Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

ЛЕКЦИЯ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ТЕМА 6: ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ. ФОРМУЛА БАЙЕСА

Лектор: Подберезина Е.И.
2010 год

ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ

Формула полной вероятности является следствием обеих основных теорем теории вероятностей. Пусть требуется найти вероятность некоторого события A, которое может произойти вместе с одним из событий H_1, H_2, …, H_n, образующих полную группу несовместных событий. События H_1, H_2, …, H_n называются ***гипотезами***.

ТЕОРЕМА. Вероятность события A равна сумме произведений вероятности каждой гипотезы на условную вероятность события A при этой гипотезе:

$$P(A) = P(H_1)\cdot P(A|H_1) + P(H_2)\cdot P(A|H_2) + \ldots + P(H_n)\cdot P(A|H_n) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P(A|H_i).$$

Последняя формула называется ***формулой полной вероятности***.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как гипотезы H_1, H_2, …, H_n образуют полную группу событий, то событие A может произойти только одновременно с одной из этих гипотез:

$$A = H_1\cdot A + H_2\cdot A + \ldots + H_n\cdot A.$$

Так как гипотезы H_1, H_2, …, H_n несовместны, то и события $H_1\cdot A$, $H_2\cdot A$, … , $H_n\cdot A$ несовместны. Применяя к последнему равенству теорему сложения, получаем:

$$P(A) = P(H_1\cdot A) + P(H_2\cdot A) + \ldots + P(H_n\cdot A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i\cdot A).$$

Применяя к событию $H_i\cdot A$ теорему умножения, получим:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P(A|H_i).$$

Теорема доказана.

ПРИМЕР. Имеются три одинаковые на вид урны. В первой урне 2 белых и один черный шар, во второй урне 3 белых и один черный шар, в третьей урне 2 белых и 2 черных шара. Некто выбирает наугад урну и вынимает из нее шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

Рассмотрим гипотезы:

H_1 = < выбор первой урны >;

H_2 = < выбор второй урны >;

H_3 = < выбор третьей урны >

и событие A = < появление белого шара >.

По условию задачи гипотезы равновозможны, поэтому:

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}.$$

Условные вероятности события A при этих гипотезах равны соответственно:

$$P(A|H_1) = \frac{2}{3}; \quad P(A|H_2) = \frac{3}{4}; \quad P(A|H_3) = \frac{1}{2}.$$

По формуле полной вероятности

$$P(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{23}{36}.$$

ТЕОРЕМА ГИПОТЕЗ ИЛИ ФОРМУЛА БАЙЕСА

Теорема гипотез или формула Байеса является следствием теоремы умножения и формулы полной вероятности.

Пусть имеется полная группы несовместных гипотез H_1, H_2, …, H_n. Вероятности этих гипотез до опыта известны и раны соответственно $P(H_1)$, $P(H_2)$, …, $P(H_n)$. Произведен опыт, в результате которого произошло событие A. Как изменятся вероятности гипотез с появлением события A?

Речь идет о том, чтобы найти условную вероятность $P(H_i | A)$ для каждой гипотезы. По теореме умножения имеем:

$$P(A \cdot H_i) = P(A) \cdot P(H_i | A) = P(H_i) \cdot P(A|H_i), \; i = 1, 2, \ldots, n,$$

или

$$P(A) \cdot P(H_i | A) = P(H_i) \cdot P(A|H_i), \; i = 1, 2, \ldots, n,$$

откуда

$$P(H_i | A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A| H_i)}{P(A)}, \; i = 1, 2, \ldots, n.$$

Последняя формула называется ***формулой Байеса*** или ***теоремой гипотез***. Вероятность $P(A)$ в ней вычисляется по формуле полной вероятности.

ПРИМЕР. Прибор может собираться из высококачественных деталей и из деталей обычного качества. Около 40% приборов собирается из высококачественных деталей. Если прибор собран из высококачественных деталей, его надежность (вероятность безотказной работы) за время t равна 0,95; если из деталей обычного качества – его надежность равна

0,7. Прибор испытывался в течение времени t и работал безотказно. Найти вероятность того, что он собран из высококачественных деталей.

Решение. Возможны две гипотезы:

H_1 = < прибор собран из высококачественных деталей >;

H_2 = < прибор собран из деталей обычного качества >.

Вероятности этих гипотез до опыта: $P(H_1) = 0{,}4$; $P(H_2) = 0{,}6$. В результате опыта произошло событие

A = <прибор безотказно работал в течение времени t>.

Условные вероятности этого события при гипотезах H_1 и H_2 равны: $P(A|H_1) = 0{,}95$; $P(A|H_2) = 0{,}7$. По формуле Байеса находим вероятность гипотезы H_1 после опыта:

$$P(H_1) = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}95}{0{,}4 \cdot 0{,}95 + 0{,}6 \cdot 0{,}7} = 0{,}475.$$