Измерения и обработка результатов измерений

Инструментальные погрешности

Погрешности измерительных приборов могут иметь как систематическую, так и случайную составляющую. Можно говорить о некоторой единой оценке погрешности прибора $\sigma_{\text{инстр}}$, которая учитывает обе составляющие.

Рассмотрим в качестве простейшего примера измерение длины линейкой. Один из источников погрешности – это необходимость выбора некоторого значения (интерполяции) между метками шкалы, и эта погрешность, называемая погрешностью отсчёта по шкале, очевидно, случайна (мы можем с равной вероятностью как переоценить, так и недооценить результат). С другой стороны, имеется вероятность того, что линейка дефектна (растянута или сжата, неточно нанесены штрихи), что, возможно, будет приводить к систематической погрешности.

Измерения и обработка результатов измерений

Инструментальные погрешности

В качестве другого типичного примера рассмотрим измерение напряжения вольтметром. Во-первых, погрешность $\sigma_{приб}$ прибора определяется производителем и указывается в паспорте или при маркировке (см. ниже), она представляет из себя оценку максимальной систематической ошибки при измерениях. Во-вторых, неизбежно существует погрешность отсчёта $\sigma_{отсч}$, которая для стрелочных приборов может быть оценена как половина цены деления, а для цифровых – как величина, соответствующая последнему разряду на циферблате. Обычно, хотя и не всегда, производитель старается согласовывать погрешность отсчёта по шкале и погрешность прибора. И, наконец, при снятии показаний стрелка прибора или цифры на циферблате могут колебаться относительно некоторого значения.

Измерения и обработка результатов измерений

Инструментальные погрешности

Это может быть связано, как уже говорилось, и с разного рода шумами внутри прибора, и с колебаниями измеряемой величины.

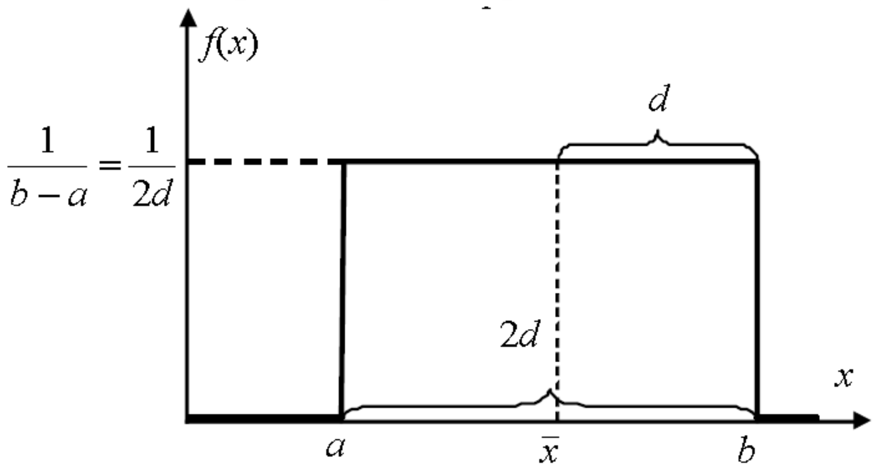
Вероятность получить неточный результат при единичных (однократных) измерениях одинакова для всех измеряемых данным прибором физических величин. Следовательно, при однократных измерениях случайная величина подчиняется равномерному распределению.

.

Измерения и обработка результатов измерений

Инструментальные погрешности

Равномерное распределение случайных величин.



При равномерном распределении различные значения случайной величины появляются с одинаковой вероятностью.

Плотность вероятности $f(x)$ случайной величины x имеет постоянное значение в некотором интервале (a, b) и равна нулю вне этого интервала.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < a \\ \dfrac{1}{b-a}, & \text{при } a < x < b \\ 0, & \text{при } x > b \end{cases} \qquad (3.1)$$

Измерения и обработка результатов измерений

Инструментальные погрешности

Равномерное распределение случайных величин.

Математическое ожидание $\bar{x}$ для этого закона распределения равно

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} xdx = \frac{a+b}{2}. \qquad (3.2)$$

А условие нормировки записывается в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} dx = 1. \qquad (3.3)$$

.

Измерения и обработка результатов измерений

Инструментальные погрешности

Равномерное распределение случайных величин.

Обозначим длину интервала (a, b) через $2d$: $b - a = 2d$. Назовем d *параметром равномерного распределения*. Границы интервала, где плотность вероятности $f(x)$ отлична от нуля, и саму плотность вероятности теперь можно выразить через параметр распределения: $a = x - d$, $b = x + d$, $f(x) = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{2d}$.

Дисперсия для равномерного распределения равна

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (\overline{x} - x)^2 dx = \frac{1}{2d} \int_{\overline{x}-d}^{\overline{x}+d} (\overline{x} - x)^2 dx = \frac{d^2}{3}. \qquad (3.4)$$

Среднее квадратичное отклонение

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \frac{d}{\sqrt{3}} = 0{,}577d. \qquad (3.5)$$

Измерения и обработка результатов измерений

Инструментальные погрешности

Равномерное распределение случайных величин.

Оценим вероятность α того, что измеряемая величина x лежит в интервале $(x - \sigma, x + \sigma)$:

$$\alpha = \int_{\bar{x}-\sigma}^{\bar{x}+\sigma} f(x)dx = \frac{1}{2d}\int_{\bar{x}-\sigma}^{\bar{x}+\sigma} dx = \frac{\sigma}{d} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}577. \qquad (3.6)$$

Следовательно, для интервала длиной $\pm\sigma = \pm 0{,}577d$ получили вероятность $\alpha = 57{,}7\%$.

Обратим внимание, что в случае нормального распределения вероятность того, что истинная величина лежит в интервале $(x - \sigma, x + \sigma)$ равна 68,3%, а для равномерного распределения 57,7%.

.

Измерения и обработка результатов измерений

Инструментальные погрешности

Равномерное распределение случайных величин.

Оценим вероятность α того, что измеряемая величина *x* лежит в интервале (*x* − σ, *x* + σ):

$$\alpha = \int_{\bar{x}-\sigma}^{\bar{x}+\sigma} f(x)dx = \frac{1}{2d}\int_{\bar{x}-\sigma}^{\bar{x}+\sigma} dx = \frac{\sigma}{d} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}577. \qquad (3.6)$$

Обратим внимание, что в случае нормального распределения вероятность того, что истинная величина лежит в интервале (*x* − σ, *x* + σ) равна 68,3%, а для равномерного распределения 57,7%.

.

Измерения и обработка результатов измерений

Инструментальные погрешности

Равномерное распределение случайных величин.

Найдем доверительный интервал Δx, в котором с вероятностью 95% будет находиться значение измеряемой величины. Нетрудно определить, что это интервал $(x - 0{,}95d, x + 0{,}95d)$.

Следовательно, чтобы найти доверительный интервал для равномерно распределенной случайной величины, достаточно умножить величину доверительной вероятности α на параметр равномерного распределения d. Доверительный интервал такой величины обозначают $\Delta\tilde{x}_{\text{ои}}$ и называют ***погрешностью однократных измерений***. Итак, для доверительной вероятности α $\Delta\tilde{x}_{\text{ои}} = \alpha d$, где d – параметр равномерного распределения.

Погрешность однократных измерений связана с точностью используемых измерительных приборов. Поэтому параметр равномерного распределения также называют ***приборной ошибкой***.

Измерения и обработка результатов измерений

Инструментальные погрешности

Способы определения приборных ошибок

Погрешность однократных измерений определяется характеристиками используемых в эксперименте приборов. Основными характеристиками измерительных приборов, влияющими на погрешность выполняемых с их помощью измерений, являются предел измерения и цена деления. Для электроизмерительных приборов важной величиной также является класс точности прибора.

Предел измерения (П) – это максимальное значение величины, которое может быть измерено с помощью данной шкалы прибора. Если предел измерения не указан отдельно, то его определяют по оцифровке прибора. Так, если на рис. 11 изображена шкала миллиамперметра, то

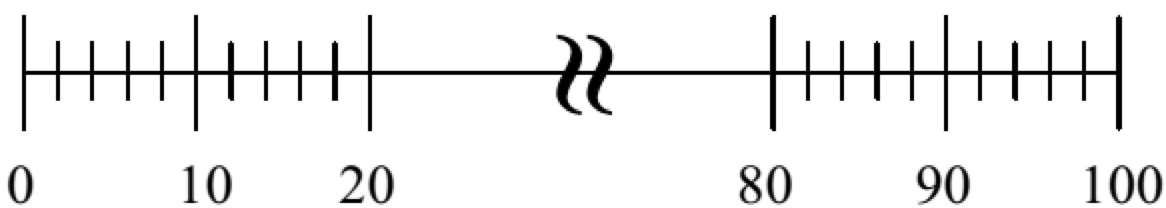
.

Измерения и обработка результатов измерений

Инструментальные погрешности

Способы определения приборных ошибок

Так, если на рисунке изображена шкала миллиамперметра, то предел измерения равен 100 мА.



Цена деления (Ц) – значение измеряемой величины, соответствующее самому малому делению шкалы. Если шкала начинается с нуля, то $Ц = \frac{П}{N}$, где N – общее количество делений шкалы. Например, если шкала имеет $N = 50$ делений и принадлежит амперметру с пределом измерений 5 А, то цена деления равна 5/50 = 0,1(А).

Измерения и обработка результатов измерений

Инструментальные погрешности

Способы определения приборных ошибок

Многие электроизмерительные приборы имеют несколько пределов измерения. При переключении с одного предела на другой изменяется и цена деления прибора.

Класс точности прибора (К) представляет собой отношение абсолютной приборной погрешности δx к пределу измерения шкалы Π, выраженное в процентах:

$$K = \frac{\delta x}{\Pi} \cdot 100\%. \qquad (3.7)$$

Класс точности (без символа %) указывается, как правило, на электроизмерительных приборах. Его значение может составлять 0,05; 0,1; 0,2; 0,5; 1,0; 1,5; 2,0; 2,5; 4,0. Более грубые приборы обозначения класса точности не имеют.

Измерения и обработка результатов измерений

Инструментальные погрешности

Способы определения приборных ошибок

Как указывалось ранее, погрешность однократных измерений подчиняется равномерному закону распределения случайных величин и определяется параметром равномерного распределения d. В зависимости от вида измерительного прибора ***параметр равномерного распределения d*** определяется одним из ниже перечисленных способов.

1. Точность измерения (цена деления) указана непосредственно на приборе. Параметр равномерного распределения равен точности прибора $d = Ц$. Например, приборы, имеющие нониус: цена деления гониометра 0,1°, точность нониуса штангенциркуля 0,05 мм. Тогда параметр равномерного распределения равен для гониометра $d = Ц = 0{,}1°$, для штангенциркуля $d = Ц = 0{,}05$ мм.

Измерения и обработка результатов измерений

Инструментальные погрешности

Способы определения приборных ошибок

2. На приборе указан класс точности прибора. Из определения класса точности имеем приборную погрешность:

$$\delta x = \frac{K \cdot \Pi}{100}. \qquad (3.8)$$

Параметр равномерного распределения равен погрешности прибора $d = \delta x$. Например: для вольтметра с классом точности 2,5 и пределом измерений 600 В параметр равномерного распределения равен

$$d = \delta x = \frac{2{,}5 \cdot 600}{100} = 15\ (\text{В}). \qquad (3.9)$$

.

Измерения и обработка результатов измерений

Инструментальные погрешности

Способы определения приборных ошибок

3. Если на приборе не указаны ни точность измерения, ни класс точности, то в зависимости от характера работы прибора возможны два способа определения параметра равномерного распределения:

а. Указатель значения измеряемой величины может занимать определенные (дискретные) положения, соответствующие делениям шкалы (например, электронные часы, секундомеры, цифровые измерители напряжений, счетчики импульсов и т.п.). Такие приборы являются приборами дискретного действия, и их абсолютная погрешность равна цене деления прибора. Следовательно, параметр равномерного распределения для величины, измеренной этим прибором равен цене деления прибора $d = Ц$.

Измерения и обработка результатов измерений

Инструментальные погрешности

Способы определения приборных ошибок

Например, электронный секундомер показывает значение: 00:00:03.23. Цена деления такого прибора равна 0,01 с, а следовательно, и параметр равномерного распределения также $d = Ц = 0{,}01$ с.

b. Указатель значения измеряемой величины может занимать любое положение на шкале прибора (линейки, рулетки, микрометра, стрелочных весов, термометра и т.п.). В этом случае абсолютная приборная ошибка равна половине цены деления шкалы. Следовательно, параметр равномерного распределения для измеряемой величины равен половине цены деления прибора $d = \frac{Ц}{2}$. Например: точность барабана микрометра равна 0,01 мм, цена деления линейки – 1 мм.

Измерения и обработка результатов измерений

Инструментальные погрешности

Способы определения приборных ошибок

Тогда параметр равномерного распределения для микрометра $d = 0{,}5 \cdot Ц = 0{,}005$ мм, для линейки $d = 0{,}5 \cdot Ц = 0{,}5$ мм.

4. Если какая-либо величина не измеряется в данном опыте, а известно лишь ее значение, то она является заданным параметром. Погрешность заданного параметра принимается равной половине единицы последнего разряда числа, которым задано значение этого параметра.

Например: радиус проволоки задан с точностью до сотых долей миллиметра, тогда параметр равномерного распределения для этой величины $d = 0{,}005$ мм.

.

Измерения и обработка результатов измерений

Инструментальные погрешности

Способы определения приборных ошибок

5. В некоторых экспериментах параметр равномерного распределения необходимо определять опытным путем. Тогда его величина может быть в несколько раз больше цены деления используемого прибора.

Например, при измерении больших расстояний малой мерой (линейкой) для получения одного значения прибор прикладывается несколько раз.

При каждом применении прибора присутствует погрешность равная цене деления прибора. Тогда параметр равномерного распределения d при таких измерениях во столько раз больше цены деления прибора $Ц$, сколько раз k его приходилось прикладывать, чтобы измерить одно расстояние: $d = kЦ$.

Измерения и обработка результатов измерений

Инструментальные погрешности

В последнее время широко используются цифровые универсальные приборы, в том числе и электроизмерительные, отличающиеся высокой точностью и многоцелевым назначением. В отличие от стрелочных приборов систематические погрешности цифровых электроизмерительных приборов оцениваются по формулам, приводимым в инструкциях по эксплуатации. Так, например, значение относительной погрешности в процентах универсального цифрового вольтметра В7-34, работающего на включённом пределе 1 В, оценивается по формуле

$$\varepsilon_x = \left[0{,}015 + 0{,}002\left(\frac{U_{kx}}{U_x} - 1\right)\right] \cdot (1 + 0{,}1 \cdot |t - 20|), \qquad (3.10)$$

где U_{kx} [В] – значение предела измерения, U_x [В] – значение измеряемой величины, t [°C] – температура.

Измерения и обработка результатов измерений

Инструментальные погрешности

Несколько слов о точности линеек.

Металлические линейки относительно точны: миллиметровые деления наносятся с погрешностью не более ±0,05 мм, а сантиметровые не более чем с точностью 0,1 мм, так что считывание результата измерения можно проводить с помощью лупы, снабжённой дополнительной шкалой. Деревянными

или пластмассовыми линейками лучше не пользоваться: их погрешности неизвестны и могут оказаться неожиданно большими. Исправный микрометр обеспечивает точность 0,01 мм, а погрешность измерения штангенциркулем определяется точностью, с которой может быть сделан отсчёт, т. е. точностью нониуса. У штангенциркулей цена делений нониуса составляет обычно 0,1 или 0,05 мм.

Измерения и обработка результатов измерений

Инструментальные погрешности

Сложение инструментальной и случайной погрешностей

Погрешность приборов зачастую имеет в своей основе систематическую составляющую. Однако мы обычно имеем дело только с оценкой погрешности и не знаем ни её знак, ни её величину. Можно говорить о вероятности нахождения измеренной величины в некотором интервале $x \pm \sigma_{\text{инстр}}$. Поэтому при сложении с другими погрешностями опыта инструментальная погрешность учитывается наравне со случайной:

$$\sigma^2_{\text{полн}} = \sigma^2_{\text{инстр}} + \sigma^2_{\text{случ}}. \qquad (3.12)$$

Обратим внимание на важную особенность формулы (3.12). Пусть одна из ошибок, например, $\sigma_{\text{случ}}$ в 2 раза меньше другой – в нашем случае $\sigma_{\text{инстр}}$.

.

Измерения и обработка результатов измерений

Инструментальные погрешности

Сложение инструментальной и случайной погрешностей

Тогда

$$\sigma_{\text{полн}} = \sqrt{\sigma^2_{\text{инстр}} + \sigma^2_{\text{случ}}} = \sqrt{\frac{5}{4}}\,\sigma_{\text{инстр}} \approx 1{,}12\,\sigma_{\text{инстр}}.$$

В нашем примере $\sigma_{\text{полн}} \approx \sigma_{\text{инстр}}$ с точностью 12 %. Таким образом, меньшая погрешность почти ничего не добавляет к большей, даже если она составляет половину от неё. Следовательно, в том случае, когда случайная ошибка опытов хотя бы вдвое меньше инструментальной (систематической), нет смысла производить многократные измерения, так как полная погрешность опыта при этом практически не уменьшается. Измерения достаточно произвести 2÷3 раз а, чтобы убедиться, что случайная ошибка действительно мала.

Измерения и обработка результатов измерений

Инструментальные погрешности

Сложение инструментальной и случайной погрешностей

То же самое относится и к любым двум погрешностям, складываемым среднеквадратично если одна из ошибок в два или более раза меньше другой, то меньшую ошибку можно считать пренебрежимо малой и отбросить её.

.