ЛЕКЦИЯ 2

ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ СОБЫТИЯ

Вероятность события относится к основным понятиям теории вероятностей и выражает меру объективной возможности появления события.

Для практической деятельности важно уметь сравнивать события по степени возможности их наступления. Очевидно, события «выпадение дождя» и «выпадение снега» в первый день лета обладают разной степенью возможности их наступления.

Определение вероятности как меры объективной возможности появления события в современной математике вводится на основании аксиом. Прежде чем перейти к аксиоматическому определению, остановимся на нескольких других определениях, которые исторически возникли раньше. Они позволяют лучше понять смысл аксиоматического определения и во многих случаях являются рабочим инструментом для решения практических задач.

КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ СОБЫТИЯ

Пусть пространство элементарных событий конечно, причем все элементарные события являются равновозможными.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Элементарные события называются в некотором опыте ***равновозможными***, если в силу условий проведения опыта можно считать, что ни одно из них не является объективно более возможным, чем другие.

ПРИМЕР. Появление того или иного числа очков на брошенной игральной кости – равновозможные элементарные события, если кость изготовлена из однородного материала и имеет форму правильного многоугольника.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Опыт, удовлетворяющий условию равновозможности элементарных исходов, называется «***классической схемой***».

Наряду с названием «классическая схема» используют названия «***схема случаев***», «***схема урн***», поскольку любую вероятностную задачу для рассматриваемого испытания можно заменить эквивалентной задачей с урнами и шарами разных цветов.

Пусть N – общее число равновозможных элементарных исходов в пространстве элементарных исходов Ω, а N_A – число ***элементарных исходов***, ***образующих событие*** A или, как говорят, ***благоприятствующих событию*** A.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Вероятностью*** $P(A)$ ***события*** A называют отношение числа N_A благоприятствующих событию A элементарных исходов к общему числу N равновозможных элементарных исходов:

$$P(A) = \frac{N_A}{N}.$$

Сформулированное определение вероятности принято называть ***классическим определением вероятности***.

ПРИМЕР. Игральную кость бросают один раз. Какова вероятность появления четного числа очков?

РЕШЕНИЕ. Общее число равновозможных элементарных исходов этого опыта равно шести, поскольку пространством элементарных исходов является множество

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Событию

$$A = < \text{появление четного числа очков} > = \{ 2, 4, 6 \}$$

благоприятствуют три исхода. Следовательно, по классическому определению вероятности события,

$$P(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

СВОЙСТВА ВЕРОЯТНОСТИ СОБЫТИЯ

Они легко вытекают из классического определения вероятности события.

СВОЙСТВО 1. Вероятность любого события есть неотрицательное число.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сразу следует из того, что вероятность любого события равна отношению натуральных чисел (или нуля к натуральному числу).

СВОЙСТВО 2. Вероятность достоверного события Ω равна единице.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Число элементарных исходов, благоприятствующих событию Ω, равно общему числу равновозможных элементарных исходов опыта:

$$P(\Omega) = \frac{N_\Omega}{N} = \frac{N}{N} = 1.$$

СВОЙСТВО 3. Вероятность невозможного события $\varnothing$ равна нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В пространстве элементарных исходов нет исходов, благоприятствующих невозможному событию.

СВОЙСТВО 4. Вероятность случайного события A есть число, заключенное между нулем и единицей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Число исходов N_A, благоприятствующих событию A, удовлетворяет условию: $0 < N_A < N$, где N – общее число равновозможных исходов опыта. Разделив последнее двойное неравенство на N, получим:

$$\frac{0}{N} < \frac{N_A}{N} < \frac{N}{N},$$

откуда по классическому определению вероятности события имеем:

$$0 < P(A) < 1.$$

СЛЕДСТВИЕ. Вероятность любого события удовлетворяет условию:

$$0 \le P(A) \le 1.$$

СВОЙСТВО 5. Если события A и B несовместны, то

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть событию A благоприятствуют N_A исходов, событию B – N_B исходов. Так как события A и B несовместны, то событию $A + B$ благоприятствуют $N_A + N_B$ исходов. Применяя классическое определение вероятности, получаем:

$$P(A+B) = \frac{N_A + N_B}{N} = \frac{N_A}{N} + \frac{N_B}{N} = P(A) + P(B).$$

Недостаток классического определения вероятности заключается в том, что оно применимо только к пространствам элементарных исходов, состоящим из конечного числа равновозможных исходов. Этим определением нельзя воспользоваться даже в тех случаях, когда пространство элементарных исходов конечно, но среди исходов есть более предпочтительные или менее предпочтительные.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ СОБЫТИЯ

Геометрическое определение вероятности события обобщает классическое на случай бесконечного множества элементарных исходов Ω тогда, когда Ω представляет собой подмножество пространства R (числовой прямой), R^2 (плоскости), R^n (n–мерного евклидова пространства). В пространстве R будем рассматривать только подмножества, которые имеют длину; в пространстве R^2 – подмножества, имеющие площадь, и так далее.

Под мерой $\mu(A)$ подмножества A будем понимать его длину, площадь или объем (обобщенный объем) в зависимости от того, какому пространству принадлежит Ω: в R, в R^2 или в R^3 (R^n). Будем считать, что пространство элементарных исходов Ω имеет конечную меру, а вероятность попадания случайно брошенной точки в любое подмножество Ω пропорциональна мере этого подмножества и не зависит от его расположения и формы. В этом случае говорят, что рассматривается «геометрическая схема» или «точку наудачу бросают в область Ω».

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Вероятностью события*** A называют число $P(A)$, равное отношению меры $\mu(A)$ множества A к мере множества Ω:

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}.$$

Сформулированное определение вероятности события называется ***геометрическим определением вероятности события***.

Вероятность события, определенную на основе ***геометрической схемы***, часто называют ***геометрической вероятностью***. Геометрическая вероятность, очевидно, сохраняет отмеченные ранее свойства вероятности в условиях классической схемы.

ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ЧАСТОТА СОБЫТИЯ. ЕЕ УСТОЙЧИВОСТЬ. СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Пусть произведена серия из n опытов, в каждом из которых могло появиться или не появиться событие A. Пусть в этой серии опытов событие A появилось m раз.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Относительной частотой*** $W(A)$ события A называется

$$W(A) = \frac{m}{n}.$$

ПРИМЕР. По цели произвели 24 выстрела, причем зарегистрировано 19 попаданий. Относительная частота события $A = <$ попадание $>$ равна

$$W(A) = \frac{19}{24}.$$

Сопоставим определения вероятности и относительной частоты: определение вероятности не требует, чтобы испытания проводились в действительности; определение относительной частоты предполагает, что испытания были проведены фактически. Другими словами, вероятность вычисляют до опыта, а относительную частоту – после опыта.

Относительная частота обладает ***свойством устойчивости***. Это свойство состоит в следующем. При малом количестве опытов относительная частота может заметно изменяться от одной серии опытов к другой. Однако при увеличении числа опытов относительная частота проявляет тенденцию стабилизироваться, приближаясь с незначительными колебаниями к некоторой средней, постоянной величине. Это одна из наиболее характерных закономерностей, наблюдаемых в случайных явлениях. Математическую формулировку этой закономерности впервые дал Я. Бернулли в теореме, которая представляет собой простейшую форму закона больших чисел.

Характер приближения частоты к вероятности при увеличении числа опытов отличается от стремления к пределу в математическом смысле слова.

При возрастании числа опытов относительная частота приближается к вероятности, но не с полной достоверностью, а с большой вероятностью, которая при большом числе опытов может рассматриваться как практическая достоверность.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Говорят, что величина x_n ***сходится по вероятности*** к величине a, если для любого $\varepsilon > 0$ вероятность неравенства $|x_n - a| < \varepsilon$ с увеличением n неограниченно приближается к 1.

Таким образом, при увеличении числа опытов относительная частота не стремится к вероятности события, а сходится к ней по вероятности. Это свойство составляет содержание теоремы Бернулли.

Сформулируем ***статистическое определение вероятности*** события.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Статистической вероятностью события*** называется постоянное число, около которого группируются относительные частоты этого события по мере увеличения числа испытаний. Таким образом, в качестве статистической вероятности события принимают относительную частоту или число, близкое к ней.

К недостаткам статистического определения вероятности относятся: неоднозначность; неприменимость к испытаниям с бесконечным числом исходов; невозможность нахождения относительной частоты без проведения большого количества экспериментов.

Можно показать, что при статистическом определении вероятности события сохраняются свойства вероятности события, справедливые в условиях классической схемы.

Задача определения связи вероятности с относительной частотой не потеряла актуальности и в наши дни, когда в теории вероятностей повсеместно используется аксиоматическое определение вероятности Колмогорова. Это привело к появлению и широкому внедрению в практику обширного раздела теории вероятностей – математической статистики.

АКСИОМАТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ СОБЫТИЯ

Для того чтобы понять смысл аксиоматического определения вероятности события, вернемся к классической схеме. В этом случае вероятность $P(\omega_i)$ любого элементарного исхода ω_i, $i = 1, 2, \ldots, N$ равна $P(\omega_i) = \dfrac{1}{N}$.

Вероятность $P(A)$ любого события A при этом равна $P(A) = \dfrac{N_A}{N}$, где N_A – число исходов, благоприятствующих событию A. Вероятность $P(A)$ можно также записать в следующем виде:

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i),$$

где суммирование ведется по всем значениям индекса i, при которых элементарные исходы образуют событие A.

Но задать вероятность события по такому принципу уже в случае геометрической схемы нельзя, так как при этом вероятность любого элементарного события равна нулю.

Поэтому следует дать определение вероятности события для любого пространства элементарных исходов Ω, не связанное с вероятностями элементарных исходов, а учитывающее те свойства вероятности событий, которые имеют место для всех предыдущих определений вероятности события (классического, геометрического, статистического).

Напомним эти свойства:

1. $P(A) \geq 0$;

2. $P(\Omega) = 1$;

3. $P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$, если события A_1, A_2, …, A_n попарно несовместны.

Именно эти три свойства лежат в основе аксиоматического определения вероятности. При этом свойство 3 постулируется для суммы счетного множества попарно несовместных событий.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть каждому событию A, (то есть подмножеству A пространства элементарных исходов Ω, принадлежащему σ–алгебре событий), поставлено в соответствие число $P(A)$. Числовую функцию P, заданную на σ–алгебре событий, называют ***вероятностью*** или ***вероятностной мерой***, если она удовлетворяет следующим аксиомам:

АКСИОМА 1 (***аксиома неотрицательности***): $P(A) \geq 0$;

АКСИОМА 2 (***аксиома нормированности***): $P(\Omega) = 1$;

АКСИОМА 3 (***расширенная аксиома сложения***): для любых попарно несовместных событий A_1, A_2, …, A_n,,, справедливо равенство:

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n + ...) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) + \ldots$$

Значение $P(A)$ называют ***вероятностью события*** A.

Замечание. Если пространство элементарных исходов Ω является конечным или счетным множеством, то каждому элементарному исходу $\omega_i \in \Omega$, $i = 1,2, \ldots,$ можно поставить в соответствие число $P(\omega_i) = p_i \geq 0$ так, что

$$\sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1.$$

Тогда для любого события $A \subset \Omega$ в силу аксиомы 3 вероятность $P(A)$ равна сумме вероятностей $P(\omega_i)$ всех тех элементарных исходов, которые входят в событие A, то есть:

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i).$$

Таким образом, мы определили вероятность любого события, используя вероятности элементарных исходов. Заметим, что вероятности элементарных исходов можно задавать совершенно произвольно, лишь бы они были неотрицательны и в сумме составляли единицу. Именно в этом и состоит идея аксиоматического определения вероятности.