систем отличается тем, что имитируется состояние продукта в процессе функционирования системы).

В зависимости от степени физического сходства между оригиналом и моделью можно различать *моделирование на основе подобия* и *моделирование по аналогии*.

Модели надежности

Основы моделирования надежности

Методы моделирования надежности

При моделировании на основе подобия создается подобная оригиналу материальная система (физическая модель), с помощью которой изучаются процессы, протекающие в оригинале. Системы или явления называются ***подобными***, если все количественные характеристики одного из них можно получить пропорциональным преобразованием характеристик другого.

Моделирование на основе подобия целесообразно использовать для оценки надежности уникальных объектов.

Модели надежности

Основы моделирования надежности

Методы моделирования надежности

При этом для объектов, изготовленных по известной технологии, может быть использован опыт эксплуатации подобных объектов, которые в этом случае играют роль моделей. Показатели надежности этих моделей пересчитываются на оригинал (исследуемый объект) по определенной методике. Для оценки надежности объектов, изготовленных по новой технологии, могут быть использованы испытания малых моделей. Для этого по той же технологии изготавливается некоторое количество малых моделей и проводятся их испытания. Затем результаты испытаний пересчитываются на оригинал.

Модели надежности

Основы моделирования надежности

Методы моделирования надежности

Целесообразно испытания моделей проводить в форсированном режиме (ускоренные испытания) и осуществлять двойной пересчет: на нормальный режим и затем на оригинал.

Достоинства моделирования на основе подобия - большая достоверность результатов и возможность выявления физических причин явлений. Однако часто возможности такого моделирования ограничены трудностями изготовления моделей и проведения экспериментов, их высокой стоимостью, недостаточной точностью методов и средств измерения.

Модели надежности

Основы моделирования надежности

Методы моделирования надежности

Под *аналогией* понимается частичное сходство (сходство в каком-либо отношении) между предметами и явлениями, в остальном различными. Моделирование по аналогии с использованием математических моделей (математического моделирования) широко применяется для исследования процессов функционирования систем путем имитации на вычислительных машинах изменения состояний элементов и системы.

Математическое моделирование - процесс создания имитирующей математической модели и ее использова-ние с целью получения сведений о реальном объекте.

Модели надежности

Основы моделирования надежности

Методы моделирования надежности

Математическое моделирование является альтернативой физическому моделированию, но у него есть ряд существенных преимуществ: меньшие сроки на подготовку, значительно меньшая материалоемкость (особенно при исследовании крупногабаритных объектов), возможность выполнения экспериментов на критических и закритических режимах, которые привели бы к разрушению образца, и др.

Модели надежности

Основы моделирования надежности

Методы моделирования надежности

Математическая модель - совокупность математических объектов (чисел, символов, множеств и т.д.) и связей между ними, отражающих важнейшие свойства технического объекта.

Моделирование большинства технических объектов можно выполнять на микро-, макро- и метауровнях, различающихся степенью детализации рассмотрения процессов в объекте.

Модели надежности

Основы моделирования надежности

Методы моделирования надежности

Математической моделью технического объекта на *микроуровне* является система уравнений, описывающая процессы и явления в материалах и средах с заданными краевыми условиями. Система уравнений обычно известна (уравнения Ламе в механике упругих сред, уравнения Навье-Стокса в гидродинамике, уравнения теплопроводности в термодинамике и т. д.), но ее точное решение удается получить лишь для некоторых частных случаев, поэтому первая задача, возникающая при моделировании, состоит в построении адекватной приближенной дискретной модели.

Модели надежности

Основы моделирования надежности

Методы моделирования надежности

Так как получаемая при дискретизации аппроксимирующая система алгебраических уравнений имеет высокий порядок, то при моделировании достаточно сложных технических объектов приходится принимать ряд допущений и упрощений и переходить к моделированию на макроуровне.

В основе математических моделей на *макроуровне* лежат компонентные уравнения отдельных элементов и топологические уравнения, вид которых определяется связями между элементами.

Модели надежности

Основы моделирования надежности

Методы моделирования надежности

Предпосылкой создания единого математического и программного обеспечения анализа на макроуровне являются аналогии компонентных и топологических уравнений физически однородных подсистем, из которых состоит технический объект. Для сложных технических объектов размерность математических моделей на макроуровне становится чрезмерно высокой, и для моделирования приходится переходить на *метауровень*.

Модели надежности

Основы моделирования надежности

Методы моделирования надежности

Модель на этом уровне воспроизводит объект с большими или меньшими упрощениями, которые зависят от цели и возможностей моделирования. При этом должен достигаться компромисс между точностью и сложностью модели. Однако в общем случае математическая модель процесса или объекта, как и любая другая, должна отвечать двум основным требованиям: экономичности и традуктивности (traduir (франц.) – переводить, передавать , преобразовывать). *Традуктивность* – свойство модели, выражающееся в возможности перевода результатов, полученных с ее помощью, на оригинал.)

Модели надежности

Основы моделирования надежности

Методы моделирования надежности

Требование *экономичности* заключается в том, что исследование модели должно быть более экономичным, чем исследование самого объекта, т.е. ее использование должно экономить средства, время или быть более безопасным. Экономичности можно добиться, создав либо дешевую модель, либо дорогую, но универсальную, способную моделировать широкий круг объектов. В этом смысле математическая модель, хотя и может быть соизмерима по стоимости с самим объектом, но способна моделировать самые различные системы и многократно повторять эксперименты.

Модели надежности

Основы моделирования надежности

Методы моделирования надежности

Требование *традуктивности* означает, что при моделировании должна быть полная уверенность в том, что полученные результаты могут быть с достаточной степенью точности и достоверности использованы при расчетах, проектировании или оптимизации функционирования самого объекта. Это требование может быть выполнено только в результате глубокого изучения процессов и явлений, правильной постановки задачи моделирования, корректного использования методов математического моделирования, обработки, анализа и проверки полученных результатов.

Модели надежности

Основы моделирования надежности

Методы моделирования надежности

Структурное сходство модели и объекта в ряде случаев дает возможность их совместного использования: например , при моделировании сложной системы применяются закономерности и используются параметры, характеризующие функционирование ее элементов или структурных групп, полученные при экспериментальных исследованиях.

В общем случае любая модель содержит случайные величины (внешние воздействия, характеристики элементов и другие параметры) и поэтому по сути является *вероятностной моделью*.

Модели надежности

Основы моделирования надежности

Методы моделирования надежности

Детерминированную модель, в которой все параметры могут принимать только определенные значения, можно считать частным случаем вероятностной модели.

Хотя математические модели надежности являются идеализацией законов функционирования технических объектов, они позволяют в вероятностной форме предсказать поведение объектов в реальных условиях функционирования и оценить многие количественные характеристики надежности. При этом степень идеализации в основном определяется требованием простоты используемых моделей.

Модели надежности

Основы моделирования надежности

Методы моделирования надежности

Сложные модели надежности могут потребовать очень большого объема выборки для оценки ее параметров при экспериментальных исследованиях, в результате чего использование такой модели становится технически и экономически бессмысленным.

Вероятностные методы теории надежности привлекают-ся для выявления и описания физико-химических про-цессов и явлений, влияющих на надежность и приводя-щих к отказам, установления их кинетических законо-мерностей в зависимости от состояния элементов и внешних воздействий, описания взаимодействия элементов системы и т.д.

Модели надежности

Основы моделирования надежности

Методы моделирования надежности

Математические модели надежности элементов, используемые на практике, представляют собой обычно простые законы распределения. Показатели надежности при этом являются некоторыми функциями параметров математической модели. Модели надежности технических систем - более сложные функциональные зависимости, учитывающие модели отказов элементов и структуру системы.

Определение показателей надежности на основании вероятностных моделей включает, как правило, три этапа.

Модели надежности

Основы моделирования надежности

Методы моделирования надежности

Сначала устанавливается тип модели (вид распределения). Это может быть сделано на основании известных законов распределения, полученных для объектов-аналогов, путем использования априорной информации о физико-статистических механизмах процессов или путем обработки результатов экспериментальных исследований объекта. На втором этапе оцениваются параметры распределения и таким образом устанавливается конкретный вид вероятностной модели для данного технического объекта. На третьем этапе на основании полученной вероятностной модели (закона распределения) определяются необходимые показатели надежности.

Модели надежности

Основы моделирования надежности

В качестве вероятностных моделей элементов надежности используются дискретные и непрерывные распределения.

Дискретные модели надежности

Дискретные распределения описывают случайные величины, которые принимают конечное или счетное множество значений (число отказов, число исправных или отказавших объектов и т.д.).

Модели надежности

Основы моделирования надежности

Дискретные модели надежности

Биномиальное распределение определяет вероятность k успешных испытаний из общего числа испытаний n, если известно, что вероятность одного успешного испытания равна p, или число k исправных элементов системы, состоящей из n элементов, если вероятность безотказной работы каждого элемента равна p:

$$P(k) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad (6.7)$$

где C_n^k - биномиальные коэффициенты.

Модели надежности

Основы моделирования надежности

Дискретные модели надежности

При достаточно большом числе n и малых значениях p биномиальное распределение хорошо аппроксимируется *распределением Пуассона* с параметром $\lambda = np$ и ошибкой аппроксимации порядка λ^2/n

$$P(k) = \frac{\lambda^k}{k!}\exp(-\lambda) \quad (6.8)$$

или нормальным распределением

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) = 1 - 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\right), 6.9)$$

Модели надежности

Основы моделирования надежности

Дискретные модели надежности

где $\Phi(z)$ - нормированная функция Лапласа.

Биномиальное распределение (6.7) характерно для вероятности появления в объекте k дефектов за время или наработку t, если известно, что вероятность появления дефекта в одном из n интервалов t/n равна p. При $n \to \infty$ можно использовать распределение Пуассона (6.8) в виде

$$P(k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} \exp(-\lambda t). \quad (6.10)$$

Модели надежности

Основы моделирования надежности

Дискретные модели надежности

При $k = 0$ это распределение можно рассматривать как вероятность безотказной работы (вероятность отсутствия отказа) за время t

$$P(k = 0) = \exp(-\lambda t), \quad (6.11)$$

причем в теории надежности параметр λ интерпретируется как интенсивность отказов.

Отрицательное биномиальное распределение (распределение Паскаля)

$$P(n) = C_{k+n-1}^{n} p^{k} (1 - p)^{n} \quad (6.12)$$

Модели надежности

Основы моделирования надежности

Дискретные модели надежности

используется, например, для определения вероятности числа неисправных изделий n, предшествующих k-му исправному, при планировании выпуска изделий для получения заданного количества исправных изделий при известной вероятности брака p.

При $k=1$ отрицательное биномиальное распределение приобретает вид ***геометрического распределения***.

Модели надежности

Основы моделирования надежности

Дискретные модели надежности

Гипергеометрическое распределение используется для определения надежности продукции при выборочном контроле качества и определяет вероятность числа годных изделий k в выборке объема n из партии объемом N, содержащей M годных изделий:

$$P(k) = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^k}. \quad (6.13)$$

Модели надежности

Основы моделирования надежности

Непрерывные модели надежности

В ***непрерывных распределениях*** в теории надежности непрерывной случайной величиной обычно является время или наработка - время безотказной работы, появления отказа, восстановления, наработка на отказ, между отказами, до отказа и т.д.

Наиболее простой и вместе с тем одной из самых используемых моделей является ***экспоненциальное (показательное) распределение*** наработки на отказ, которое получается из выражения основного закона надежности при постоянном значении интенсивности отказов $\lambda = const$:

Модели надежности

Основы моделирования надежности

Непрерывные модели надежности

$$P(t) = \exp(-\lambda t). \quad (6.14)$$

Широкое использование экспоненциальной модели объясняется, в первую очередь, тем, что она описывает период нормальной эксплуатации, когда интенсивность отказов λ примерно постоянна и старение объекта еще мало сказывается на его надежности. Экспоненциальное распределение типично для технических систем, состоящих из большого количества элементов с различными распределениями наработки до отказа.

Модели надежности

Основы моделирования надежности

Непрерывные модели надежности

Кроме того, экспоненциальное распределение описывает функционирование объекта под действием пуассоновского потока импульсов нагрузки, обусловливающего отказы сложных систем с восстановлением элементов. Экспоненциальное распределение можно также рассматривать как предельное для распределения Пуассона и геометрического распределения.

При использовании экспоненциальной модели в качестве характеристики наработки объекта на отказ величину $t_0 = 1/\lambda$ можно рассматривать как среднюю наработку и тогда выражение (6.14) запишется в виде

Модели надежности

Основы моделирования надежности

Непрерывные модели надежности

$$P(t) = \exp(-\frac{t}{t_0}). \quad (6.15)$$

Существенным преимуществом экспоненциального закона является также возможность разложения функции (6.14) или (6.15) в ряд и аппроксимации при $\lambda t = \frac{t}{t_0} \leq 0{,}1$ линейной зависимостью вида

$$P(t) = 1 - \lambda t + \frac{(\lambda t)^2}{2!} - \frac{(\lambda t)^3}{3!} + \cdots \approx 1 - \lambda t = 1 - \frac{t}{t_0}, \quad (6.16)$$

которая часто используется при приближенных расчетах параметров надежности.

Модели надежности

Основы моделирования надежности

Непрерывные модели надежности

Важным свойством экспоненциальной модели надежности является то, что вероятность безотказной работы и вероятность отказа в интервале времени ($t,t+\Delta t$) (т.е. $P(t,t+\Delta t)$ и $Q(t,t+\Delta t) = 1-P(t,t+\Delta t)$) зависят только от длины этого интервала Δt и не зависят от предшествующего времени t. Это свойство в значительной степени ограничивает возможности использования этой модели - она может применяться только в случаях, когда необратимые изменения (старение) объектов несущественны и отказы связаны только со случайными воздействиями.

Модели надежности

Основы моделирования надежности

Непрерывные модели надежности

Экспоненциальное распределение можно обобщить *распределением Вейбулла* в виде

$$P(t) = \exp(-\lambda t^{\alpha}) . \quad (6.17)$$

В отличие от экспоненциального, распределение Вейбулла задается двумя параметрами. Параметр λ определяет масштаб кривой распределения (при его изменении кривая сжимается или растягивается). Параметр формы α делает модель Вейбулла универсальной.

Модели надежности

Основы моделирования надежности

Непрерывные модели надежности

При $\alpha < 1$ модель Вейбулла позволяет описывать приработочные отказы, обусловленные скрытыми дефектами, при $\alpha = 1$ – внезапные отказы в период нормальной эксплуатации, при $1 < \alpha < 2$ – отказы быстро стареющих объектов, у которых почти нет скрытых дефектов, при $\alpha > 2$ – износовые отказы. Кроме того, при $\alpha = 2$ (*распределение Релея*) модель описывает функционирование объекта, состоящего из нескольких последовательно соединенных дублированных элементов.

Модели надежности

Основы моделирования надежности

Непрерывные модели надежности

Обычно значение α лежит в интервале от 1 до 2.

Гамма-распределение

$$P(t) = \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t t^{\alpha-1} \exp(-\lambda t)\, dt \quad (6.18)$$

используется для определения момента отказа с номером α при испытаниях с заменой элементов (если наработка подчиняется экспоненциальному закону), а также для определения общего срока службы группы объектов при испытаниях без замены (также если наработка каждого из них подчиняется экспоненциальному закону) и в некоторых других случаях.

Модели надежности

Основы моделирования надежности

Непрерывные модели надежности

Одним из самых популярных в теории надежности является *нормальное распределение*

$$P(t) = 1 - F(t) = 1 - \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} \exp\left[-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dt. \quad (6.19)$$

Фундаментальное значение нормального распределения связано с центральной предельной теоремой теории вероятностей, согласно которой распределение суммы любых случайных величин в пределе стремится к нормальному.

Модели надежности

Основы моделирования надежности

Непрерывные модели надежности

Нормальное распределение чаще всего используется для описания постепенных износовых отказов, оно образуется, когда на случайную величину действует большое количество равноправных факторов. Его недостатком в некоторых случаях может оказаться наличие области отрицательных значений аргумента, что для описания наработки на отказ не имеет смысла. С целью устранения этого недостатка можно воспользоваться *усеченным нормальным распределением*

$$P(t) = 1 - F(t) = 1 - \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^t \exp\left[-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dt. \quad (6.20)$$

Модели надежности

Основы моделирования надежности

Непрерывные модели надежности

или *логарифмически нормальным распределением*

$$P(t) = 1 - F(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^t \frac{1}{t} \exp\left[-\frac{(\ln t - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] dt. \quad (6.21)$$

Логарифмически нормальное распределение может также использоваться для описания долговечности металлов, износовых отказов материалов, старения электронной аппаратуры, процессов восстановления некоторых объектов и т.д.

Модели надежности

Основы моделирования надежности

Непрерывные модели надежности

При описании надежности используются также модели, объединяющие несколько распределений. Например, если отказы объекта происходят под действием двух независимых факторов, приводящих к отказам по экспоненциальному и нормальному законам, то результирующая модель будет представлять собой композицию (произведение) этих распределений:

$$P(t) = \exp(-\lambda t)\left[1 - \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)\right]. \quad (6.22)$$

Модели надежности

Основы моделирования надежности

Непрерывные модели надежности

Для того чтобы получить теоретическое распределение, близкое к экспериментальному, иногда плотность распределения наработки до отказа или между отказами удобно представить в виде суммы (смеси) нескольких распределений

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(t), \quad (6.23)$$

где $f_i(t)$ - i-е теоретическое распределение; c_i - весовой коэффициент i-го распределения (очевидно, $\sum_{i=1}^{n} c_i = 1$).

Модели надежности

Основы моделирования надежности

Непрерывные модели надежности

Например, для суммы (суперпозиции) двух экспоненциальных распределений

$$f(t) = c_1\lambda_1 \exp(-\lambda_1 t) + c_2\lambda_2 \exp(-\lambda_2 t). \quad (6.24)$$

При этом вероятность безотказной работы, интенсивность отказов и средняя наработка

$$P(t) = c_1 \exp(-\lambda_1 t) + c_2 \exp(-\lambda_2 t);$$

$$\lambda(t) = \frac{c_1\lambda_1 \exp(-\lambda_1 t) + c_2\lambda_2 \exp(-\lambda_2 t)}{c_1 \exp(-\lambda_1 t) + c_2 \exp(-\lambda_2 t)};$$

$$T_{\text{ср}} = \frac{c_1}{\lambda_1} + \frac{c_2}{\lambda_2}. \quad (6.25)$$

Модели надежности

Вероятностные модели отказов элементов

Выбор адекватной вероятностной модели надежности элементов возможен на основании анализа физических процессов, происходящих в объекте при его эксплуатации. Поэтому, хотя второй этап определения показателей надежности (оценка параметров модели) предусматривает проверку адекватности модели по экспериментальным данным, критерии согласия не всегда позволяют однозначно выбрать модель. В ряде случаев для этого, прежде всего, необходимо учитывать физическую природу отказов и характер течения физических процессов.

Модели надежности

Вероятностные модели отказов элементов

Для оценки надежности различных по назначению элементов могут быть рассмотрены модели отказов двух основных типов: «нагрузка - прочность» (***прочностная надежность***) и «параметр - поле допуска» (***пара-метрическая надежность***). В обоих случаях элемент считается работоспособным, пока его основные характеристики (определяющие параметры) в процессе эксплуатации не достигнут предельных значений (границ рабочей области) и между моделями этих двух видов имеются только методологические различия.

Модели надежности

Вероятностные модели отказов элементов

Однако если в первом случае имеют место в основном внезапные отказы (практически мгновенное нарушение работоспособности), то во втором - в основном постепенные (достаточно плавное «сползание» параметров к границе допустимых значений).

Модели надежности

Вероятностные модели отказов элементов

Прочностная надежность (модель внезапных отказов)

Прочность - свойство материала элемента сопротивляться разрушению или изменению формы и свойств под действием внешних или внутренних нагрузок различной физической природы и сохранять в заданных пределах значения всех характеристик. Параметрами прочности являются пределы прочности (механической, электрической, тепловой и т.д.), пределы текучести, ползучести, выносливости и другие характеристики материалов.

Модели надежности

Вероятностные модели отказов элементов

Прочностная надежность (модель внезапных отказов)

Отказы по параметрам прочности могут быть связаны с разрушением элемента, недопустимыми деформациями или резким изменением механических, электрических, тепловых и других свойств материала вследствие дефектов материала или в результате однократных или многократных статических или динамических перегрузок.

Надежность по параметрам прочности (прочностная надежность) - свойство элемента сохранять работоспо-собное состояние под воздействием внешних нагрузок.

Модели надежности

Вероятностные модели отказов элементов

Прочностная надежность (модель внезапных отказов)

Показателями надежности по параметрам прочности могут быть средняя наработка до отказа или вероятность безотказной работы элемента. Показатели прочностной надежности определяются в зависимости от принятых критериев предельного состояния. Критериями предельного состояния по параметрам прочности могут быть определенное число циклов нагружения или накопление определенной величины остаточных изменений параметров, другие характеристики элемента.

Модели надежности

Вероятностные модели отказов элементов

Прочностная надежность (модель внезапных отказов)

В общем случае отказ элемента по параметрам прочности возникает тогда, когда уровень внешних воздействий (механических, тепловых, электрических и т.д.) превысит запас его прочности. При этом внезапные отказы являются следствием того, что отдельные элементы имеют запас прочности ниже допустимого и не могут противостоять случайным всплескам нагрузок, возникающим в реальных условиях эксплуатации. Постепенные отказы происходят в результате уменьшения прочности элемента (механической, тепловой, электрической и т.д.) вследствие естественных процессов старения или износа материалов.

Модели надежности

Вероятностные модели отказов элементов

Прочностная надежность (модель внезапных отказов)

Оценка надежности элементов технических систем с учетом характеристик и особенностей внешних нагрузок и запаса прочности и их изменения во времени должна отражать физическую сущность процессов и явлений, происходящих в элементе, и требует гораздо меньшего по сравнению со статистическими методами объема вычислений. Кроме того, при таком подходе появляется гораздо больше возможностей учета свойств элементов, нагрузок и условий работы, в том числе при крайних допустимых предельных значениях.

Модели надежности

Вероятностные модели отказов элементов

Прочностная надежность (модель внезапных отказов)

Несмотря на очевидные преимущества такого подхода, в настоящее время расчет прочности элементов часто проводится по упрощенным методикам, иногда чисто интуитивно.

Появление внезапных отказов и изменение характеристик элементов технических систем всегда обусловлено определенными физическими причинами. Например, разрыв троса или механическое разрушение детали являются следствием превышения приложенной к ним нагрузки допустимой прочности.

Модели надежности

Вероятностные модели отказов элементов

Прочностная надежность (модель внезапных отказов)

Элементы радиоэлектронной аппаратуры могут потерять работоспособность вследствие перегрузки (короткого замыкания, разрыва цепи, резкого изменения параметров элемента и т.д.). Поэтому при проектировании и изготовлении технических устройств всегда стремятся обеспечить достаточный запас работоспособности (разность между допустимой для данного элемента прочностью и приложенной к нему нагрузкой) или коэффициент запаса прочности (отношение этих величин).

Модели надежности

Вероятностные модели отказов элементов

Прочностная надежность (модель внезапных отказов)

Нагрузки, которые испытывают элементы различных технических систем, можно разделить на внешние и внутренние. ***Внешние нагрузки*** возникают вне самого элемента независимо от его функционирования и определяются условиями работы (механическими, кли-матическими , радиационными, акустическими и т.д.). ***Внутренние нагрузки*** возникают в самом элементе и связаны с ошибками при конструировании, производстве и эксплуатации (локальные напряжения, перегревы, уходы параметров, физико-химические изменения в структуре элемента и т.д.).

Модели надежности

Вероятностные модели отказов элементов

Прочностная надежность (модель внезапных отказов)

Внутренние нагрузки зависят как от особенностей строения и эксплуатации технических объектов, так и от параметров внешних нагрузок. Следует отметить, что принадлежность конкретных условий работы элемента к внешним или внутренним нагрузкам определяется постановкой задачи исследования: например, изменение температуры окружающей среды - внешняя нагрузка, а местный перегрев из-за ошибок в конструкции - внутренняя, механические усилия, возникающие при взаимодействии элементов системы, для системы в целом являются внутренними нагрузками, а для отдельного элемента системы - внешними и т.д.

Модели надежности

Вероятностные модели отказов элементов

Прочностная надежность (модель внезапных отказов)

В реальных условиях при изготовлении и эксплуатации практически всегда наблюдаются разбросы фактических значений прочности, внешних и внутренних нагрузок, прочность и нагрузки являются величинами достаточно случайными. Эти разбросы связаны с особенностями проектирования, изготовления и применения элементов, строением и структурой конструкционных материалов, многими другими причинами.

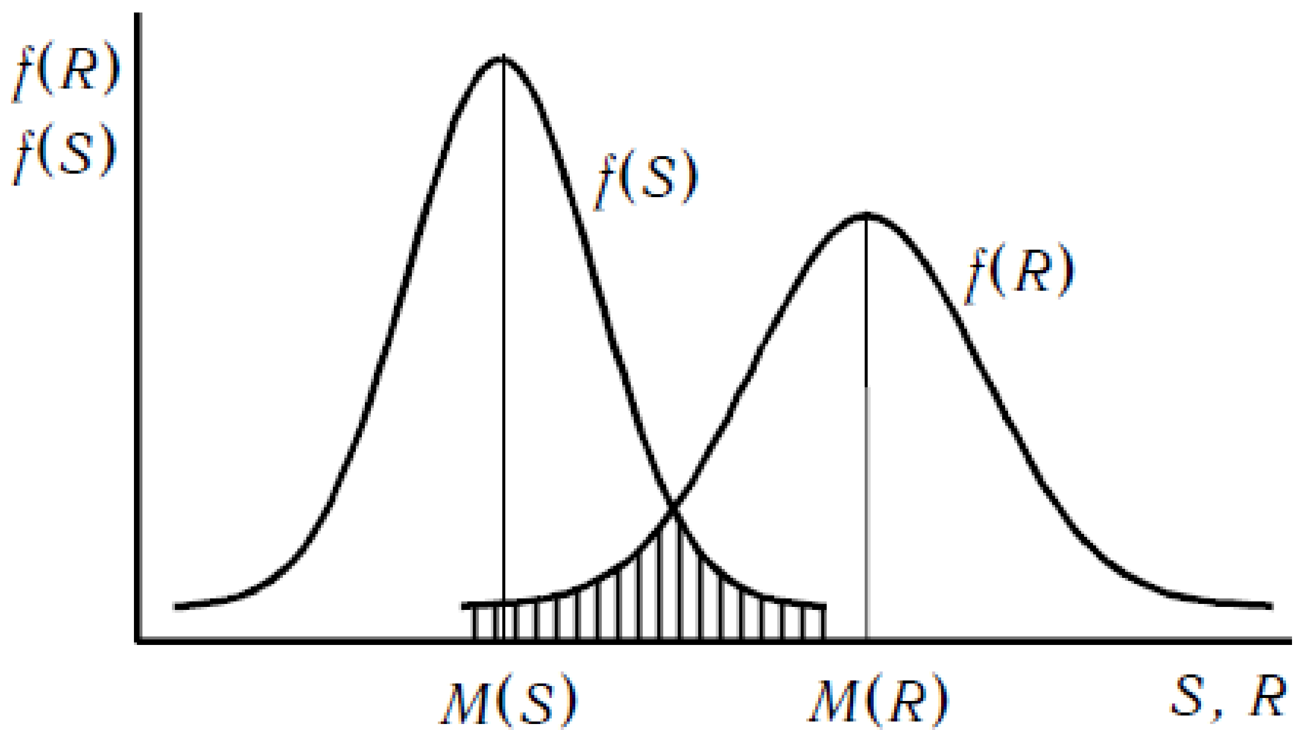
Характеристики распределений прочности и нагрузки могут быть получены аналитическими или экспериментальными методами с использованием методов математической статистики.

Модели надежности

Вероятностные модели отказов элементов

Прочностная надежность (модель внезапных отказов)

Для наглядности кривые плотности вероятности нагрузки $f(S)$ и прочности $f(R)$ удобно совместить на одном графике.



Модели надежности

Вероятностные модели отказов элементов

Прочностная надежность (модель внезапных отказов)

Работоспособность элемента будет обеспечена, если нагрузка не будет превышать нижнего предела диапазона прочности. На практике при расчетах элементов различных технических систем часто ограничиваются введением коэффициента запаса прочности, который равен отношению математических ожиданий (или средних значений) величин прочности и нагрузки:

$$K = \frac{M(R)}{M(S)}.$$

Модели надежности

Вероятностные модели отказов элементов

Прочностная надежность (модель внезапных отказов)

На самом деле очевидно, что при сравнительно большом разбросе возможных значений величин нагрузки и прочности существует вероятность отказа элемента по параметру прочности даже при сравнительно большом значении коэффициента запаса прочности K.

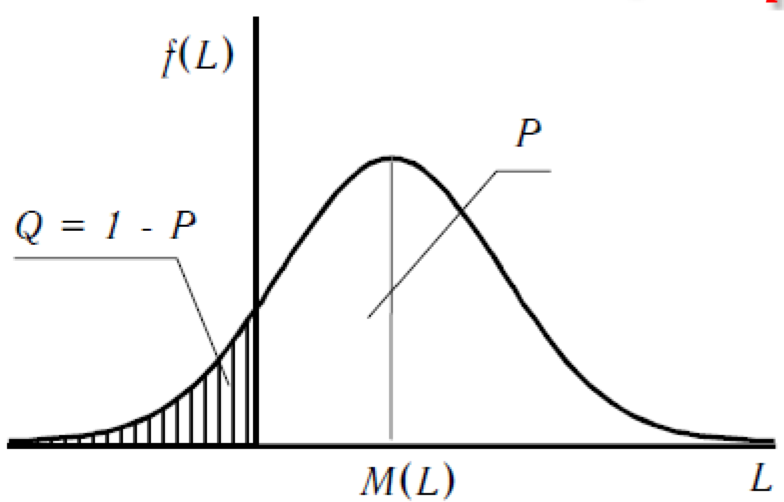
Состояние элемента по условию прочности может считаться безотказным, если нагрузка S не превышает прочности элемента R, и тогда вероятность безотказной работы элемента при известных законах распределения S и R равна вероятности этого события:

Модели надежности

Вероятностные модели отказов элементов

Прочностная надежность (модель внезапных отказов)

$$P = p(R > S_i) = \int_{S_i}^{\infty} f(R)dR. \quad (6.26)$$



В общем случае вероятность безотказной работы при всех возможных значениях нагрузки может быть определена по распределению случайной величины запаса прочности $L = R - S$, которая представляет собой композицию законов распределения:

Модели надежности

Вероятностные модели отказов элементов

Прочностная надежность (модель внезапных отказов)

$$P = p(R > S) = p(L > 0) = \int_{M(R)-M(S)}^{\infty} f(L)dL. \quad (6.27)$$

Если нагрузка и прочность распределены по нормальному закону, то запас прочности (их композиция) распределен также по нормальному закону

$$f(L)$$

Модели надежности

Вероятностные модели отказов элементов

Прочностная надежность (модель внезапных отказов)

с математическим ожиданием и средним квадратическим отклонением

$$M(L) = M(R) - M(S); \ \sigma_L = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}, \quad (6.29)$$

где $M(R)$ и $M(S)$ - математические ожидания прочности и нагрузки; σ_R и σ_S - их средние квадратические отклонения.

Модели надежности

Вероятностные модели отказов элементов

Прочностная надежность (модель внезапных отказов)

Тогда вероятность безотказной работы определяется формулой

$$P = p(L > 0) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \int_0^{\infty} \exp\left\{-\frac{\left[L - \left(M(R) - M(S)\right)\right]^2}{2(\sigma_R^2 + \sigma_S^2)}\right\} dL \quad (6.30)$$

или с использованием нормированной функции Лапласа $\Phi(z)$

$$P = \frac{1}{2} + \Phi(z) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{M(R) - M(S)}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}}\right). \quad (6.31)$$

Модели надежности

Вероятностные модели отказов элементов

Прочностная надежность (модель внезапных отказов)

Формулу можно записать через коэффициент запаса прочности $K = \frac{M(R)}{M(S)}$ и коэффициенты вариации нагрузки $v_S = \frac{\sigma_S}{M(S)}$ и прочности $v_R = \frac{\sigma_R}{M(R)}$:

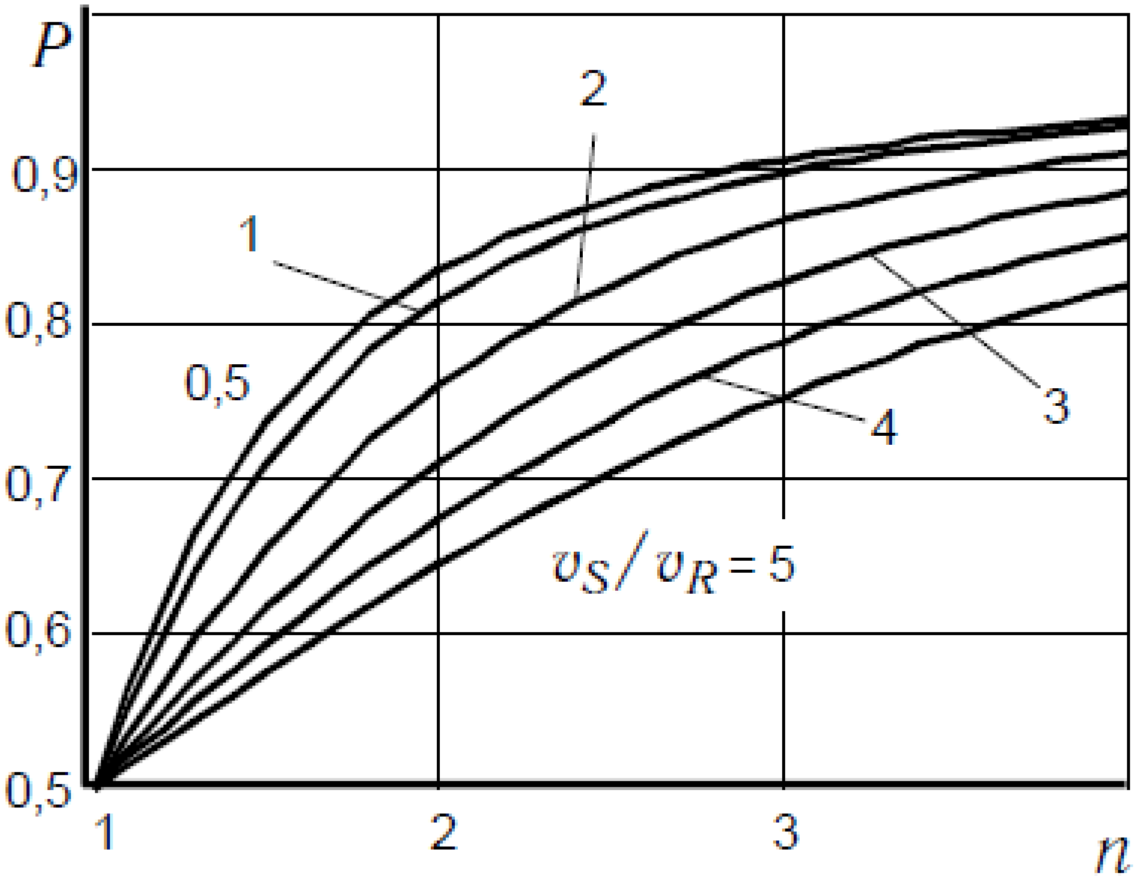
$$P = \frac{1}{2} + \Phi \frac{K - 1}{\sqrt{K v_R^2 + v_S^2}}. \quad (6.32)$$

Зависимости вероятности безотказной работы элемента по параметрам прочности от значения коэффициента запаса прочности при различных отношениях коэффициентов вариации нагрузки и прочности представлены на следующем рисунке.

Модели надежности

Вероятностные модели отказов элементов

Прочностная надежность (модель внезапных отказов)



Зависимость вероятности безотказной работы элемента от коэффициента запаса прочности (v_R = 0,5)

Модели надежности

Вероятностные модели отказов элементов

Прочностная надежность (модель внезапных отказов)

Вероятностные расчеты прочности позволяют учесть случайный характер нагрузок и свойств элементов, перейти от оценки прочности по коэффициентам запаса к оценке вероятности безотказной работы и прогнозированию ресурса. Однако использование вероятностных критериев и получение дополнительной исходной информации о прочности и нагрузках значительно усложняют расчет. Поэтому перед проведением расчетов целесообразно ограничить номенклатуру элементов (деталей, узлов, конструкций и т.д.), для которых вероятностный расчет необходим.

Модели надежности

Вероятностные модели отказов элементов

Прочностная надежность (модель внезапных отказов)

К числу таких элементов можно отнести элементы, надежность которой лимитирует надежность всей системы, элементы с небольшими коэффициентами запаса прочности (запас прочности можно считать достаточным, если выполняется условие $L = R - S > 3(\sigma_R + \sigma_S)$, при этом вероятность безотказной работы $P > 0{,}999$), элементы, испытывающие нагрузки с широким диапазоном значений, элементы с нестабильными свойствами и характеристиками прочности.

Модели надежности

Вероятностные модели отказов элементов

Параметрическая надежность (модель постепенных отказов)

В моделях типа «параметр - поле допуска» (***кумулятивных моделях***) рассматривается результат действия нагрузок в виде изменений физических параметров элементов технических систем. Каждый элемент можно характеризовать каким-либо ***определяющим параметром X***, который служит мерой качества этого элемента (в общем случае определяющий параметр может быть векторным, т.е. иметь несколько составляющих).

Модели надежности

Вероятностные модели отказов элементов

Параметрическая надежность (модель постепенных отказов)

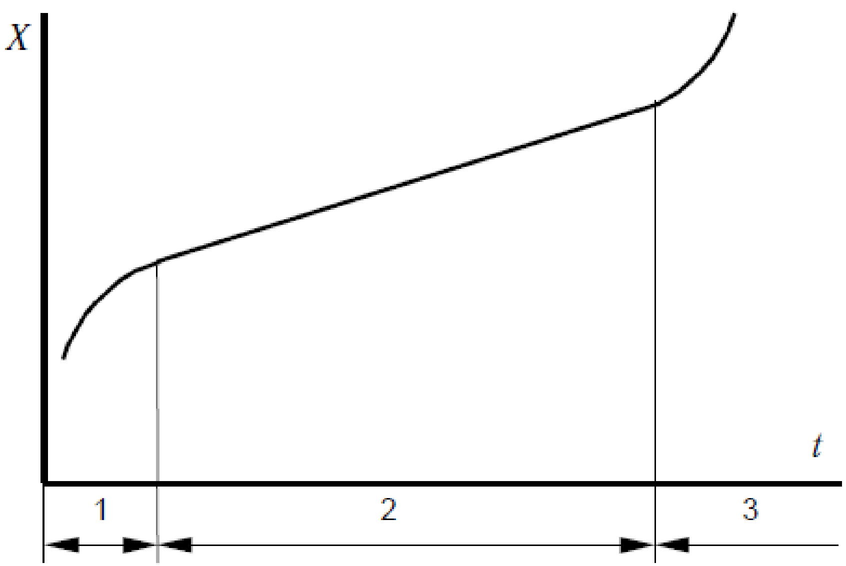
Параметр *X* под воздействием случайных и детерминированных факторов (процессов износа, старения, разрегулирования и т.д.) изменяется в процессе эксплуатации (или хранения) элемента и в конце концов достигает предельного (критического) значения, после чего состояние элемента считается неработоспособным, т.е. происходит отказ. Область изменения параметра, в пределах которой состояние элемента считается работоспособным, называется ***рабочей областью*** или ***полем допуска***.

Модели надежности

Вероятностные модели отказов элементов

Параметрическая надежность (модель постепенных отказов)

Скорость изменения определяющего параметра $\gamma = \frac{dX}{dt}$ может быть определена экспериментально или на основании анализа моделей физико-химических процессов, происходящих в элементе при эксплуатации.



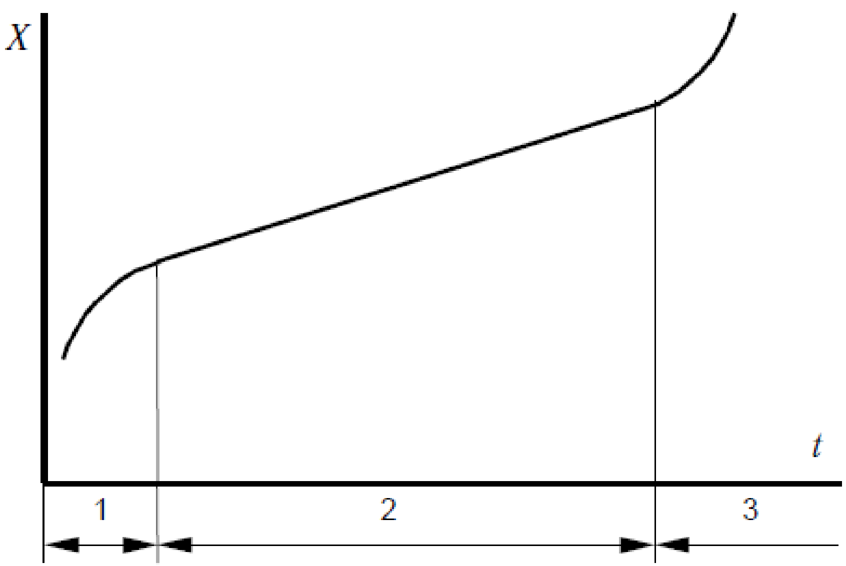
Процесс изменения определяющего параметра элемента можно, как правило, разделить на три периода.

Модели надежности

Вероятностные модели отказов элементов

Параметрическая надежность (модель постепенных отказов)

В первом периоде происходит приработка элемента, под действием внешних воздействий и внутренних процессов происходит его приспособление к конкретным условиям эксплуатации, и скорость изменения параметров обычно довольно велика. К концу периода приработки скорость, как правило, уменьшается и на протяжении достаточно продолжительного второго (основного) периода остается примерно постоянной.

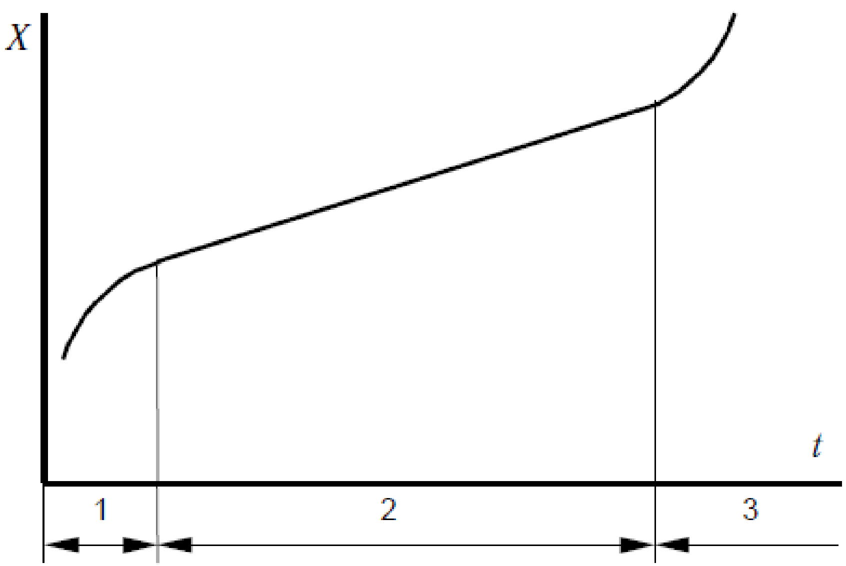


Модели надежности

Вероятностные модели отказов элементов

Параметрическая надежность (модель постепенных отказов)

В процессе эксплуатации в элементе происходят различные необратимые процессы и наступает последний, третий, период (износа и старения), в течение которого скорость изменения параметра ***X*** стремительно растет и в конце периода происходит отказ или элемент снимается с эксплуатации.



Модели надежности

Вероятностные модели отказов элементов

Параметрическая надежность (модель постепенных отказов)

Период приработки обычно составляет несколько процентов от общего времени эксплуатации. Кроме того, иногда приработка осуществляется на заводе-изготовителе. С другой стороны, обычно элементы проектируются и изготавливаются с расчетом только на второй (основной) период, и их эксплуатация в третьем периоде не выгодна и часто недопустима. Поэтому можно считать, что для большинства элементов скорость изменения определяющих параметров постоянна на всем периоде их эксплуатации:

$$X = X_0 + \gamma t. \tag{6.33}$$

Модели надежности

Вероятностные модели отказов элементов

Параметрическая надежность (модель постепенных отказов)

Средняя наработка элемента до отказа T (или средний ресурс, или срок службы) является функцией двух независимых случайных величин: начального значения параметра X_0 и скорости его изменения γ. Очевидно

$$T = \frac{X_{\text{пр}} - X_0}{\gamma} \tag{4.35}$$

(здесь и далее предполагается, что $X_0 < X_{\text{пр}}$, хотя возможен и обратный случай, когда величина определяющего параметра имеет ограничение снизу, однако модель отказа при этом принципиально не изменится).

Модели надежности

Вероятностные модели отказов элементов

Параметрическая надежность (модель постепенных отказов)

Если аргументы X_0 и γ распределены по нормальному закону с математическими ожиданиями $M(X_0) = \bar{X}_0$ и $M(\gamma) = \bar{\gamma}$ и средними квадратическими отклонениями σ_{X_0} и σ_γ, то и параметр X в момент времени t также будет распределен по нормальному закону с математическим ожиданием и средним квадратическим отклонением

$$M(X) = \bar{X} = M(X_0) + M(\gamma)t = \bar{X}_0 + \bar{\gamma}t,$$

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_{X_0}^2 + (\sigma_\gamma t)^2}. \qquad (6.35)$$

Модели надежности

Вероятностные модели отказов элементов

Параметрическая надежность (модель постепенных отказов)

Учитывая, что вероятность безотказной работы элемента $P(t)$ равна вероятности того, что в течение времени t параметр X не выйдет за заданное значение X_{max}, получим

$$P(t) = p(X \le X_{max}) = \frac{1}{2} + \Phi\left[\frac{X_{max} - (\bar{X}_0 + \bar{\gamma} t)}{\sqrt{\sigma_{X_0}^2 + (\sigma_\gamma t)^2}}\right]. \quad (6.36)$$

Модели надежности

Вероятностные модели отказов элементов

Параметрическая надежность (модель постепенных отказов)

В более общем случае, если математическое ожидание $\bar{\gamma}$ и среднее квадратическое отклонение σ_γ скорости изменения параметра X также являются функциями времени (т.е. изменение параметра происходит не по линейному закону (6.33)), формулу (6.36) можно записать в виде

$$P(t) = \frac{1}{2} + \Phi\left\{\frac{X_{max} - [\bar{X}_0 + \bar{\gamma}(t)t]}{\sqrt{\sigma_{X_0}^2 + [\sigma_\gamma(t)t]^2}}\right\}. \qquad (6.37)$$

Модели надежности

Вероятностные модели отказов элементов

Параметрическая надежность (модель постепенных отказов)

В наиболее простых случаях аналогичный анализ изменения определяющего параметра в процессе эксплуатации элемента может быть проведен и при других законах распределения параметров X_0 и γ, в том числе и при двухстороннем ограничении определяющего параметра. При более сложных или эмпирических законах распределения для получения функции $P(t)$ можно использовать методы компьютерного статистического моделирования.

Модели надежности

Вероятностные модели отказов элементов

Чувствительность технических объектов к условиям эксплуатации

Еще одной разновидностью модели надежности можно считать зависимость ее характеристик от условий применения, в частности от испытываемых нагрузок. Например, наработка объекта до отказа или между отказами T конкретного технического объекта, очевидно, является случайной функцией случайной нагрузки S:

$$T = F(S). \tag{6.38}$$

Зависимость (6.38) позволяет одновременно учитывать случайный характер нагрузки и случайные характеристики самого технического объекта.

Модели надежности

Вероятностные модели отказов элементов

Чувствительность технических объектов к условиям эксплуатации

Сравнивать различные технические объекты по наработке до отказа можно лишь в случае, если они находятся в одинаковых условиях. Для изделий определенного назначения при испытаниях целесообразно принять стандартные условия испытаний с нагрузкой, близкой к математическому ожиданию типичных нагрузок. Если стандартное значение нагрузки принять за начало отсчета, то случайную нагрузку можно представить в виде

$$S = S_0 + \Delta S. \qquad (6.39)$$

Модели надежности

Вероятностные модели отказов элементов

Чувствительность технических объектов к условиям эксплуатации

Здесь S_0 - стандартная неслучайная нагрузка; ΔS – случайное отклонение нагрузки от стандартного значения.

Разложив функцию (6.38) в ряд Тейлора в окрестностях точки S_0, ограничившись только тремя первыми членами, получим

$$T \approx T_0 + \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_{S=S_0} \Delta S + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial S^2}\right)_{S=S_0} (\Delta S)^2 = $$

$$= T_0 + U_1 \Delta S + U_2 (\Delta S)^2, \qquad (6.40)$$

Модели надежности

Вероятностные модели отказов элементов

Чувствительность технических объектов к условиям эксплуатации

где T_0 – случайное время безотказной работы при стандартной нагрузке S_0; $\Delta S = S - S_0$; $U_1 = \frac{\partial T}{\partial S}$

и $U_2 = \frac{\partial^2 T}{\partial S^2}$ – значения производных в окрестностях точки $S = S_0$.

В формуле (6.40) случайные величины T_0, U_1 и U_2 характеризуют технический объект, а случайная величина ΔS – отклонение случайной нагрузки от стандартной.

Модели надежности

Вероятностные модели отказов элементов

Чувствительность технических объектов к условиям эксплуатации

Случайные величины U_n иногда называют *чувствительностью n*-го порядка к нагрузке. Применив к зависимости (6.40) теоремы о числовых характеристиках случайных величин, получим выражение для математического ожидания наработки (средней наработки)

$$M(T) = M(T_0) + M(U_1)M(\Delta S) + \frac{1}{2}M(U_2)[M^2(\Delta S) + \sigma_S^2], \quad (6.41)$$

Модели надежности

Вероятностные модели отказов элементов

Чувствительность технических объектов к условиям эксплуатации

где $M(T_0)$ - средняя наработка при стандартной нагрузке (стандартная средняя наработка); $M(U_1) = dM(T)/dS$ и $M(U_2) = d^2M(T)/dS^2$ - значения производных средней наработки по нагрузке при $S = S_0$ (средние чувствительности к нагрузке); $M(\Delta S)$ и σ_S – среднее значение (математическое ожидание) и среднее квадратическое отклонение отклонения нагрузки от стандартной.

Модели надежности

Вероятностные модели отказов элементов

Чувствительность технических объектов к условиям эксплуатации

Таким образом, надежность технического объекта можно приближенно характеризовать величинами, не зависящими от условий эксплуатации: стандартной средней наработкой $M(T_0) = T_{\text{ср}0}$ и средними чувствительностями к нагрузке первого и второго порядков $M(U_1) = U_{\text{ср}1}$ и $M(U_2) = U_{\text{ср}2}$.

Модели надежности

Статистическое моделирование надежности

Приведенные модели отказов являются формализованными описаниями процессов потери элементом работоспособности. Они позволяют установить функциональные связи характеристик элемента с происходящими в нем при эксплуатации процессами и параметрами надежности в некоторых простейших случаях. Статистическая природа этих закономерностей проявляется в том, что аргументы функций являются случайными величинами и зависят от большого числа факторов.

Модели надежности

Статистическое моделирование надежности

Если случайные величины, значения которых оказывают определяющее влияние на работоспособность элемента (начальное значение параметра X_0, время начала процессов износа или старения t_0, скорость изменения параметра γ) распределены по более сложным законам или являются дискретными случайными величинами, или надежность элемента определяется воздействием еще и других случайных факторов (например, параметров окружающей среды, характеристик обрабатываемых материалов и т.д.), то аналитический расчет надежности становится практически неразрешимой задачей.

Модели надежности

Статистическое моделирование надежности

В этих случаях для прогнозирования поведения элементов целесообразно воспользоваться *методами статистического имитационного моделирования*, в частности *методом Монте-Карло*, который является практически универсальным методом определения закона распределения параметров состояния технических объектов и расчета надежности по известным законам распределения влияющих на него случайных величин.

Модели надежности

Статистическое моделирование надежности

Метод Монте-Карло

Основная идея метода Монте-Карло заключается в многократном расчете определяющего параметра (или параметров) по известным зависимостям, описывающим процесс потери работоспособности, причем для случайных аргументов, входящих в расчетные формулы, перебираются их наиболее вероятные значения в соответствии с известными законами распределения. Таким образом, каждое статистическое испытание заключается в выявлении одной из реализаций случайного процесса, а их совокупность позволяет оценить ход этого процесса и его основные параметры.

Модели надежности

Статистическое моделирование надежности

Метод Монте-Карло

В общем случае можно считать, что значение определяющего параметра X определяется набором случайных величин Z_i $(i=1,2,...,n)$, законы распределения которых известны (или дискретные значения которых заданы своими вероятностями), т.е.

$$X = X(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n), \qquad (6.42)$$

причем зависимость (6.42) может быть задана как одной или несколькими расчетными формулами, так и алгоритмом, таблицей, графиком и т.д.

Модели надежности

Статистическое моделирование надежности

Метод Монте-Карло

Так как аргументы функции (6.42) являются случайными величинами, то и параметр X является случайной величиной. Поэтому для анализа надежности по параметру X необходимо проанализировать его распределение и для оценки вероятности безотказной работы определить долю, которую составляют допустимые режимы (в общем случае $X_{min} < X < X_{max}$).