

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

Распространение электромагнитных волн

Дисперсия и поглощение

В однородной среде электромагнитная волна распространяется с неизменной скоростью и в неизменном направлении. Скорость волны в пустоте максимальна. Скорость волны в среде равна $v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$ или, так как в большинстве случаев $\mu=1$, $v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}}$.

Отношение скорости распространения волн в пустоте к скорости распространения в среде носит название *показателя преломления*. Таким образом, электромагнитная теория приводит к равенству $n = \sqrt{\epsilon}$, которое неплохо выполняется для очень длинных волн.

Распространение электромагнитных волн

Дисперсия и поглощение

С изменением длины волны показатель преломления меняется. Это явление, называемое *дисперсией*, чуждо электромагнитной теории Максвелла, полагаящей среду непрерывной и не учитывающей взаимодействия излучения с веществом. Как бы то ни было, равенство $n = \sqrt{\epsilon}$ для быстрых электромагнитных колебаний не имеет места.

Распространяясь по веществу, электромагнитная волна приводит в колебательное состояние электрические заряды молекул.

Распространение электромагнитных волн

Дисперсия и поглощение

Так как электронное облако легко подвижно по сравнению с тяжелыми ядрами, то электрическое колебание состоит в смещении центра тяжести электронов по отношению к неподвижному центру тяжести положительных зарядов атомных ядер.

Обозначая через m и e заряд и массу колеблющихся электронов, можно записать уравнение колебания в форме

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - eE_0 \cos \omega t .$$

Распространение электромагнитных волн

Дисперсия и поглощение

Или, деля на m и пользуясь формулой собственной частоты колебания $\omega_0^2 = k/m$,

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega_0^2 x - \frac{e}{m} E_0 \cos \omega t .$$

Мы приравняли произведение массы на ускорение двум силам: возвращающей силе $-kx$ и внешней периодически меняющейся силе $eE_0 \cos \omega t$. Это уравнение вынужденных гармонических колебаний. Оно удовлетворяется, если положить

$$x = x_0 \cos \omega t .$$

Распространение электромагнитных волн

Дисперсия и поглощение

После подстановки в уравнение найдем

$$x_0 = \frac{-\frac{e}{m} E_0}{\omega_0^2 - \omega^2} .$$

Дипольный момент молекулы будет равен

$$ex_0 = \frac{-\frac{e^2}{m} E_0}{\omega_0^2 - \omega^2} .$$

Распространение электромагнитных волн

Дисперсия и поглощение

Вектор поляризации - дипольный момент в единице объема - будет в N раз больше, если N - число молекул в единице объема:

$$P = \frac{-\frac{Ne^2}{m} E_0}{\omega_0^2 - \omega^2} .$$

Поляризация связана с напряженностью формулой

$$P = \frac{\epsilon - 1}{4\pi} E ,$$

Распространение электромагнитных волн

Дисперсия и поглощение

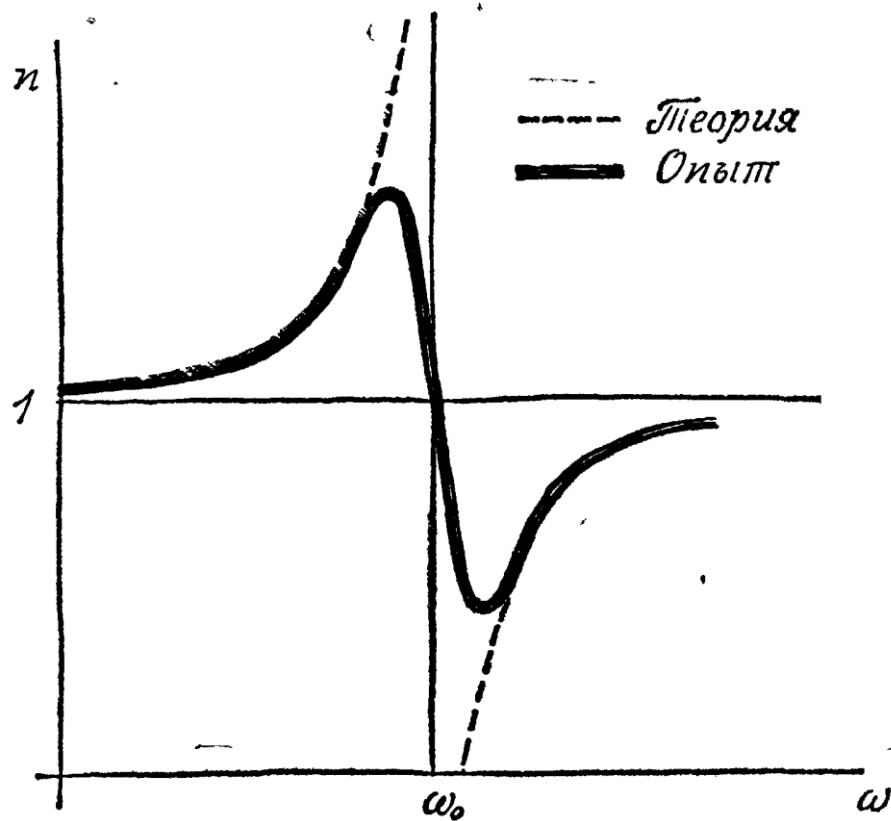
Таким образом, мы выразили диэлектрическую проницаемость среды через параметры молекулярного диполя:

$$\varepsilon = 1 + \frac{\frac{4\pi N e^2}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2} .$$

Показатель преломления среды должен быть равен квадратному корню из этого выражения.

Распространение электромагнитных волн

Дисперсия и поглощение



Общий характер зависимости хорошо подтверждается опытом, как это показывает рисунок. Видно, что показатель преломления растет с увеличением частоты во всем интервале частот, за

исключением области, непосредственно примыкающей к частоте резонансного поглощения.

Распространение электромагнитных волн

Дисперсия и поглощение

Эта область носит название области *аномальной дисперсии*. У вещества может быть не одна, а несколько резонансных частот, соответствующих разностям его энергетических уровней. Тогда и областей аномальной дисперсии будет несколько.

Итак, скорость распространения волны, т.е. показатель преломления, существенным образом зависит от соотношения частоты волны и собственных частот молекулярных диполей.

Разумеется, от этих же параметров зависит степень поглощения электромагнитной волны веществом.

Распространение электромагнитных волн

Дисперсия и поглощение

Повторяя рассуждения, проведенные для упругих волн, мы приходим к совершенно аналогичной формуле

$$I = I_0 e^{-\mu d},$$

позволяющей оценить отношение прошедшей интенсивности излучения I к падающей I_0 , если известны коэффициент поглощения μ и толщина слоя d . Вспомним, что коэффициент поглощения равен величине, обратной толщине слоя, ослабляющего интенсивность излучения в e раз.

Распространение электромагнитных волн

Дисперсия и поглощение

Благодаря сложной системе энергетических уровней, свойственной веществу, зависимость коэффициента поглощения от частоты падающей волны может быть причудливой и «скачущей».

До сих пор речь шла о диэлектрических средах, в состав которых входят лишь связанные электрические заряды. Иные закономерности имеют место при распространении электромагнитной волны в такой среде, где в заметном числе присутствуют свободные электроны. К таким средам относятся металлы, а также подобная газу совокупность свободных зарядов — ионосфера.

Распространение электромагнитных волн

Дисперсия и поглощение

В этом случае следует собственную частоту ω_0 свободного заряда в формуле для ε считать равной нулю, поскольку частота пропорциональна жесткости связи. Тогда диэлектрическая проницаемость представится формулой

$$\varepsilon = 1 - \frac{4\pi N e^2}{m \omega^2}.$$

При достаточно больших значениях ω показатель преломления $n = \sqrt{\varepsilon}$ стремится к единице.

Наоборот, при $\omega^2 < \frac{4\pi N e^2}{m}$ показатель преломления становится мнимым.

Распространение электромагнитных волн

Дисперсия и поглощение

Это означает, что при низких частотах волны не могут проникать в металл или ионосферу. Напротив, при больших частотах волны «не замечают» среды, в которой имеются электроны. Эти предсказания хорошо оправдываются для радиоволн. Действительно, длинные и средние волны отражаются от ионосферы и не проникают в нее, короткие волны способны проникать в ионосферу, а УКВ проходят через нее беспрепятственно.

Распространение электромагнитных волн

Дисперсия и поглощение

Приведенные соображения крайне упрощены, и неудивительно, что они не оправдываются для оптического диапазона, где значения показателя преломления могут быть и близки к нулю и много больше единицы.

Распространение электромагнитных волн

Поведение электромагнитной волны на границе двух сред

Так же как и упругая волна, электромагнитная волна отражается и преломляется, если на ее пути встречается граница раздела двух сред. Основные закономерности этих явлений поддаются теоретическому анализу с помощью пограничных условий для векторов электромагнитного поля. Эти условия, рассмотренные нами ранее, являются в свою очередь следствиями уравнений Максвелла. Поскольку соотношения между полями с обеих сторон от границы не произвольны, расщепление волны на отраженную и проходящую становится тоже не произвольным.

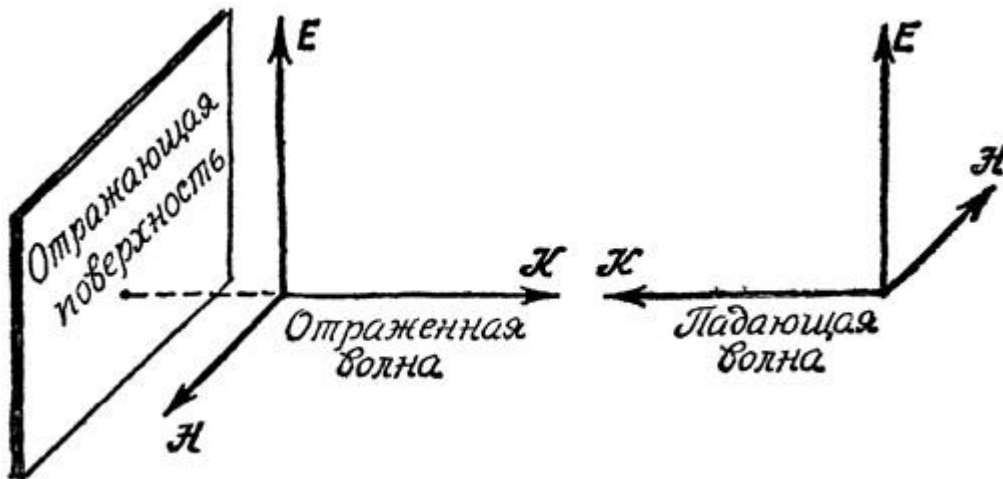
Распространение электромагнитных волн

Поведение электромагнитной волны на границе двух сред

Решающим в этом смысле является следующее соображение: тангенциальные составляющие электрического и магнитного векторов с обеих сторон границы раздела должны быть одинаковыми.

Посмотрим, какие ограничения будут наложены этими соотношениями для простейшего случая

нормального падения волны.

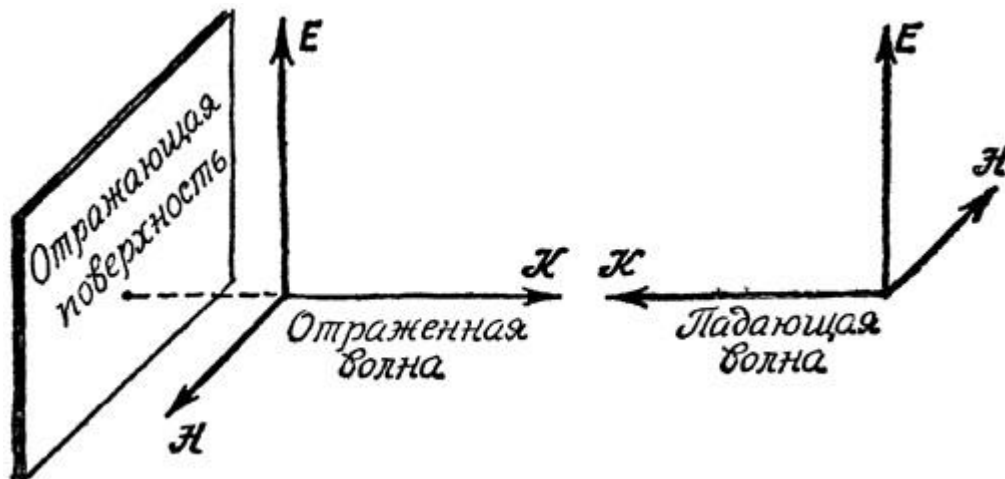


Распространение электромагнитных волн

Поведение электромагнитной волны на границе двух сред

Пусть в плоскости чертежа лежат электрические векторы, тогда магнитные будут расположены перпендикулярно к плоскости чертежа. Известно, что электрический и магнитный векторы с направлением распространения всегда образуют правовинтовую систему, а именно: вектор E поворачивается по кратчайшему пути к вектору H

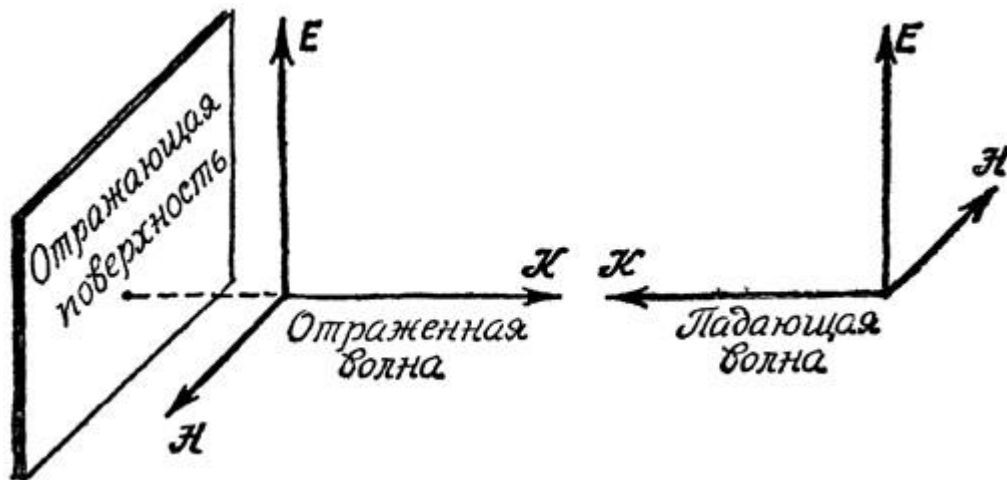
против часовой стрелки, если смотреть против направления распространения.



Распространение электромагнитных волн

Поведение электромагнитной волны на границе двух сред

Очевидно, что удовлетворить этому неперемому следствию из электромагнитной теории при рассмотрении отраженной волны можно, либо изменив на обратное направление вектора $\mathbf{H}$ отраженной волны, либо сделав то же самое для вектора $\mathbf{E}$. Таким образом, либо электрический, либо магнитный векторы при отражении терпят скачок фазы на 180° .



Вопрос о том, какой именно из двух, можно решить, рассмотрев косое падение волны.

Распространение электромагнитных волн

Поведение электромагнитной волны на границе двух сред

Оказывается, оба случая имеют место: один при переходе волны в среду с бóльшим ϵ , другой — в среду с меньшим ϵ .

При нормальном падении дальнейший расчет не зависит от того, какую схему мы изберем.

Пограничные условия запишем в виде

$$\begin{aligned}E_{\text{пад}} &= E_{\text{отр}} + E_{\text{пр}}; \\H_{\text{пад}} &= -H_{\text{отр}} + H_{\text{пр}}.\end{aligned}$$

Но между числовыми значениями векторов H и E имеется связь:

$$H = \sqrt{\epsilon}E = nE$$

Распространение электромагнитных волн

Поведение электромагнитной волны на границе двух сред

Следовательно, мы получим два уравнения

$$\begin{aligned}E_{\text{пад}} &= E_{\text{отр}} + E_{\text{пр}}; \\n_1 E_{\text{пад}} &= -n_1 H_{\text{отр}} + n_2 H_{\text{пр}},\end{aligned}$$

из которых можно найти отношения $E_{\text{отр}}/E_{\text{пад}}$ и $E_{\text{пр}}/E_{\text{пад}}$.

Так как интенсивность волны пропорциональна квадрату амплитуды и показателю преломления, для коэффициентов отражения и прохождения получим, вводя относительный показатель $n = n_1/n_2$ следующие простые формулы:

$$\text{коэффициент отражения} = \left(\frac{E_{\text{отр}}}{E_{\text{пад}}} \right)^2 = \frac{(n - 1)^2}{(n + 1)^2},$$

Распространение электромагнитных волн

Поведение электромагнитной волны на границе двух сред

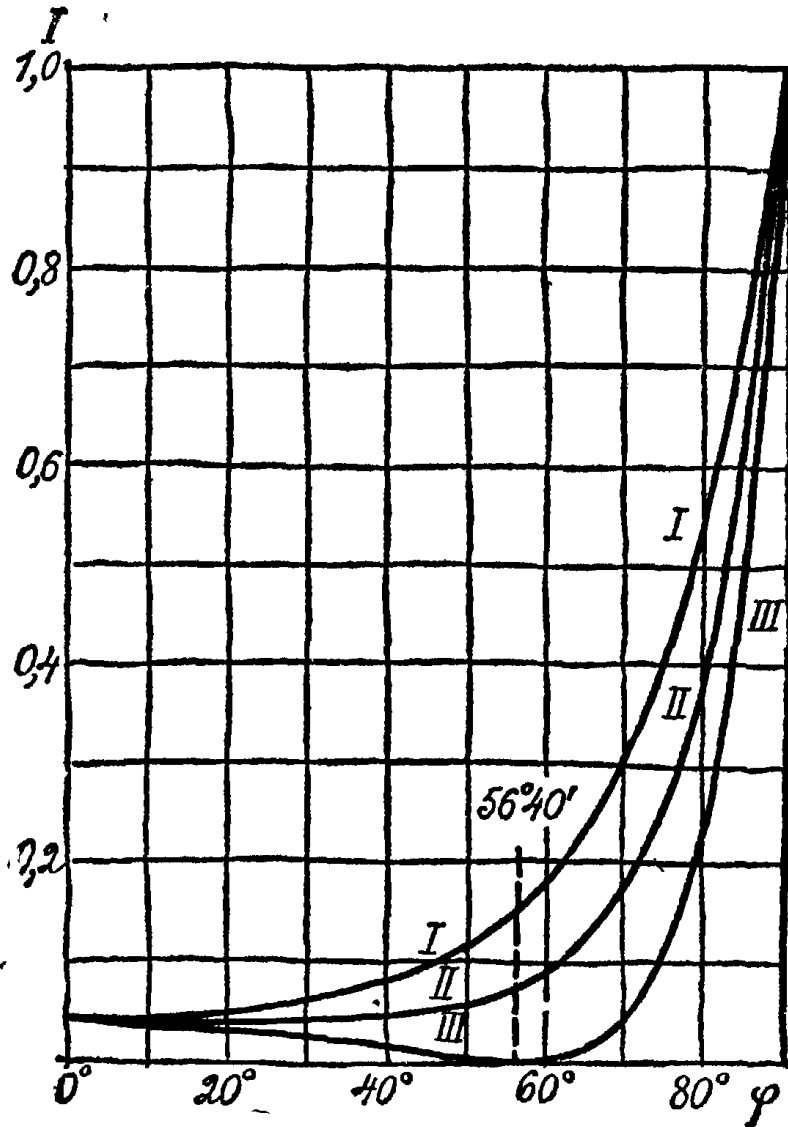
$$\text{коэффициент прохождения} = \left(\frac{E_{\text{пр}}}{E_{\text{пад}}} \right)^2 = \frac{4n}{(n+1)^2}.$$

Видна весьма прозрачная аналогия с упругими волнами.

Подобным вычислением, проделанным для случая произвольного наклона луча и любого поляризационного состояния волны, получены все общие результаты, к изложению которых мы и переходим. Все они весьма удовлетворительно совпадают с экспериментом

Распространение электромагнитных волн

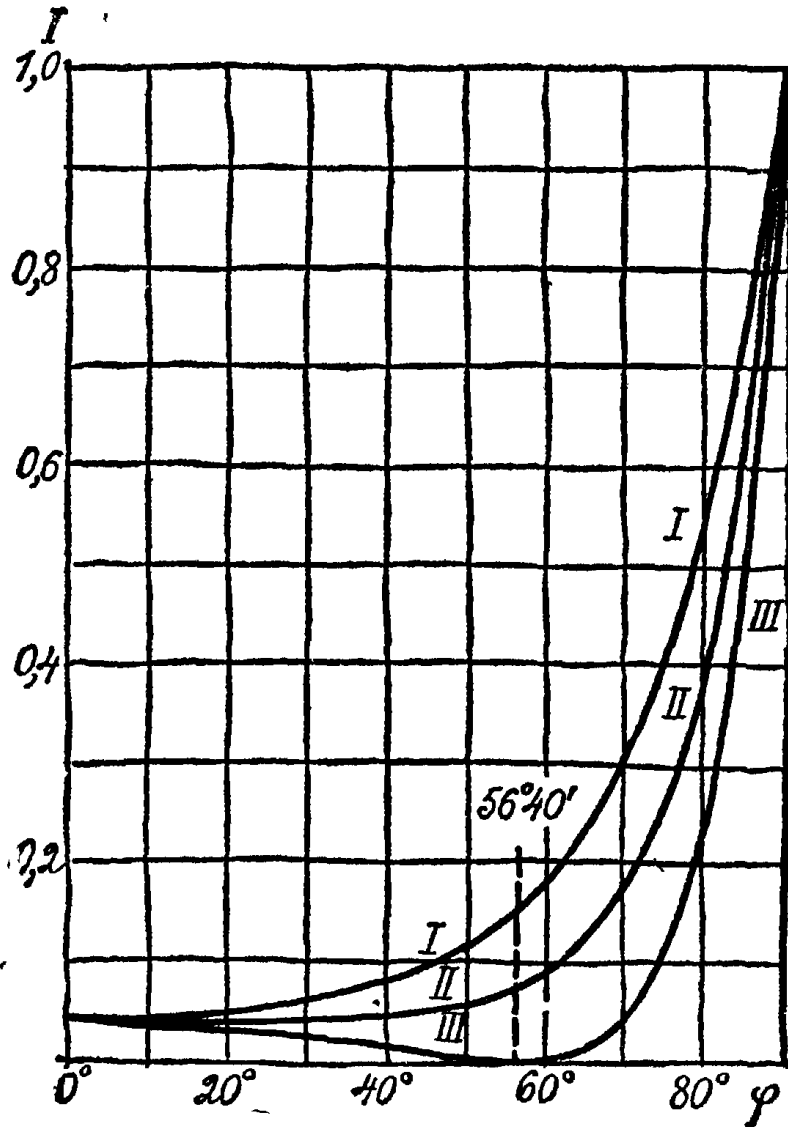
Поведение электромагнитной волны на границе двух сред



Так как сумма коэффициентов отражения и прохождения равна единице, то результаты теоретических расчетов полностью описываются рисунком, на котором интенсивность отраженной волны представлена как функция угла падения.

Распространение электромагнитных волн

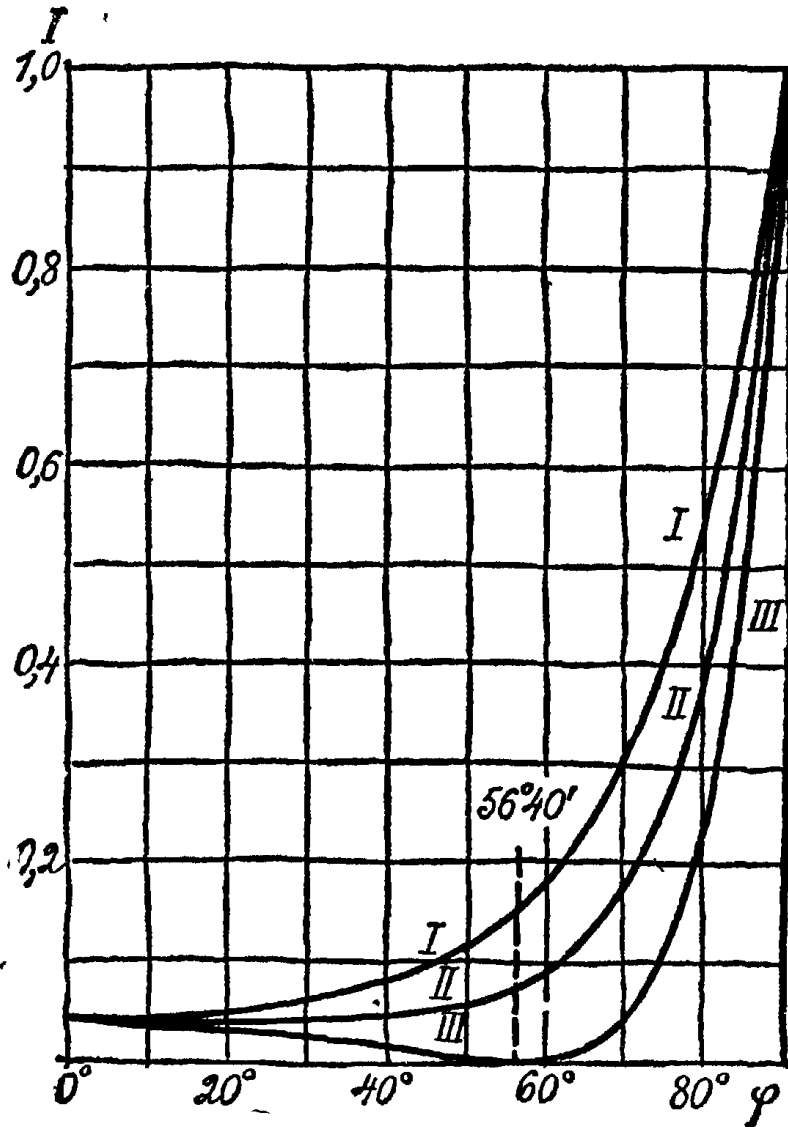
Поведение электромагнитной волны на границе двух сред



Расчет и опыт показывают, что характер отражения существенным образом зависит от поляризационного состояния падающей волны по отношению к плоскости падения. Вектор напряженности электрического поля E в этом смысле «важнее» вектора H хотя бы потому, что фотохимическим действием обладает именно вектор E .

Распространение электромагнитных волн

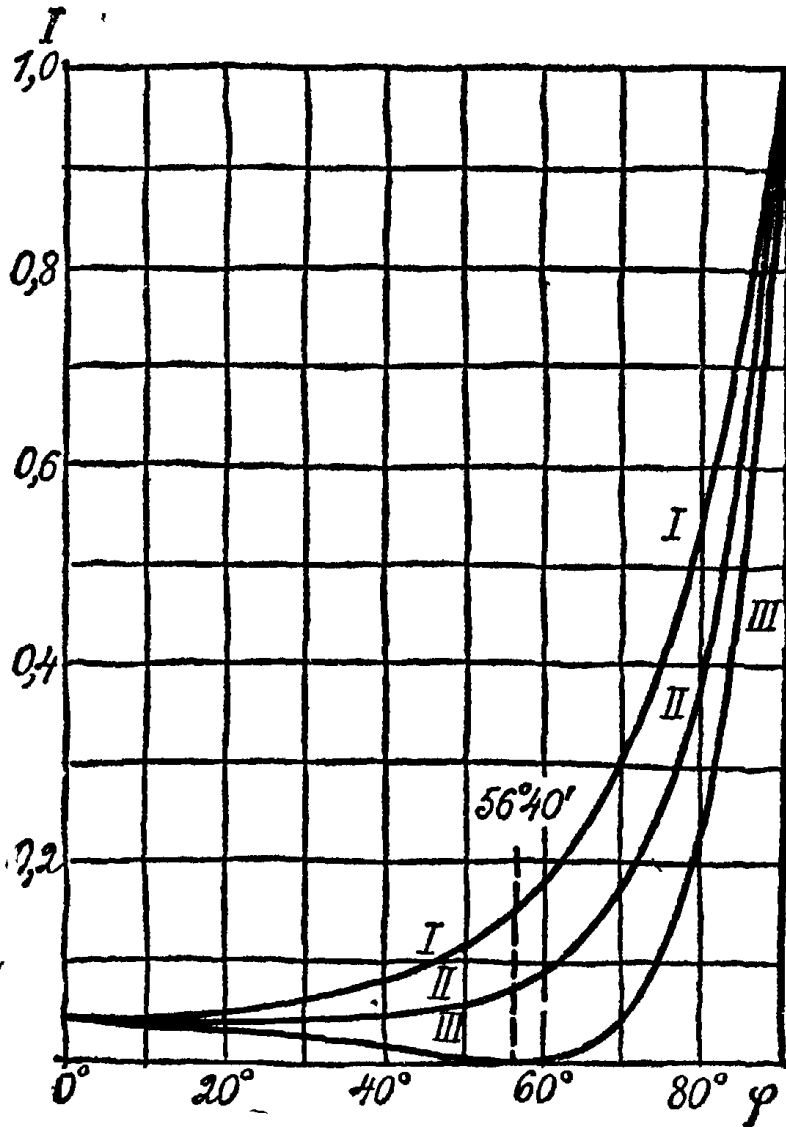
Поведение электромагнитной волны на границе двух сред



Поэтому принято, описывая поляризационное состояние волны, описывать его по отношению к электрическому вектору. Положение вектора $\mathbf{H}$ всегда легко найдется, если только известно направление распространения волны.

Распространение электромагнитных волн

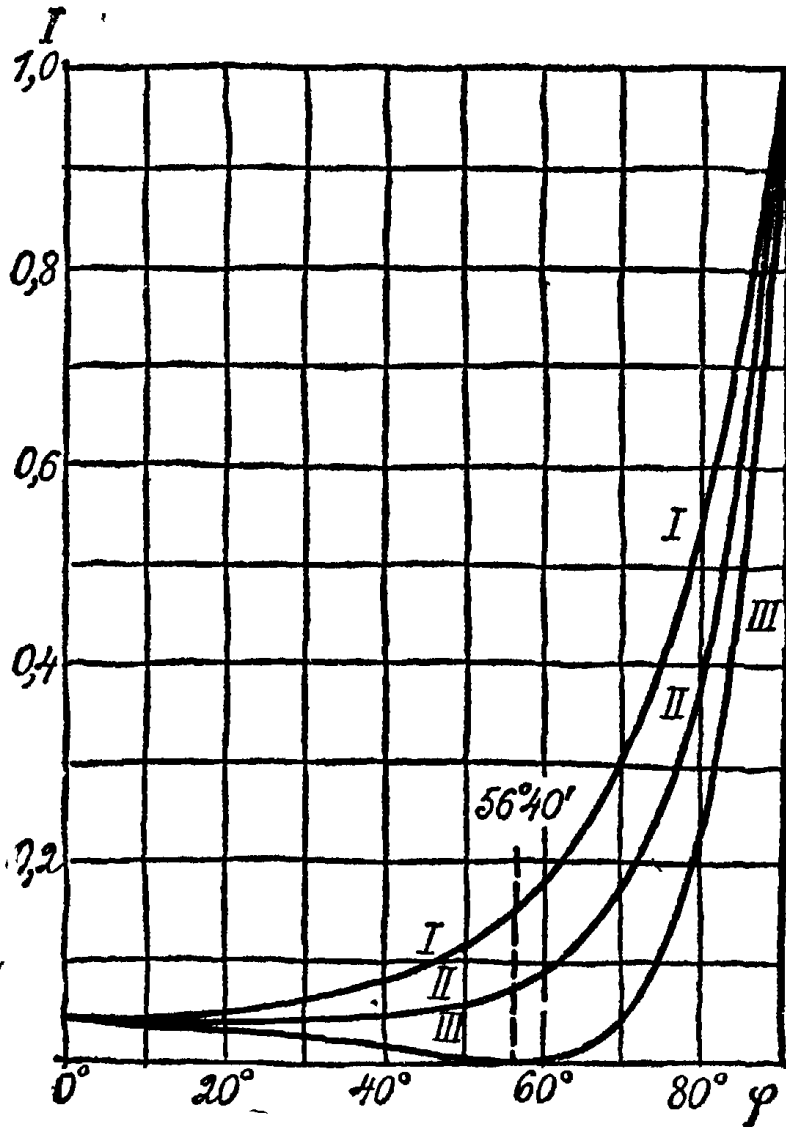
Поведение электромагнитной волны на границе двух сред



Таким образом, коэффициент отражения различен для двух волн, падающих под одним и тем же углом φ на одну и ту же границу раздела, если в одном случае электрический вектор лежит в плоскости падения, а в другом случае перпендикулярен к ней.

Распространение электромагнитных волн

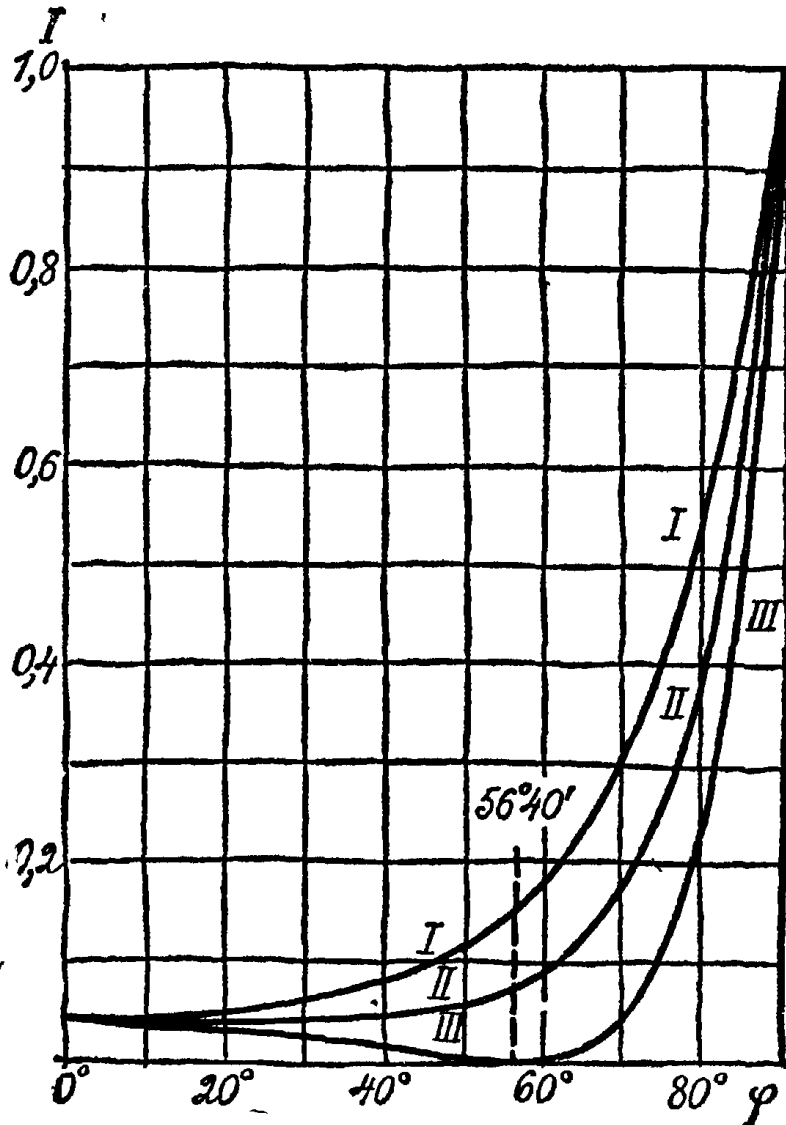
Поведение электромагнитной волны на границе двух сред



Кривая **I** на рисунке соответствует случаю, когда вектор **E** перпендикулярен к плоскости падения; кривая **III** соответствует вектору **E**, лежащему в плоскости падения; кривая **II** — случаю, когда падающая волна не поляризована.

Распространение электромагнитных волн

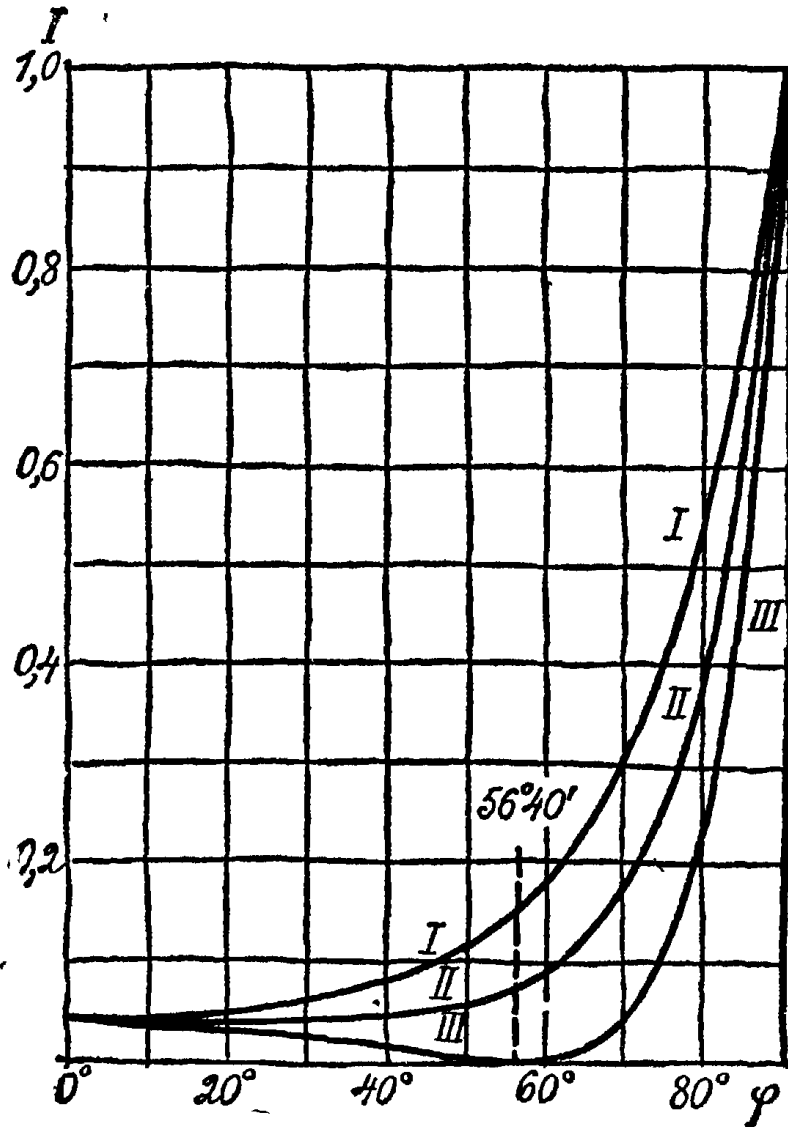
Поведение электромагнитной волны на границе двух сред



В первом случае коэффициент отражения меняется монотонно: при нормальном падении отражение мало — коэффициент порядка 5 %, при увеличении угла коэффициент отражения растет и при этом тем быстрее, чем ближе к положению скольжения.

Распространение электромагнитных волн

Поведение электромагнитной волны на границе двух сред



Иначе ведет себя луч, электрический вектор которого лежит в плоскости падения. Интенсивность его отражения падает и доходит до нуля при угле φ_B , удовлетворяющем равенству $n = \operatorname{tg} \varphi_B$. График построен для $n = 1,52$ (переход из воздуха в стекло), при этом угол, при котором коэффициент отражения обращается в нуль, равен $56^\circ 40'$.

Распространение электромагнитных волн

Поведение электромагнитной волны на границе двух сред

Далее коэффициент отражения возрастает к единице.

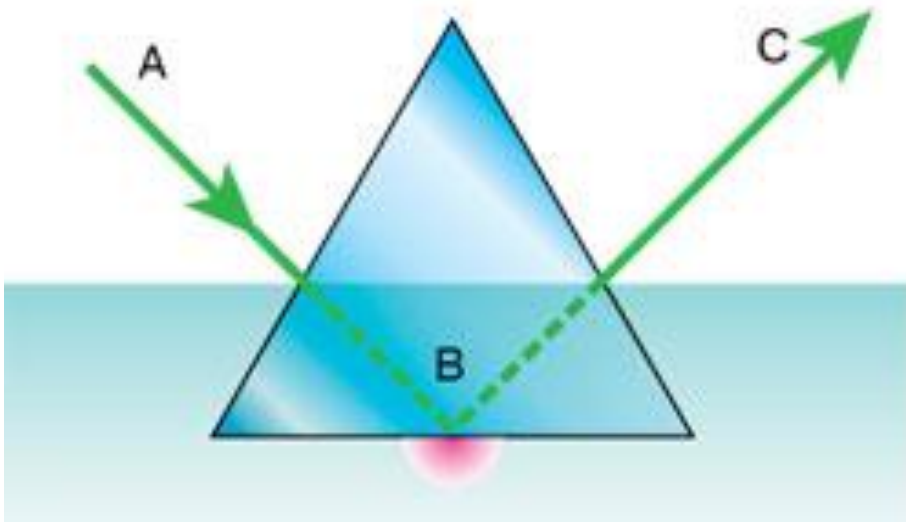
Чем же вызвано отсутствие отражения именно для этого случая, чем он специфичен? Очевидно, мы должны искать ответ в тех же пограничных условиях, из которых следует вся теория явления. Однако возникает вопрос. Если пограничные условия позволяют понять все явления на границе двух сред, то как быть с полным внутренним отражением, когда в одной среде поле имеется ($E_{1t} \neq 0$), в то время как в другой среде поля нет. Вопрос вполне законный, и теория дает на него ответ.

Распространение электромагнитных волн

Поведение электромагнитной волны на границе двух сред

Профессор Московского университета А. А. Эйхенвальд в 1908 г. теоретически показал, что световое поле при полном внутреннем отражении не обрывается на границе сред: проникая в отражающую среду, оно экспоненциально затухает. Равенство $E_{1t} = E_{2t}$ на границе сред не нарушается.

Амплитуды полей монотонно уменьшаются в несколько раз на расстоянии порядка длины падающей волны; это затухание никак не связано с поглощением волн.

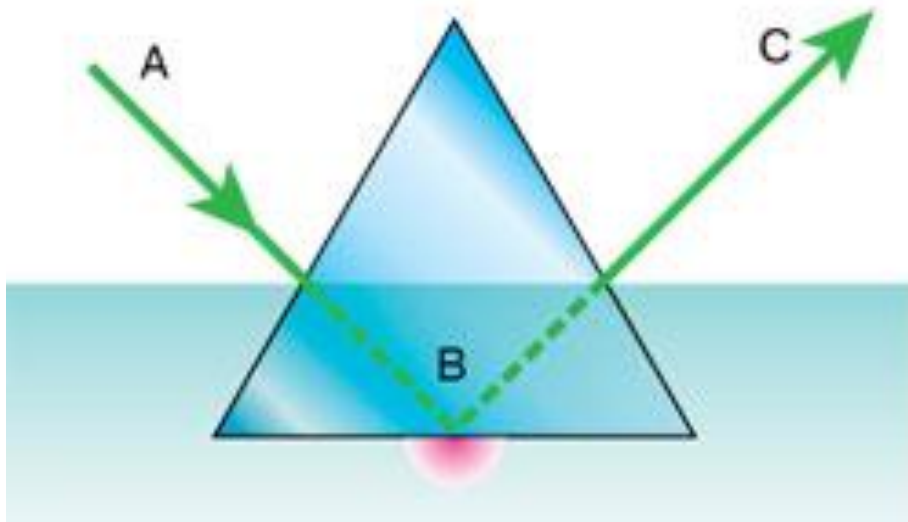


Распространение электромагнитных волн

Поведение электромагнитной волны на границе двух сред

Таким образом, эффект имеет волновую природу и не может быть описан языком геометрической оптики. Этот вывод получил вскоре наглядное подтверждение в опыте Л.И. Мандельштама и П. Селени.

Стеклянная призма погружена нижней гранью в жидкость, в которой растворено флуоресцентное вещество.

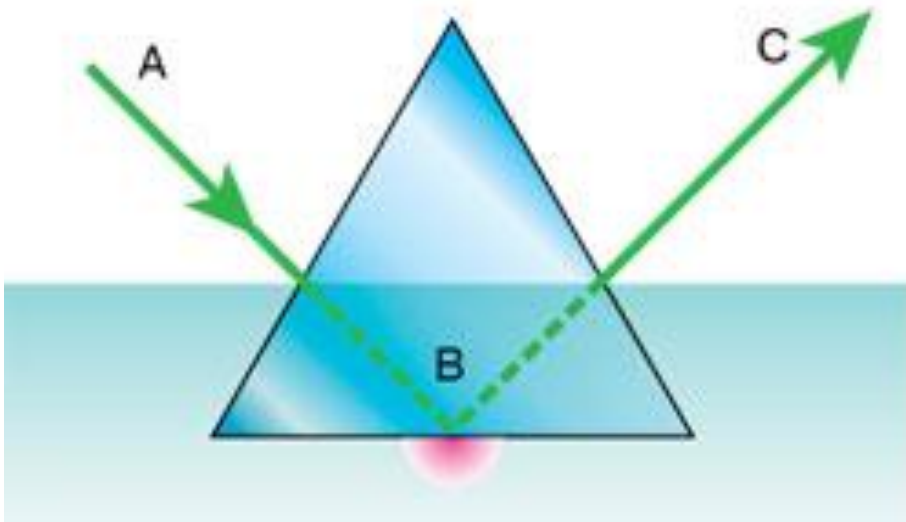


Распространение электромагнитных волн

Поведение электромагнитной волны на границе двух сред

Свет, падая через призму на границу жидкости под углом большим предельного, испытывает на границе эффект ПВО. Однако часть светового потока, проникая в тонкий слой приграничной жидкости, вызывает его флуоресцентное свечение. Цвет флуоресценции отличается от цвета

падающего излучения, а свечение приграничного слоя даёт возможность наблюдать эффект.



Распространение электромагнитных волн

Естественный и поляризованный свет.

Поляризация при отражении

Установим стеклянную пластинку под углом φ_B к световому лучу. Луч отразится. Начнем поворачивать луч около его оси, рассчитывая на то, что рано или поздно отраженный луч пропадет. Однако если мы воспользуемся для опыта лучом естественного света, то наши ожидания не оправдываются: отраженный луч одинаковой интенсивности будет возникать при любом азимутальном положении падающего луча.

Распространение электромагнитных волн

Естественный и поляризованный свет.

Поляризация при отражении

Было бы ошибочным делать из этого вывод об опровержении только что изложенной теории.

Этим опытом доказано лишь одно:

поляризационное состояние естественного луча более сложно, чем это дается схемой двух векторов E и H , имеющих фиксированное направление колебания.

Продолжая этот же опыт, заставим падать уже отраженный под углом φ_B луч на вторую такую же пластинку, установленную под тем же углом φ_B к лучу, отраженному от первой пластинки.

Распространение электромагнитных волн

Естественный и поляризованный свет.

Поляризация при отражении

Начнем теперь вращать луч около самого себя. Так как, разумеется, важно лишь относительное положение луча и зеркала, то проще вращать вторую стеклянную пластинку. Следя за двукратно отраженным лучом, мы обнаружим, что отражаться он будет по-разному, и без труда найдем такое положение, при котором отражение отсутствует. Очевидно, это такое взаимное положение луча и зеркала, при котором электрический вектор луча лег в плоскость падения.

Распространение электромагнитных волн

Естественный и поляризованный свет.

Поляризация при отражении

Отсюда можно сделать вывод: отражение от первого зеркала привело естественный луч в поляризованное состояние, при котором электрический вектор имеет одно-единственное выделенное направление колебания.

В отличие от естественных лучей лучи с определенным направлением колебания векторов носят название **поляризованных**. В естественной электромагнитной волне равномерно представлены все возможные направления колебания электрического вектора.

Распространение электромагнитных волн

Естественный и поляризованный свет.

Поляризация при отражении

Иначе говоря, естественная неполяризованная волна является, по сути дела, наложением бесчисленного количества линейно поляризованных волн с равномерно представленными направлениями колебания векторов. Все поперечные направления являются направлениями колебания электрических векторов естественного луча света.

Отражение от двух последовательных зеркал, установленных под углами φ_B , является одним из возможных способов поляризации световых лучей.

Распространение электромагнитных волн

Естественный и поляризованный свет.

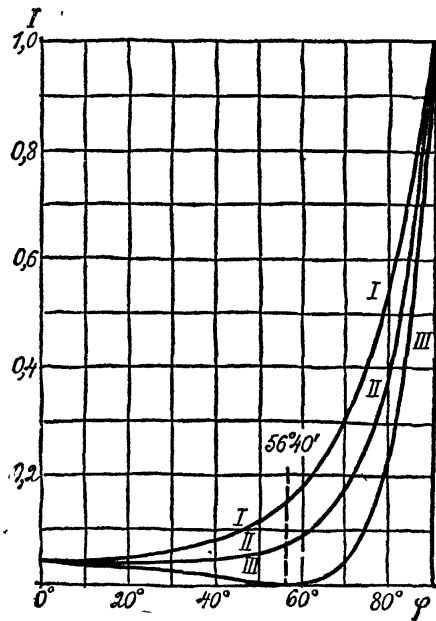
Поляризация при отражении

Электрические векторы естественного света можно всегда разложить по двум взаимно перпендикулярным направлениям. Если исследуется отражение, то удобнее всего разложить векторы на составляющую, лежащую вдоль плоскости падения, и другую, к ней перпендикулярную. Поведение естественного луча эквивалентно поведению двух таких волн, если считать, что разность фаз между ними меняется по закону случая.

Распространение электромагнитных волн

Естественный и поляризованный свет.

Поляризация при отражении



Поэтому, когда говорят о поляризации света, употребляют выражения: одна из составляющих не прошла, или прошла в такой-то доле. Если при отражении света или при преломлении одна из составляющих проходит в большей степени, чем

другая, а именно это и имеет место при отражении и преломлении, как показал рисунок кривых отражения, то происходит частичная поляризация света.

Распространение электромагнитных волн

Естественный и поляризованный свет.

Поляризация при отражении

Этим явлением можно воспользоваться для того, чтобы поляризовать какой-либо луч полностью. Пользоваться двумя зеркалами, расположенными под углами φ_B к лучам, неудобно. Гораздо удобнее пропустить луч света через стопу стеклянных пластинок. Каждое преломление будет на известный процент увеличивать долю одной из компонент в луче. Таким образом может быть осуществлена практически полная поляризация. Естественное состояние светового луча — неполяризованное.

Распространение электромагнитных волн

Естественный и поляризованный свет.

Поляризация при отражении

Отсюда однако не следует делать вывод, что любой луч, который не подвергался отражению или преломлению, является неполяризованным. Так, например, ультракороткие электромагнитные волны, на которых ведется передача телевизионного сигнала, сильно поляризованы, поэтому приемную антенну надо устанавливать так, чтобы максимум ее диаграммы направленности был ориентирован по направлению колебания электрического вектора сигнала.

Распространение электромагнитных волн

Распространение световых волн в среде с градиентом показателя преломления

Различие в плотностях влечет за собой, как правило, различие в показателях преломления. Возникает естественный вопрос о характере распространения волны в такой среде, где значения коэффициента преломления меняются от точки к точке (т.е. градиент показателя преломления отличен от нуля).

Различие в показателях преломления означает разницу в скоростях продвижения фронта волны.

Распространение электромагнитных волн

Распространение световых волн в среде с градиентом показателя преломления

Отсюда следует, что фронт волны по мере продвижения в такой среде будет непрерывно деформироваться. Если мы построим нормали к фронту волны, то получим кривую линию. Можно сказать, что свет распространяется в неоднородной среде не по прямым, а по кривым линиям.

Мы уже обсуждали в свое время аналогичную проблему для звуковых волн. Закономерности здесь те же самые и ход лучей управляется тем же принципом Ферма.

Распространение электромагнитных волн

Распространение световых волн в среде с градиентом показателя преломления

При распространении в неограниченной среде с градиентом показателя преломления луч света будет распространяться так, чтобы пройти расстояние между двумя точками за минимальное время. Поэтому луч света будет загибаться так, чтобы сократить свой путь в участках пространства, где показатель преломления велик, и, наоборот, будет «стараться» проделать как можно большую часть пути в областях пространства с малым показателем преломления.

Распространение электромагнитных волн

Распространение световых волн в среде с градиентом показателя преломления

Наиболее известным примером распространения света в среде с градиентом n является прохождение светового луча через земную атмосферу. Плотность и показатель преломления воздуха падают с высотой. Это приводит к явлению астрономической рефракции: луч, идущий от какой-либо звезды к Земле и входящий в атмосферу не по радиусу, а под углом, будет изгибаться и видимое положение звезды будет смещено по отношению к ее истинному положению.

Распространение электромагнитных волн

Распространение световых волн в среде с градиентом показателя преломления

Для звезд, расположенных у горизонта, угол смещения достигает огромной для астрономии величины в полградуса.

Наличие градиента показателя преломления у атмосферы приводит к возникновению миражей. Миражи наблюдаются в пустынях по той причине, что над раскаленным песком могут легко возникнуть тепловые потоки, приводящие к температурным перепадам, следовательно, к градиенту плотности, а значит, и показателя преломления.

Распространение электромагнитных волн

Распространение световых волн в среде с градиентом показателя преломления

В результате луч света идет по кривой линии и возникает картина пейзажа в том же месте, куда его мысленно помещает зритель, привыкший к прямолинейному распространению света.

Разумеется, нельзя говорить о сферической или плоской волнах, когда речь идет о распространении света в неоднородной среде. Следует напомнить, что переменная скорость распространения означает, что длина волны также меняется от точки к точке.

Распространение электромагнитных волн

Распространение световых волн в среде с градиентом показателя преломления

Какое же уравнение описывает движение волны в среде, где показатель преломления меняется от точки к точке? Имея в виду изменение параметров волны от точки к точке, мы должны поискать дифференциальное уравнение, описывающее это явление, поскольку лишь дифференциальное уравнение устанавливает закон, связывающий физические величины для данной точки пространства.

Распространение электромагнитных волн

Распространение световых волн в среде с градиентом показателя преломления

Это уравнение можно найти с помощью уравнений Максвелла. Вывод его сложен, и мы не сможем его провести. Результат вычислений таков: как для вектора $\mathbf{E}$ (или его проекции), так и для вектора $\mathbf{H}$ (или его проекции) справедлив следующий закон:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial s^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} .$$

Функцию Ψ называют *волновой функцией*. Она представляет вектор $\mathbf{E}$ или $\mathbf{H}$ или их составляющие, поскольку для них всех уравнения одинаковы, s — координата в направлении распространения волны, t — время, v — скорость распространения.

Распространение электромагнитных волн

Распространение световых волн в среде с градиентом показателя преломления

Это уравнение называется **волновым**, оно справедливо для точек пространства, лежащих вне источников поля (т.е. вне заряженных областей и вне областей, по которым текут электрические токи).

Покажем, прежде всего, что данному уравнению удовлетворяет простейший волновой процесс — плоская волна. Как известно, выражение для плоской волны с частотой ω , распространяющейся вдоль направления $\mathbf{s}$, имеет вид

$$\Psi = A \cos \omega \left(t - \frac{\mathbf{s}}{v} \right) .$$

Распространение электромагнитных волн

Распространение световых волн в среде с градиентом показателя преломления

Вычислим вторые производные волновой функции Ψ по времени и по координате. Получим

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -\omega^2 \Psi ; \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial s^2} = -\frac{\omega^2}{v^2} \Psi .$$

Таким образом, между вторыми производными имеется нужная связь:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial s^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} ,$$

значит предложенное дифференциальное уравнение содержит в себе уравнение плоской волны.

Распространение электромагнитных волн

Распространение световых волн в среде с градиентом показателя преломления

Однако написанное дифференциальное уравнение много шире. Его решением является любая функция аргумента $\left(t - \frac{s}{v}\right)$, так как для любой функции $\Psi\left(t - \frac{s}{v}\right)$ выражения производных через Ψ будут те же самые.

Зависимость функции от аргумента $\left(t - \frac{s}{v}\right)$ рассматривается как единственный признак волнового процесса.

Распространение электромагнитных волн

Распространение световых волн в среде с градиентом показателя преломления

Смысл этого аргумента заключается в следующем: если состояние в точке $s=0$ характеризуется в момент времени $t=0$ некоторым значением волновой функции, то такое же состояние имеет место в точке s_1 через момент времени $t_1 = \frac{s_1}{v}$, в точке s_2 — через момент времени $t_2 = \frac{s_2}{v}$, и т.д.

При этом s есть координата, отсчитываемая вдоль любого прямого или криволинейного пути.

Распространение электромагнитных волн

Распространение световых волн в среде с градиентом показателя преломления

Дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial s^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$$

является общим уравнением волнового процесса, справедливым для любой среды, в том числе и неоднородной, в которой v меняется от точки к точке.

Распространение электромагнитных волн

Распространение световых волн в среде с градиентом показателя преломления

Если волновая функция должна быть выражена через три координаты пространства x, y, z , то обобщением волнового уравнения является следующая формула:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$$

Для суммы вторых частных производных какой-либо функции существует краткое обозначение: $\Delta \Psi$ (читается: лапласиан Ψ). Тогда

$$\Delta \Psi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$$

Распространение электромагнитных волн

Распространение световых волн в среде с градиентом показателя преломления

Дифференциальное уравнение волны справедливо для произвольного процесса, в котором значения длины волны и амплитуды волны меняются от точки к точке.

Обозначим через ψ амплитуду волновой функции Ψ . Именно ψ представляет интерес для большинства задач. Если в пространстве существует колебательный процесс с частотой ω , то

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -\omega^2 \Psi$$

в самом произвольном случае.

Распространение электромагнитных волн

Распространение световых волн в среде с градиентом показателя преломления

Следовательно, волновая функция будет всегда удовлетворять уравнению

$$\Delta\Psi = -\frac{\omega^2}{v^2}\Psi.$$

Часть выражения для Ψ , зависящая от времени, всегда сократится в подобном равенстве, поэтому последнее уравнение есть уравнение для *амплитуды* волны ψ .

Распространение электромагнитных волн

Распространение световых волн в среде с градиентом показателя преломления

При помощи соотношения $\lambda = v \frac{2\pi}{\omega}$ его можно также записать в виде

$$\Delta\psi + \frac{4\pi^2}{\lambda^2} = 0$$

Иногда и это уравнение называют волновым.