Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

ЛЕКЦИЯ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ТЕМА 5: ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Лектор: Подберезина Е.И.
2010 год

Непосредственные способы вычисления вероятностей событий не являются в теории вероятностей основными, поскольку их применение не всегда удобно и не всегда возможно.

Возьмем классическое определение вероятности. Оно применимо лишь для событий, связанных со схемой случаев, которая на практике встречается крайне редко, а если и встречается, то бывает слишком сложна, что делает вычисление вероятностей по классическому определению чрезмерно громоздким. Если событие не связано со схемой случаев, то для определения его вероятности приходится иметь дело с относительной частотой, по которой можно лишь приблизительно определить вероятность события.

Кроме того, на практике обычно требуется определить вероятности событий, экспериментальное воспроизведение которых затруднено. Например, определить вероятность поражения самолета в воздушном бою по относительной частоте практически невозможно. И не только потому, что такие опыты оказались бы непомерно сложными и дорогостоящими, а еще и потому, что требуется оценить вероятность исхода боя не для существующих образцов техники, а для проектируемых. Такая оценка и производится для того, чтобы выявить наиболее рациональные конструктивные параметры элементов перспективной техники.

Поэтому для определения вероятностей событий применяются, как правило, не непосредственные прямые методы, а косвенные, позволяющие по известным вероятностям одних событий определять вероятности других событий, с ними связанных. Вся теория вероятностей, в основном, и представляет собой систему таких косвенных методов, пользование которыми позволяет свести необходимый эксперимент к минимуму.

Применяя эти косвенные методы, всегда в той или иной форме пользуются основными теоремами теории вероятностей. Этих теорем две: теорема сложения и теорема умножения. Строго говоря, оба эти положения являются теоремами и могут быть доказаны только для событий, связанных со схемой случаев. Для событий, не связанных со схемой случаев, они принимаются аксиоматически, как принципы или постулаты.

ТЕОРЕМА 1 (***теорема сложения***). Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

Другими словами эту теорему можно сформулировать так: вероятность появления одного из двух несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем теорему сложения вероятностей для схемы случаев. Пусть событию A благоприятствуют N_A исходов, событию B – N_B исходов. Так как события A и B несовместны, то нет элементарных исходов, благоприятствующих и событию A, и событию B. Следовательно, событию $A + B$ благоприятствуют $N_A + N_B$ исходов. Применяя классическое определение вероятности, получаем:

$$P(A+B) = \frac{N_A + N_B}{N} = \frac{N_A}{N} + \frac{N_B}{N} = P(A) + P(B).$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству свойства 5. Теорема доказана.

Методом математической индукции эту теорему можно обобщить на любое конечное число несовместных событий.

ТЕОРЕМА. Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий A_1, A_2, A_3, … , A_n, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(\sum_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

ПРИМЕР. В ящике 12 белых, 7 черных и 11 синих шаров. Наудачу вынимают один шар. Какова вероятность того, что он окажется не белым?

Решение. Рассмотрим события:

C = < шар не белый >, A = < шар черный >, B = < шар синий >.

События A и B несовместны и $C = A + B$. По теореме сложения вероятностей имеем:

$$P(C) = P(A+B) = P(A) + P(B) = \frac{7}{30} + \frac{11}{30} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}.$$

Вероятности событий A и B вычислены по классическому определению вероятности.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если события A_1, A_2, A_3, … , A_n образуют полную группу несовместных событий, то сумма их вероятностей равна 1:

$$P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots + P(A_n) = 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как события A_1, A_2, A_3, … , A_n образуют полную группу, то появление хотя бы одного из них – достоверное событие:

$$P(A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n) = 1.$$

Поскольку события A_1, A_2, A_3, …, A_n несовместны, то к ним применима теорема сложения вероятностей:

$$P(A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots + P(A_n).$$

Следовательно,

$$P(A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n) = 1.$$

Следствие доказано.

СЛЕДСТВИЕ 2. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следствие 2 есть частный случай следствия 1, поскольку события A и $\overline{A}$ образуют полную группу событий.

Следствие 1 выделено ввиду его большой важности в практическом применении теории вероятностей. Часто легче вычислить вероятность противоположного события $\overline{A}$, чем вероятность прямого события A. В этих случаях вычисляют $P(\overline{A})$ и находят $P(A) = 1 - P(\overline{A})$.

ПРИМЕР. На стеллаже в случайном порядке расставлены 15 учебников, причем 5 из них в переплете. Библиотекарь берет наудачу 3 учебника. Какова вероятность того, что хотя бы один из них окажется в переплете?

Решение. Вероятность события A = < хотя бы один учебник в переплете > можно найти по классическому определению вероятности:

$$P(A) = \frac{N_A}{N}, \text{ где } N_A = C_5^3 + C_5^1 C_{10}^2 + C_5^2 C_{10}^1; \; N = C_{15}^3.$$

Но вычисления будут проще, если использовать событие $\overline{A}$ = < все учебники без переплета >, противоположное событию A:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{C_{10}^3}{C_{15}^3} = 1 - \frac{24}{91} = \frac{67}{91}.$$

Вероятность суммы совместных событий может быть вычислена по следующей теореме.

ТЕОРЕМА. Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство теоремы опирается на теорему сложения вероятностей. Запишем событие $A + B$ в виде суммы несовместных событий:

$$A + B = A\overline{B} + \overline{A}B + AB.$$

По теореме сложения вероятностей несовместных событий имеем:

$$P(A + B) = P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B) + P(AB). \qquad (1)$$

Событие A произойдет, если наступит одно из двух несовместных событий: $A\,\overline{B}$ или $A\,B$. По теореме сложения вероятностей несовместных событий имеем:

$$P(A) = P(A\,\overline{B}) + P(A\,B).$$

Отсюда

$$P(A\,\overline{B}) = P(A) - P(A\,B). \qquad (2)$$

Аналогично имеем:

$$P(B) = P(\overline{A}\,B) + P(A\,B),$$

откуда

$$P(\overline{A}\,B) = P(B) - P(A\,B). \qquad (3)$$

Подставив (2) и (3) в (1), получим:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Теорема доказана.

Аналогично вероятность суммы трех совместных событий вычисляется по формуле

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A\,B) - P(A\,C) - P(B\,C) + P(A\,B\,C).$$

Методом математической индукции можно доказать общую формулу для вероятности суммы конечного числа совместных событий:

$$P(\sum_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i} P(A_i) - \sum_{i,j} P(A_i\,A_j) + \sum_{i,j,k} P(A_i\,A_j\,A_k) + \ldots + (-1)^{n-1} P(A_1\,A_2 \ldots A_n), \qquad (4)$$

где суммы распространяются на различные значения индексов i; i, j; i, j, k, и так далее.

Последняя формула выражает вероятность суммы конечного числа событий через вероятности произведений этих событий, взятых по одному, по два, по три и так далее. Аналогичные формулы верны для произведения событий:

$$P(AB) = P(A) + P(B) - P(A+B);$$

$$P(ABC) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A+B) - P(A+C) - P(B+C) + P(A+B+C). \qquad (5)$$

Общая формула, выражающая вероятность произведения конечного числа событий через вероятности сумм этих событий, взятых по одному, по два, по три и так далее, имеет вид:

$$P(A_1\,A_2 \ldots A_n) = \sum_{i} P(A_i) - \sum_{i,j} P(A_i + A_j) + \sum_{i,j,k} P(A_i + A_j + A_k) +$$

$$+\ldots+(-1)^{n-1}P(A_1+A_2+\ldots+A_n).$$

Формулы (4) и (5) находят практическое применение при преобразовании различных выражений, содержащих вероятности сумм и произведений событий. В зависимости от специфики задач в некоторых случаях удобнее бывает пользоваться только суммами, а в других только произведениями событий; для преобразования одних в другие и служат подобные формулы.

Формула (4) показывает, что для вычисления вероятности суммы совместных событий нужно уметь находить вероятность произведения событий. Нахождение вероятности произведения событий тесно связано с понятием зависимых и независимых событий и понятием условной вероятности события.

ЗАВИСИМЫЕ И НЕЗАВИСИМЫЕ СОБЫТИЯ. УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ. ТЕОРЕМА УМНОЖЕНИЯ

Определение. Событие A называется ***независимым*** от события B, если его вероятность не зависит от того, произошло событие B или нет.

Определение. Событие A называется ***зависимым*** от события B, если его вероятность зависит от того, произошло событие B или нет.

ПРИМЕР. Опыт состоит в бросании двух монет. Рассмотри события $A = <$ на первой монете выпал герб $>$ и $B = <$ на второй монете выпал герб $>$. В данном случае вероятность события A не зависит от того, произошло событие B или нет; событие A независимо от события B.

Определение. Вероятность события A, вычисленная при условии, что событие B произошло, называется ***условной вероятностью*** события A и обозначается $P(A|B)$.

В связи с появлением термина «условная вероятность» $P(A|B)$ события A будем вероятность $P(A)$ события A называть также ***безусловной вероятностью***. Можно доказать, что условная вероятность $P(A|B)$ обладает всеми свойствами безусловной вероятности $P(A)$. Условная вероятность $P(A|B)$ события A представляет собой безусловную вероятность, заданную на новом пространстве элементарных исходов Ω_B, совпадающих с множеством всех элементарных исходов, благоприятствующих событию B.

ПРИМЕР. Опыт состоит в однократном бросании игральной кости, грани с цифрами 1, 3 и 6 которой окрашены в красный, а грани с цифрами 2, 4 и 5 – в белый цвет. Рассмотрим события:

$A_1 = <$ выпадение нечетного числа очков $>$;

$A_2 = <$ выпадение четного числа очков $>$;

$B = <$ появление грани красного цвета $>$.

Безусловные вероятности событий A_1 и A_2 одинаковы и равны, очевидно, 0,5.

Найдем условные вероятности этих событий, при условии, что событие B произошло. Если событие B произошло, то пространство элементарных исходов $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, связанное с данным опытом, сужается до множества всех исходов $\Omega_B = \{1, 3, 6\}$, благоприятствующих событию B. Из этих исходов событию A_1 благоприятствуют два исхода: 1 и 3; а событию A_2 благоприятствует один исход: 6. Поэтому искомые условные вероятности равны:

$$P(A_1|B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}; \qquad P(A_2|B) = \frac{1}{6}.$$

Вероятность события A_1, так же как и вероятность события A_2, зависит от того, произошло событие B или не произошло. Поэтому эти события зависят от события B.

ПРИМЕР. В урне 3 белых и 4 черных шара. Три лица вынимают из урны по одному шару без возвращения. Возьмем события:

$A = <$ первое лицо извлекло белый шар $>$;

$B = <$ второе лицо извлекло белый шар $>$;

$C = <$ третье лицо извлекло черный шар $>$.

Безусловная вероятность $P(A)$ события A равна $P(A) = \frac{3}{7}$.

Если произошло событие B, то в урне останется 2 белых и 4 черных шара. Поэтому $P(A|B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \neq P(A)$, следовательно, событие A зависит от события B.

Если произошло событие C, то в урне останется 3 белых и 3 черных шара. Поэтому $P(A|C) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \neq P(A)$, следовательно, событие A зависит от события C.

Если произошли оба события B и C, то в урне будет 2 белых и 3 черных шара. Поэтому $P(A|B\cdot C) = \frac{2}{5} \neq P(A)$, следовательно, событие A зависит от произведения $B\cdot C$.

Если событие A зависит от события B, то $P(A) \neq P(A|B)$. Если событие A не зависит от события B, то $P(A) = P(A|B)$.

ТЕОРЕМА (***теорема умножения***). Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, найденную в предположении, что первое событие произошло:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B|A); \quad P(AB) = P(B) \cdot P(A|B). \tag{6}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем теорему умножения для схемы случаев. Пусть пространство элементарных исходов содержит n элементов, из которых m благоприятствуют событию A, k благоприятствуют событию B. Поскольку не предполагалось, что события A и B несовместны, то вообще существуют случаи, благоприятствующие и событию A, и событию B одновременно, то есть благоприятствующие событию $A \cdot B$. Пусть число таких случаев равно l. Тогда

$$P(AB) = \frac{l}{n}; \quad P(A) = \frac{m}{n}.$$

После того, как событие A произошло, число элементарных исходов сократилось с n до m, а число элементарных исходов, благоприятствующих событию B, с k до l. Поэтому условная вероятность события B равна

$$P(B|A) = \frac{l}{m} = \frac{l:n}{m:n} = \frac{P(A\cdot B)}{P(A)}.$$

Аналогично

$$P(A|B) = \frac{P(A\cdot B)}{P(B)}.$$

Умножая последние равенства на $P(A)$ и $P(B)$ соответственно, получим:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B|A); \qquad P(AB) = P(B) \cdot P(A|B).$$

Теорема доказана.

Методом математической индукции эту теорему можно обобщить на любое конечное число событий.

ТЕОРЕМА. Вероятность произведения нескольких событий равна произведению вероятности одного из этих событий на условные вероятности других; при этом условная вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие события произошли.

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cdot A_2) \cdot \ldots \cdot$$
$$\cdot\, P(A_n|A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}).$$

ПРИМЕР. В урне 2 белых и 3 черных шара. Из урны вынимают последовательно без возвращения два шара. Найти вероятность того, что оба шара белые.

Решение. Рассмотрим события:

A = < появление двух белых шаров >;

A_1 = < появление белого шара при первом вынимании >;

A_2 = < появление белого шара при втором вынимании >.

Поскольку $A = A_1 \cdot A_2$, то по теореме умножения имеем:

$$P(A) = P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = 0{,}1.$$

Отметим следствия теоремы умножения.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если событие A не зависит от события B, то и событие B не зависит от события A.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуется доказать, что $P(B) = P(B|A)$. Будем предполагать, что $P(A) \neq 0$. Запишем теорему умножения в двух формах:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B|A), \quad P(AB) = P(B) \cdot P(A|B),$$

откуда

$$P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B). \qquad (7)$$

Так как по условию событие A не зависит от события B, то

$$P(A) = P(A|B),$$

и равенство (7) примет вид:

$$P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A).$$

Разделив обе части последнего равенства на $P(A)$, получим:

$$P(B) = P(B|A),$$

что и требовалось доказать.

Из следствия 1 вытекает, что зависимость или независимость событий всегда взаимны. В связи с этим можно дать следующее определение независимых событий.

<u>Определение</u>. ***Два события*** называются ***независимыми***, если появление одного из них не изменяет вероятности появления другого.

СЛЕДСТВИЕ 2. Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следствие непосредственно вытекает из определения независимых событий:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B|A) = P(A) \cdot P(B),$$

так как событие B не зависит от события A. Следствие доказано.

ПРИМЕР. В урне 2 белых и 3 черных шара. Из урны берут шар, затем возвращают шар в урну, тщательно перемешивают шары и опять берут шар. Найти вероятность того, что оба шара белые.

Решение. Рассмотрим события:

$$A = <\text{ появление двух белых шаров }>;$$

$$A_1 = <\text{ появление белого шара при первом вынимании }>;$$

$$A_2 = <\text{ появление белого шара при втором вынимании }>.$$

Поскольку $A = A_1 \cdot A_2$, то по теореме умножения имеем:

$$P(A) = P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1).$$

Но события A_1 и A_2 в данном случае независимы, поэтому

$$P(A_2|A_1) = P(A_2).$$

Имеем:

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25} = 0{,}16.$$

Справедливо утверждение, обратное следствию 2.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если вероятность произведения двух событий равна произведению их вероятностей, то эти события независимые.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$. Согласно теореме умножения $P(AB) = P(A) \cdot P(B|A)$. Следовательно,

$$P(A) \cdot P(B) = P(A) \cdot P(B|A),$$

откуда $P(B) = P(B|A)$, то есть события A и B независимы. Следствие доказано.

Независимые события обладают следующими свойствами.

СВОЙСТВО 1. Если события A и B независимые, то события A и $\overline{B}$ тоже независимые.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем событие A как сумму несовместных событий:

$$A = A\overline{B} + AB.$$

По теореме сложения вероятностей имеем:

$$P(A) = P(A\overline{B}) + P(AB).$$

Так как события A и B независимые, по следствию 2 получаем:

$$P(A) = P(A\overline{B}) + P(AB) = P(A\overline{B}) + P(A) \cdot P(B).$$

Тогда

$$P(A\overline{B}) = P(A) - P(A)\cdot P(B) = P(A)\cdot(1 - P(B)) = P(A)\cdot P(\overline{B}),$$

или

$$P(A\overline{B}) = P(A)\cdot P(\overline{B}),$$

откуда следует, что события A и $\overline{B}$ тоже независимые. Свойство доказано.

СВОЙСТВО 2. Если два события независимы, то независимы и противоположные им события.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это свойство является непосредственным следствием предыдущего свойства.

<u>Определение</u>. ***Несколько событий*** называются ***независимыми в совокупности*** (или просто ***независимыми***), если: а) независимы любые два из них; б) любое из них и произведение любого количества из остальных независимы.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В основе независимости событий лежит их физическая независимость, означающая, что множества случайных факторов, приводящих к тому или иному исходу испытания, не пересекаются (или почти не пересекаются). Например, если в цехе имеются две установки, никак не связанные между собой по условиям производства, то простой каждой установки – независимые события. Если эти установки связаны единым технологическим циклом, то простой одной из установок зависит от состояния работы другой.

Вместе с тем, если множества случайных факторов пересекаются, то появляющиеся в результате испытания события не обязательно зависимые.

ПРИМЕР. Опыт состоит в извлечении одной карты из колоды. Рассмотрим события

$A = <$ извлечение карты пиковой масти $>$; $B = <$ извлечение туза $>$.

На первый взгляд можно предполагать зависимость событий A и B в силу пересечения случаев, им благоприятствующих: среди карт пиковой масти есть туз, а среди тузов – карта пиковой масти. Однако события A и B независимы. Действительно, в колоде 4 туза из 36 карт, поэтому $P(B) = \dfrac{4}{36} = \dfrac{1}{9}$. Из 9 карт пиковой масти 1 туз, следовательно, $P(B|A) = \dfrac{1}{9}$. Итак, $P(B|A) = P(B)$, то есть события A и B независимы.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для независимости в совокупности нескольких событий недостаточно их попарной независимости.

ПРИМЕР С.Н. Бернштейна. Предположим, что одна грань правильного тетраэдра окрашена в красный цвет, вторая – в зеленый, третья – в синий, а четвертая – во все три цвета. Опыт состоит в однократном подбрасывании тетраэдра. Рассмотрим события:

A = < тетраэдр упадет на грань, в окраске которой есть красный цвет >;

B = < тетраэдр упадет на грань, в окраске которой есть зеленый цвет >;

C = < тетраэдр упадет на грань, в окраске которой есть синий цвет >.

Из четырех граней тетраэдра в окраске двух его граней присутствует красный цвет. Поэтому $P(A)$ = 0,5. Аналогично, $P(B) = P(C)$ = 0,5.

Из благоприятствующих событию A двух исходов один благоприятствует событию B, поэтому $P(B|A)$ = 0,5. Аналогично

$$P(A|B) = P(A|C) = P(B|A) = P(B|C) = P(C|A) = P(C|B) = 0{,}5.$$

Следовательно, события A, B, C попарно независимы.

Если же произошли одновременно два события, например, A и B, (это произойдет, если тетраэдр упадет на трехцветную грань), то событие C обязательно наступит, значит, $P(C|A \cdot B) = 1$. Аналогично получаем: $P(A|B \cdot C) = P(B|A \cdot C) = 1$. Следовательно, вероятность каждого из событий A, B, C изменяется, если наступают остальные два, и, следовательно, события A, B, C в совокупности зависимы.

ТЕОРЕМА. Вероятность произведения независимых событий A_1, A_2, A_3, … , A_n равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot \ldots \cdot P(A_n). \quad (8)$$

Утверждение, обратное последней теореме, не справедливо. Для независимости в совокупности нескольких событий недостаточно выполнения последнего равенства.

ПРИМЕР. На тщательно перемешанных карточках написаны числа от 1 до 8. Наудачу вынимают одну карточку. Рассмотрим события:

A = < появилось число, меньшее 5 > = {1, 2, 3, 4};

B = < появилось число, большее 1, но меньшее 6 > = {2, 3, 4, 5};

C = < появилось число, большее 3, но меньшее 8 > = {4, 5, 6, 7}.

Так как, очевидно, $P(A) = P(B) = P(C) = 0{,}5$, то $P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{8}$. Событию $A \cdot B \cdot C$ благоприятствует один исход, появление цифры 4, поэтому $P(A \cdot B \cdot C) = \frac{1}{8}$. Итак,

$$P(A \cdot B \cdot C) = \frac{1}{8} = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C),$$

то есть вероятность произведения событий A, B, C равна произведению их вероятностей.

Но события A, B, C не являются независимыми в совокупности. Действительно,

$$P(B|A) = \frac{3}{4} \neq P(B),$$

следовательно, A и B зависимые.

Событию $A \cdot B$ благоприятствуют три исхода: $A \cdot B = \{2, 3, 4\}$, из которых один благоприятствует событию C. Поэтому

$$P(C|A \cdot B) = \frac{1}{3} \neq P(C),$$

откуда вытекает, что события C и $A \cdot B$ зависимые.

Таким образом, из равенства (8) не следует независимость в совокупности событий.

Формула (4) вычисления суммы трех и более совместных событий весьма громоздка, поэтому вероятность суммы нескольких совместных событий проще находить, используя противоположное событие.

Пусть события A_1, A_2, …, A_n совместны. Тогда

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1 - P(\overline{A_1 + A_2 + \ldots + A_n}) =$$
$$= 1 - P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \ldots \cdot \overline{A_n})$$

в силу закона де Моргана. Если при этом события A_1, A_2, …, A_n независимые, то и противоположные им события тоже независимы (свойство 2) и по формуле (8) получаем:

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot \ldots \cdot P(\overline{A_n}).$$

Таким образом, имеет место теорема.

ТЕОРЕМА. Вероятность появления хотя бы одного из событий, независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий.

ПРИМЕР. Производятся три выстрела по мишени. Вероятности попадания при первом, втором и третьем выстрелах равна 0,4; 0,5 и 0,7 соответственно. Найти вероятность того, что в мишени будет хотя бы одна пробоина.

Решение. Рассмотрим события:

A = < в мишени будет хотя бы одна пробоина >;

A_i = < попадание при i-том выстреле>.

Используя последнюю теорему, имеем:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) = 1 - 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}3 = 1 - 0{,}09 = 0{,}91.$$