

Метод наименьших квадратов

Надежным и научно обоснованным способом определения коэффициентов экспериментальных зависимостей является метод наименьших квадратов. Суть его заключается в подборе таких значений коэффициентов, при которых сумма квадратов отклонений измеренных в эксперименте значений y_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) от искомой кривой $y = ax + b$ была бы минимальна.

Найдем сумму квадратов отклонений

$$S = \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)]^2. \quad (6.1)$$

Под знаком суммирования раскроем квадрат. В результате получим

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i^2 - 2ax_iy_i - 2by_i + a^2x_i^2 + 2abx_i + b^2) \quad (6.2)$$

Метод наименьших квадратов

Или

$$S = S_{yy} - 2aS_{xy} - 2bS_y + a^2S_{xx} + 2abS_x + nb^2, \quad (6.3)$$

где

$$S_{yy} = \sum_{i=1}^n y_i^2; \quad S_{xy} = \sum_{i=1}^n x_i y_i; \quad S_y = \sum_{i=1}^n y_i; \quad S_{xx} = \sum_{i=1}^n x_i^2; \quad S_x = \sum_{i=1}^n x_i.$$

Значения $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ и $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ – фиксированные экспериментальные данные. Поэтому сумма квадратов отклонений S зависит только от значений коэффициентов a и b . Таким образом, сумма квадратов отклонений является функцией двух независимых переменных a и b . Для нахождения минимума функции $S(a, b)$ необходимо приравнять к нулю ее частные производные по a и по b :

Метод наименьших квадратов

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial a} &= -2S_{xy} + 2aS_{xx} + 2bS_x = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial b} &= -2S_y + 2aS_x + 2nb = 0.\end{aligned}\quad (6.4)$$

Полученные выражения позволяют записать систему уравнений для отыскания «наилучших» значений коэффициентов a и b в виде:

$$\begin{aligned}S_{xx}a + S_x b &= S_{xy} \\ S_x a + nb &= S_y.\end{aligned}\quad (6.5)$$

Решая эту систему, получим:

$$\begin{aligned}a &= \frac{1}{D} (nS_{xy} - S_x S_y), \\ b &= \frac{1}{D} (S_{xy} S_y - S_x S_y), \text{ где } D = nS_{xx} - S_x^2.\end{aligned}\quad (6.6)$$

Метод наименьших квадратов

Как видно, метод наименьших квадратов достаточно громоздок. Поэтому его применение становится наиболее эффективным при использовании вычислительной техники.

Метод наименьших квадратов также применяется и при анализе нелинейных зависимостей. Например, при получении коэффициентов квадратичной зависимости вида $y = ax^2 + bx + c$ необходимо найти минимальное значение суммы квадратов S вида:

$$S = \sum_{i=1}^n (\Delta y)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i^2 - bx_i - c)^2. \quad (6.7)$$

Метод наименьших квадратов

В результате для нахождения коэффициентов a , b , c необходимо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i + nc - \sum_{i=1}^n y_i = 0 \\ a \sum_{i=1}^n x_i^3 + b \sum_{i=1}^n x_i^2 + c \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n x_i y_i = 0 \\ a \sum_{i=1}^n x_i^4 + b \sum_{i=1}^n x_i^3 + c \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i = 0 \end{cases} \quad (6.8)$$

Метод наименьших квадратов

2.3.2.

Метод наименьших квадратов

Об ограничениях МНК

Метод наименьших квадратов имеет два существенных ограничения: во-первых, погрешность отдельного измерения никак не учитывается в МНК, во-вторых, он не способен учитывать возможную систематическую ошибку, а в-третьих, применение его обосновано лишь при достаточно большом количестве точек. Поэтому при его применении следует быть осторожным: он не применим в случае, когда количество точек мало, а погрешность измерения каждой точки велика или имеет преимущественно систематический характер. В этом случае необходимо при оценке погрешности пользоваться графическим методом.

Метод наименьших квадратов

Экстраполяция и интерполяция

Бывают случаи, когда по экспериментальным точкам не надо находить описывающую их зависимость, а требуется определить лишь численное значение функции для переменной, лежащей где-то между экспериментальными точками. В таких случаях используются *интерполяционные* методы. В простейшем случае предполагается линейная зависимость между соседними точками и используются значения в этих точках. Для интерполяции по параболе (метод Симпсона) требуются значения в трёх точках. Иногда возникает необходимость продолжить экспериментальный график за пределы измеренных значений. Такая операция называется *экстраполяцией*.

Метод наименьших квадратов

Экстраполяция и интерполяция

Не существует каких-либо общих методов её проведения – экстраполяция должна выполняться исходя из конкретных теоретических предположений о возможном ходе функциональной зависимости. Чем дальше от экспериментальных данных проводится экстраполяция, тем, очевидно, меньше степень её достоверности.

В заключение ещё раз подчеркнём, что графики необходимы для наглядного представления результатов измерений. Они очень удобны для сравнения результатов экспериментов и теорий, выяснения качественных особенностей зависимостей, быстрых оценок характера изменения величин на отдельных участках.

Однако *документом эксперимента является таблица с экспериментальными данными.*

Рекомендации по выполнению лабораторных работ

Результатом выполненной работы является отчёт, который должен содержать:

- 1) описание теоретических предпосылок выполняемого эксперимента с краткой сводкой необходимых формул и соотношений;
- 2) схему экспериментальной установки;
- 3) словесное описание хода эксперимента и таблицы для записи экспериментальных данных;
- 4) обработку результатов: вычисление расчётных величин и заполнение таблиц, построение графиков, вычисление результата эксперимента;
- 5) сравнение полученных результатов с известными (в литературе и справочниках), обсуждение возможных ошибок, предложения по улучшению эксперимента.

Рекомендации по выполнению лабораторных работ

Подготовка к работе

Вначале нужно внимательно прочитать описание работы и теоретическое введение по её тематике. Это необходимо, чтобы получить представление о явлениях, закономерностях и порядках измеряемых величин, с которыми придётся иметь дело при выполнении работы, а также о методе измерения и используемых приборах, последовательности действий при проведении измерений.

Для записей результатов работы надо подготовить рабочую тетрадь, лучше большого формата, чтобы её можно было использовать в течение, по крайней мере, одного семестра.

Оформление каждой работы нужно начинать с номера и названия. Далее должны быть представлены краткое изложение теории, схема установки и описание хода эксперимента.

Рекомендации по выполнению лабораторных работ

Подготовка к работе

Прежде чем приступить к выполнению работы, следует продумать предложенный в описании план действий, определить необходимое количество измерений. В соответствии с этим предварительно подготовить таблицы, в которые будут заноситься результаты. Желательно заранее представлять диапазон изменения измеряемых величин и выбрать для них соответствующие единицы. В крайнем случае, это нужно сделать на начальном этапе работы. Необходимо подумать о точности измерений. Например, при косвенных измерениях величин, имеющих степенную зависимость от непосредственно измеряемых, относительная погрешность величин, входящих с бóльшими показателями степени, должна быть меньше, то есть их следует измерять точнее. По возможности следует избегать методов, при которых приходится вычислять разность двух близких по значениям величин.

Рекомендации по выполнению лабораторных работ

Начало работы

В начале работы необходимо тщательно ознакомиться с экспериментальной установкой, проверить работоспособность приборов. Нужно хорошо разобраться, как они регулируются, включаются и выключаются.

Всегда очень важно аккуратное и бережное обращение с приборами.

Не следует вскрывать чувствительные приборы и менять настройку.

Все сведения о приборах (в первую очередь класс точности, максимальное значение на шкале, по которой производятся измерения, и цену деления) и условиях эксперимента необходимо записать в рабочей тетради, так как они потребуются при получении окончательных результатов.

Рекомендации по выполнению лабораторных работ

Начало работы

При составлении (собираении) электрических схем источники питания подключаются к схеме в последнюю очередь.

Прежде чем приступить к основным измерениям, необходимо проверить работу установки. Первые измерения должны быть контрольными, чтобы убедиться, что все работает нормально, диапазон и точность измерений выбраны правильно. Если разброс повторных измерений не превышает инструментальную погрешность, то многократных измерений не требуется.

Рекомендации по выполнению лабораторных работ

Проведение измерений

Все записи результатов измерений должны быть сделаны чётко и подробно, с нужными пояснениями.

Полезно строить предварительные графики зависимостей измеряемых величин между собой или от изменения параметров по мере получения результатов. При этом сразу выделяются области резких изменений, в которых измерения должны проводиться подробнее (больше точек), чем на участках плавного изменения. Если изучаемая закономерность, например линейность, выполняется только на некотором участке, то область измерений должна быть выбрана шире этого участка, чтобы можно было установить границы выполнения закономерности.

Рекомендации по выполнению лабораторных работ

Проведение измерений

Если в начале работы выясняется, что разброс результатов измерений очень большой, то иногда лучше поискать и устранить причину этого, чем выполнять большое количество измерений для получения необходимой точности результата. При изучении зависимости измеряемой величины от параметра или другой измеряемой величины надо убедиться, что за время измерений в процессе работы не произошло никаких сбоев или существенных изменений внешних условий, влияющих на результаты, для чего в конце работы необходимо повторить начальные измерения либо проделать все измерения в обратном порядке.

Перед каждой таблицей должны быть указаны значения цены деления и класс точности каждого прибора, которым производятся измерения.

Рекомендации по выполнению лабораторных работ

Проведение измерений

В таблицу необходимо заносить число делений, а не саму величину, например, тока или напряжения. Это убережёт вас от ошибки при записи экспериментальных данных. В конечном счёте это главное, так как обработка данных может быть проведена разными способами и в любое время, а измерения воспроизвести бывает трудно, а иногда и невозможно.

Единицы измерения надо выбирать так, чтобы результаты измерения представлялись числами в диапазоне примерно от 0,1 до 1000. При этом таблицы не будут громоздкими, а графики будут удобными для использования. Например, для модуля Юнга металлов численные значения которых в системе СИ очень велики, в качестве единицы измерения берут 10^{10} Н/м². Тогда наименование графы таблицы или оси графика будет выглядеть следующим образом: $E, 10^{10}$ Н · м⁻².

Рекомендации по выполнению лабораторных работ

Проведение измерений

Запятая здесь играет важную роль – она отделяет обозначение величины, приводимой в таблице или откладываемой по оси координат, от единицы измерения. В графе таблицы для алюминия, например, будет стоять 7,05, а на шкалах графиков – небольшие целые числа. Вместо множителя перед единицами измерения могут быть использованы также слова или их сокращения.

Иногда используется другой способ наименования. В таблицах или на осях графиков представляют не саму величину, а произведение её на некоторый коэффициент, которое измеряют в обычных единицах. Для модуля Юнга при этом получаем: $E \cdot 10^{-10}$, $N \cdot m^{-2}$. Этот способ меньше используется из-за возможных ошибок при переходе к истинному значению так как множитель по ошибке может быть отнесён к единицам измерения.

Рекомендации по выполнению лабораторных работ

Расчёты, анализ и представление результатов

Полученные первичные результаты в виде таблиц и графиков используются для расчёта конечных значений величин и их погрешностей либо для нахождения зависимости измеряемых величин между собой.

Все расчёты удобно проводить в той же рабочей тетради, где записаны первичные результаты измерений, и заносить в соответствующие свободные колонки таблиц с экспериментальными данными. Это поможет проводить проверку, анализ и сопоставление получаемого результата с исходными данными.

Для измеряемых величин окончательные результаты должны быть представлены в виде среднего значения, погрешности и количества проведённых измерений.

Рекомендации по выполнению лабораторных работ

Расчёты, анализ и представление результатов

В случае косвенных измерений для получения окончательного результата используются их зависимости от измеряемых величин, по которым вычисляют и средние значения и погрешности.