КВАНТОВАЯ ОПТИКА.
Задачи

Квантовая оптика. Задачи

Качественные задачи

1. Зависит ли энергия фотона от длины волны света?
2. Металлическая пластинка под действием рентгеновских лучей зарядилась. Каков знак заряда?
3. Чему равно отношение давления света, производимого на идеально белую поверхность, к давлению света, производимому на идеально черную поверхность? Все прочие условия в обоих случаях одинаковы.

Квантовая оптика. Задачи

Качественные задачи

4. Свободный атом излучает фотон. Выполняется ли при этом закон сохранения энергии? Выполняется ли при этом закон сохранения импульса? Выполняется ли при этом закон сохранения массы?
5. Во что преобразуется при внешнем фотоэффекте энергия падающего на тело света?
6. Способен ли свободный электрон поглотить квант света?

Квантовая оптика. Задачи

Качественные задачи

7. Фотон и электрон обладают одинаковой кинетической энергией. Который из них имеет большую длину волны?
8. Освещают две нейтральные пластинки, одну — металлическую, другую — полупроводниковую. Останутся ли пластинки нейтральными при возникновении фотоэффекта?

Квантовая оптика. Задачи

Задачи с решениями

9. Определить длину волны фотона, импульс которого равен импульсу электрона, прошедшего ускоряющую разность потенциалов U = 10 В.

Решение:

Скорость электрона, прошедшего ускоряющую разность потенциалов U, определяется из соотношения

$$eU = \frac{m_e v^2}{2},$$

Квантовая оптика. Задачи

9. *Решение:*

откуда

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m_e}}.$$

Импульс электрона

$$p_e = m_e v = \sqrt{2m_e eU}.$$

Квантовая оптика. Задачи

9. *Решение:*

По условию этот импульс равен импульсу фотона $p = h/\lambda$.

Тогда

$$\frac{h}{\lambda} = \sqrt{2m_e eU},$$

откуда

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_e eU}} = 388 \text{ пм}.$$

Квантовая оптика. Задачи

10.

Фотон с длиной волны λ = 0,2 мкм вырывает с поверхности натрия фотоэлектрон, кинетическая энергия которого $E_к$ = 2 эВ. Определить работу выхода и красную границу фотоэффекта.

Решение: Энергия фотона $$\varepsilon = \frac{hc}{\lambda}.$$

Из уравнения фотоэффекта Эйнштейна следует

$$\varepsilon = \frac{hc}{\lambda} = A + E_к,$$

Квантовая оптика. Задачи

10. *Решение:*

откуда работа выхода

$$A = \frac{hc}{\lambda} - E_{к} = 6,73 \text{ эВ}.$$

Красная граница фотоэффекта определяется из условия

$$A = \frac{hc}{\lambda_{кр}},$$

Следовательно, $\lambda_{кр} = \dfrac{hc}{A} = 0,295 \text{ мкм}.$

Квантовая оптика. Задачи

11.

Фотон с энергией ε = 1,025 МэВ рассеялся на первоначально покоившемся свободном электроне. Определите угол рассеяния фотона, если длина волны рассеянного фотона оказалась равной комптоновской длине волны λ_C = 2,43 пм.

Решение:

Энергия фотона $\varepsilon = \dfrac{hc}{\lambda}$, откуда $\lambda = \dfrac{hc}{\varepsilon}$.

Длина волны рассеянного фотона $\lambda' = \lambda + \lambda_C(1 - \cos\theta)$. Поскольку $\lambda' = \lambda_C$, то

Квантовая оптика. Задачи

11. *Решение:*

$$\lambda_C = \frac{hc}{\varepsilon} + \lambda_C(1 - \cos\theta),$$ откуда $$\cos\theta = \frac{hc}{\lambda_C \varepsilon},$$

следовательно, $$\theta = \arccos\left(\frac{hc}{\lambda_C \varepsilon}\right) = 60^\circ.$$

Квантовая оптика. Задачи

7.1.1.

Точечный изотропный источник испускает свет с λ = 589 нм.

Световая мощность источника P = 10 Вт. Найти:

а) среднюю плотность потока фотонов на расстоянии r = 2,0 м от источника;

б) расстояние от источника до точки, где средняя концентрация фотонов n = 100 см$^{-3}$.

Квантовая оптика. Задачи

7.1.1. *Решение:*

Найдем, прежде всего, число фотонов, испускаемых источником в единицу времени *dN*/*dt*. Из определения мощности источника следует, что

$$\frac{dN}{dt} = \frac{P}{\hbar\omega} = \frac{P\lambda}{2\pi\hbar c}. \qquad (1)$$

Окружим точечный источник сферической поверхностью радиуса *r*.

Очевидно, что число фотонов, пролетающих через эту поверхность в единицу времени, равно *dN*/*dt*.

Квантовая оптика. Задачи

7.1.1. *Решение:*

Поэтому из определения плотности потока фотонов и формулы (1) находим

$$< j > \;=\; \frac{1}{4\pi r^2}\frac{dN}{dt} = \frac{P\lambda}{8\pi^2\hbar c r^2}. \qquad (2)$$

Если выражение (2) поделить на скорость света, то получим концентрацию фотонов на расстоянии *r* от источника. Таким образом, расстояние *r*, на котором имеется заданная концентрация фотонов, определяется выражением

Квантовая оптика. Задачи

7.1.1. *Решение:*

$$r = \frac{1}{2\pi c}\sqrt{\frac{P\lambda}{2\hbar n}}. \qquad (3)$$

Подставляя в формулы (2), (3) численные значения величин, получаем

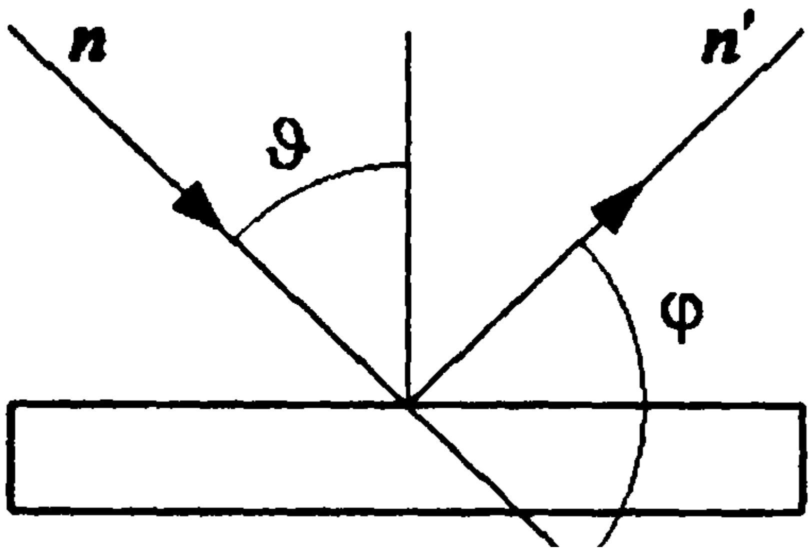
$$< j > \; = 6\times10^{17} \text{ м}^{-2}\text{с}^{-1}, \quad r = 9 \text{ м}$$

Ответ: $< j > \; = \dfrac{1}{4\pi r^2}\dfrac{dN}{dt} = \dfrac{P\lambda}{8\pi^2\hbar c r^2} = 6\times10^{17} \text{ м}^{-2}\text{с}^{-1};$

$$r = \frac{1}{2\pi c}\sqrt{\frac{P\lambda}{2\hbar n}} = 9 \text{ м}.$$

Квантовая оптика. Задачи

7.1.2.



Короткий импульс света с энергией E = 7,5 Дж в виде узкого почти параллельного пучка падает на зеркальную пластинку с коэффициентом отражения ρ = 0,60. Угол падения ϑ = 30°. Определить с помощью корпускулярных представлений импульс, переданный пластинке.

Квантовая оптика. Задачи

7.1.2. *Решение:*

Пусть *N* - число фотонов в импульсе света с полной энергией *E*.

Полный импульс налетающих фотонов равен

$$\mathbf{p} = N\frac{\hbar\omega}{c}\mathbf{n} = \frac{E}{c}\mathbf{n}, \qquad (1)$$

где *n* - единичный вектор в направлении

движения налетающих фотонов. От зеркальной пластинки с коэффициентом отражения ρ отразится $N' = \rho N$ фотонов.

Квантовая оптика. Задачи

7.1.2. *Решение:*

Их общий импульс определяется выражением

$$\mathrm{p}' = N'\frac{\hbar\omega}{c}\mathrm{n}' = \rho\frac{E}{c}\mathrm{n}', \qquad (2)$$

где n' - единичный вектор в направлении движения отраженных фотонов.

Импульс, переданный пластине, равен

$$\Delta\mathrm{p} = \mathrm{p} - \mathrm{p}' = \frac{E}{c}\left(\mathrm{n} - \rho\mathrm{n}'\right). \qquad (3)$$

Квантовая оптика. Задачи

7.1.2. *Решение:*

Модуль импульса, переданного пластине, найдем, возводя выражение (3) в квадрат:

$$|\Delta \mathrm{p}|^2 = \frac{E^2}{c^2}\left(1+\rho^2-2\rho\cos\varphi\right),$$

где φ -угол между векторами *n* и *n*'. Как видно из рисунка, $\varphi = \pi - 2\vartheta$.

Учитывая, что $\cos\varphi = -\cos 2\vartheta$, окончательно получаем

$$|\Delta \mathrm{p}| = \frac{E}{c}\sqrt{1+\rho^2+2\rho\cos 2\vartheta}.$$

Квантовая оптика. Задачи

7.1.2. *Решение:*

Подставляя в это выражение численные значения величин, находим $|\Delta p| = 35$нН·с.

Квантовая оптика. Задачи

7.1.3.

Найти длину волны коротковолновой границы сплошного рентгеновского спектра, если скорость электронов, подлетающих к антикатоду трубки, v = 0,85c, где c - скорость света.

Решение:

Коротковолновая граница сплошного рентгеновского спектра λ_{min} вычисляется по формуле

$$\lambda_{min} = \frac{2\pi c}{\omega_{max}}$$

Квантовая оптика. Задачи

7.1.3. *Решение:*

с учетом условия, что вся кинетическая энергия электрона *T*, подлетающего к антикатоду трубки, трансформируется в энергию излучения, т.е. $\hbar\omega_{max} = T$, и следовательно

$$\lambda_{min} = \frac{2\pi c\hbar}{T}.$$

Поскольку скорость электронов не мала по сравнению со скоростью света, для вычисления кинетической энергии электрона *T* следует учитывать релятивистское увеличение его массы.

Квантовая оптика. Задачи

7.1.3. *Решение:*

В результате получаем

$$\lambda_{\min} = \frac{2\pi\hbar}{mc(\gamma - 1)},$$

где

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}.$$

Подставляя численное значение скорости электрона, находим

λ_{min}=2,8 пм

Квантовая оптика. Задачи

7.1.4.

При поочередном освещении поверхности некоторого металла светом с длинами волн λ_1 = 0,35 мкм и λ_2 = 0,54 мкм обнаружили, что соответствующие максимальные скорости фотоэлектронов отличаются друг от друга в η = 2,0 раза. Найти работу выхода с поверхности этого металла.

Квантовая оптика. Задачи

7.1.4. *Решение:*

Поскольку обе использованные длины волны обеспечивают энергию фотона $h\nu \ll m_e c^2$=0,51 МэВ, можно воспользоваться нерелятивистским выражением для кинетической энергии электрона:

$$T_{max} = \frac{1}{2} m v_{max}^2,$$

где v_{max} – максимальная скорость фотоэлектрона.

Квантовая оптика. Задачи

7.1.4. *Решение:*

С другой стороны, согласно формуле Эйнштейна, энергия фотона расходуется на преодоление потенциального барьера (совершение работы выхода) и придание фотоэлектрону некоторой скорости:

$$\mathcal{E} = h\nu = A + T_{max}$$

В итоге можем записать:

$$v_{max}^2 = \frac{2}{m}\left(\frac{ch}{\lambda} - A\right)$$

Квантовая оптика. Задачи

7.1.4. *Решение:*

Вычисляя отношение максимальных скоростей электронов, соответствующих

длинам волн λ_1 и λ_2

$$\frac{v_{1max}}{v_{2max}} = \eta \,,$$

получаем уравнение

$$\frac{ch}{\lambda_1} - A = \eta^2 \left(\frac{ch}{\lambda_2} - A \right) \,,$$

из которого находим:

Квантовая оптика. Задачи

7.1.4. *Решение:*

$$A = \frac{ch(\eta^2\lambda_1 - \lambda_2)}{\lambda_1\lambda_2(\eta^2 - 1)}\ .$$

Подставляя численные значения величин, получим

A=1,9 эВ

Квантовая оптика. Задачи

Эффект Комптона

Основные формулы

Изменение длины волны $\Delta\lambda$ фотона при рассеянии его на свободном покоящемся электроне в лабораторной системе отсчета на угол ϑ определяется выражением

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \lambda_c (1 - \cos\vartheta) \qquad (7.2.1)$$

где λ и λ' - длины волн фотона до и после рассеяния соответственно, λ_c - комптоновская длина волны электрона

$$\lambda_c = \frac{2\pi\hbar}{mc} = 2{,}436 \text{ пм}, \qquad (7.2.2)$$

m - масса электрона.

Квантовая оптика. Задачи

Эффект Комптона

Основные формулы

При комптоновском рассеянии закон сохранения энергии имеет вид

$$\varepsilon = \varepsilon' + T, \tag{7.2.3}$$

где ε, ε' - энергии фотона до и после рассеяния соответственно, T – кинетическая энергия электронов отдачи. Если эффект Комптона вызван фотоном, имеющим энергию много меньшую энергии покоя электрона, то можно пользоваться нерелятивистским выражением для T. В противном случае следует пользоваться формулами релятивистской механики (см., например, (7.1.5)).

Квантовая оптика. Задачи

Эффект Комптона

Примеры решения задач

7.2.1. Фотон с длиной волны $\lambda = 6{,}0$ пм рассеялся под прямым углом на покоящемся свободном электроне. Найти:

а) частоту рассеянного фотона;

б) кинетическую энергию электрона отдачи.

Решение

При рассеянии фотона под прямым углом $\cos\vartheta = 0$ и, согласно формуле (7.2.1) разность длин волн рассеянного и налетающего фотонов равна

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \lambda_c = \frac{2\pi\hbar}{mc} .$$

Квантовая оптика. Задачи

Эффект Комптона

Примеры решения задач

С помощью формул (7.1.1.), (7.2.3.) и (1) находим частоту рассеянного фотона

$$\omega' = \frac{2\pi c}{\lambda'} = \frac{2\pi c}{\lambda + \lambda_c},$$

и кинетическую энергию электрона отдачи

$$T = 2\pi c\hbar\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda + \lambda_c}\right) = \frac{2\pi c\hbar\lambda_c}{\lambda(\lambda + \lambda_c)}$$

Подставляя численные значения величин, находим $\omega' = 2{,}2\times10^{20}\,\text{с}^{-1}$, $T = 60$ кэВ.

Ответ: $\omega' = \dfrac{2\pi c}{\lambda + \lambda_c} = 2{,}2\times10^{20}\,\text{с}^{-1}$; $T = \dfrac{2\pi c\hbar\lambda_c}{\lambda(\lambda + \lambda_c)} = 60$ кэВ.

Квантовая оптика. Задачи

Эффект Комптона

Примеры решения задач

7.2.2. Фотон с энергией $\hbar\omega = 250$ кэВ рассеялся под углом $\vartheta = 120^\circ$ на первоначально покоящемся свободном электроне. Определить энергию рассеянного фотона.

Решение

Воспользуемся формулой (7.2.1), представив её в виде

$$\lambda - \lambda' = 2\lambda_c \sin^2(\vartheta/2).$$

С учетом формул (7.1.1), (7.2.2), находим

$$\frac{1}{\varepsilon'} - \frac{1}{\varepsilon} = \frac{2}{mc^2}\sin^2(\vartheta/2),$$

где ε, ε' - энергии фотона до и после рассеяния соответственно, m - масса электрона, c – скорость света. Выражая энергию рассеянного фотона ε' через его энергию $\varepsilon = \hbar\omega$ до рассеяния и угол ϑ, получаем формулу

Квантовая оптика. Задачи

Эффект Комптона

Примеры решения задач

$$\varepsilon' = \frac{\hbar\omega}{1 + \dfrac{2\hbar\omega}{mc^2}\sin^2(\vartheta/2)}. \tag{3}$$

Подставляя численные значения величин, имеем $\varepsilon' = 60$ кэВ.

Ответ: $\varepsilon' = \dfrac{\hbar\omega}{1 + \dfrac{2\hbar\omega}{mc^2}\sin^2(\vartheta/2)} = 60$ кэВ.

Квантовая оптика. Задачи

Эффект Комптона

Примеры решения задач

7.2.3. Фотон рассеялся под углом $\vartheta = 120^\circ$ на покоящемся свободном электроне, в результате чего электрон получил кинетическую энергию $T = 0{,}45$ МэВ. Найти энергию фотона до рассеяния.

Решение

Используя формулу (2) предыдущей задачи и учитывая закон сохранения энергии (7.2.3), получаем формулу

$$\frac{1}{\varepsilon - T} - \frac{1}{\varepsilon} = \frac{2}{mc^2} \sin^2(\vartheta/2)\ , \qquad (1)$$

которая приводит к квадратному уравнению относительно энергии фотона до рассеяния ε

$$\varepsilon^2 - \varepsilon T - \frac{mc^2 T}{2\sin^2(\vartheta/2)} = 0\ . \qquad (2)$$

Квантовая оптика. Задачи

Эффект Комптона

Примеры решения задач

Интересующий нас положительный корень этого уравнения определяется выражением

$$\varepsilon = \frac{T}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2mc^2}{T\sin^2(\vartheta/2)}}\right). \tag{3}$$

Подставляя в это выражение численные значения величин, получаем $\varepsilon = 0{,}68$ МэВ.

Ответ: $\varepsilon = \frac{T}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2mc^2}{T\sin^2(\vartheta/2)}}\right) = 0{,}68$ МэВ.