ЛЕКЦИЯ 1

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Теория вероятностей – это наука, изучающая закономерности в случайных явлениях.

Случайное явление – это такое явление, которое при неоднократном воспроизведении одного и того же опыта протекает каждый раз несколько по-иному.

ПРИМЕР. Производится стрельба из орудия, установленного под заданным углом к горизонту. Пользуясь методами науки о движении снаряда в воздухе (внешняя баллистика), можно найти теоретическую траекторию снаряда. Фактически траектория каждого отдельного снаряда неизбежно несколько отклоняется от теоретической за счет совокупного влияния многих факторов. Среди них: ошибки изготовления снаряда, отклонение веса заряда от номинала, ошибки установки ствола в заданное положение, неоднородность структуры заряда, метеорологические условия и так далее.

Закономерности в случайных явлениях наблюдаются всегда, когда мы имеем дело с массой однородных случайных явлений.

Случайные явления называются ***однородными***, если они наблюдаются при осуществлении одних и тех же условий. Закономерности, проявляющиеся в массе однородных случайных явлений, оказываются практически независимыми от индивидуальных особенностей отдельных случайных явлений, входящих в эту массу. Эти отдельные особенности в массе как бы взаимно погашаются и средний результат массы случайных явлений оказывается практически уже не случайным.

Методы теории вероятностей не дают возможности предсказать исход отдельного случайного явления, но дают возможность предсказать средний суммарный результат массы однородных случайных явлений.

Изучение законов, управляющих массами случайных явлений, позволяет не только осуществлять научный прогноз, но в ряде случаев помогает целенаправленно влиять на ход случайных явлений, контролировать их, ограничивать сферу действия случайности, сужать ее влияние на практику.

Подобно другим математическим наукам, теория вероятности развилась из потребностей практики и сформировалась сначала на простом материале, которым оказались азартные игры. Эти игры создавались так, чтобы исход опыта был чисто случайным. Само слово «азарт» (фр.) означает «случай».

Возникновение теории вероятностей в современном смысле слова относится к середине XVII века и связано с исследованиями Паскаля, Ферма и Гюйгенса в области теории азартных игр.

Первое доказательство одного из важнейших положений теории вероятностей – закона больших чисел – принадлежит Якову Бернулли.

Другой важный этап в развитии теории вероятностей связан с именем Муавра, который ввел и для простейшего случая обосновал нормальный закон, играющий исключительно важную роль в случайных явлениях.

Стройное и систематическое изложение основ теории вероятностей было сделано Лапласом, которому принадлежит также доказательство одной из форм центральной предельной теоремы и развитие ряда приложений теории вероятностей к вопросам практики.

Для всего XVIII и начала XIX века характерны бурное развитие теории вероятностей и повсеместное увлечение ею. Эта наука становится модной. Ее начинают применять не только там, где это применение оправдано, но и там, где оно ничем не оправдано. Появляется множество работ, посвященных вопросам судопроизводства, истории, политики, даже богословия, в которых применялся аппарат теории вероятностей. Для этих псевдонаучных исследований характерен чрезвычайно упрощенный, механический подход к рассматриваемым в них общественным явлениям. В основу рассуждений полагаются некоторые произвольно заданные вероятности (например, при рассмотрении вопросов судопроизводства склонность любого человека к правде или лжи оценивается некоторой постоянной, одинаковой для всех людей вероятностью), и далее общественная проблема решается как простая арифметическая задача. Не удивительно, что в двадцатых-тридцатых годах XIX века в Западной Европе повсеместное увлечение теорией вероятностей сменилось разочарованием и скептицизмом. На теорию вероятностей стали смотреть как на науку сомнительную, второсортную, род математического развлечения, вряд ли достойный серьезного изучения.

Замечательно, что именно в это время в России создается та знаменитая Петербургская школа, трудами которой была поставлена на прочную логическую и математическую основу и сделана надежным, точным и эффективным методом познания. Со времени появления этой школы развитие теории вероятностей уже теснейшим образом связано с работами русских, а в дальнейшем – советских ученых: Буняковского, Чебышева, Маркова, Ляпунова, Бернштейна, Хинчина, Колмогорова, Романовского, Смирнова, Слуцкого, Гнеденко и других.

Классификация событий

К основным понятиям теории вероятностей относятся опыт (или испытание, эксперимент) и событие.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Опытом*** или ***испытанием*** или ***экспериментом*** называется выполнение определенного комплекса условий.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Событием*** в теории вероятностей называется всякий факт, который может произойти, а может и не произойти в результате опыта.

ПРИМЕР. Стрелок стреляет по мишени, разделенной на четыре области. Выстрел – это опыт. Попадание в первую область мишени – это событие.

ПРИМЕР. В урне находятся цветные шары. Из урны наудачу берут шар. Извлечение шара из урны – испытание. Появление шара определенного цвета – событие.

События делятся на достоверные, невозможные и случайные.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Событие называется ***достоверным***, если оно обязательно произойдет в результате испытания.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Событие называется ***невозможным***, если оно заведомо не произойдет в результате испытания.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Событие называется ***случайным***, если оно в результата опыта может произойти, а может и не произойти.

ПРИМЕР. Комплекс условий: в урне находятся десять белых шаров, занумерованных цифрами 1, 2, …, 10 и десять красных шаров, занумерованных цифрами 11, 12, …, 20. Испытание – извлечение одного шара из урны.

Событие A = < вынуть шар с номером от 1 до 20 > является достоверным.

Событие B = < вынуть белый шар с номером 12 > является невозможным.

Событие C = < вынуть белый шар с номером 4 > является случайным.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Элементарным событием*** называют всякий исход опыта.
Элементарные события взаимно исключают друг друга, то есть появление одного из элементарных событий исключает появление остальных элементарных событий. В результате опыта одно из элементарных событий обязательно произойдет.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Множество всех элементарных событий называется ***пространством элементарных событий***, связанных с данным опытом и обозначается Ω.
Пространство элементарных событий может быть конечным, счетным или несчетным.

ПРИМЕР. Бросают игральную кость один раз. Пространство элементарных событий, связанных с данным опытом, представляет собой множество $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ и является конечным.

ПРИМЕР. Монету бросают до тех пор, пока не появится герб. С этим экспериментом связано пространство элементарных исходов

$$\Omega = \{\text{Г, РГ, РРГ, РРРГ, …, РРР…РРРГ,…}\},$$

являющееся счетным.

ПРИМЕР. Стрелок стреляет по мишени. В этом случае пространство элементарных исходов представляет собой множество точек мишени и является несчетным:

$$\Omega = \left\{(x, y) \mid \text{где } x - \text{абсцисса точки попадания, } y - \text{ордината точки попадания}\right\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если пространство элементарных событий является конечным или счетным, то любой набор элементарных событий (или произвольное подмножество пространства элементарных событий) называется ***событием***. При этом элементарные события, которые являются элементами события, называются ***элементарными исходами***, ***благоприятствующими данному событию***.

Говорят, что ***событие*** A ***произошло*** или ***наступило***, если в результате опыта появилось одно из элементарных событий, благоприятствующих данному опыту.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Два события называются ***совместными***, если появление одного из них не исключает появление другого, то есть если они оба могут произойти одновременно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Два события называются ***несовместными***, если появление одного из них исключает появление другого.

ПРИМЕР. Бросают две игральные кости. Рассмотрим события:

A = < на первой кости выпало три очка >,

B = < на второй кости выпало два очка >,

C = < сумма очков на двух костях равна двум >.

События A и B совместны, события A и C несовместны, события B и C несовместны.

ПРИМЕР. Из ящика вынимают одну деталь. Возьмем события

A = <деталь стандартная>, B = <деталь нестандартная>.

Эти события несовместны.

ПРИМЕР. Вынимают одну карту из колоды. Рассмотрим события:

A = < появилась карта пиковой масти >,

B = < появился король >,

C = < появился туз >.

События A и C совместны, события B и C несовместны.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Группа событий A_1, A_2, …, A_n называется ***группой несовместных событий***, если события, входящие в эту группу, попарно несовместны, то есть никакие два из них не могут произойти одновременно.

ПРИМЕР. Производится один выстрел по мишени. Возьмем события:

A_1 = < попадание в десятку >,

A_2 = < попадание в восьмерку >,

A_3 = < попадание в четверку >,

A_4 = < попадание в двойку >,

A_5 = < промах >.

События A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 образуют группу несовместных событий.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Группа событий A_1, A_2, …, A_n называется ***группой совместных событий***, если совместны хотя бы два события из этой группы.

ПРИМЕР. Производится три выстрела по мишени. Возьмем события:

A_1 = < попадание при первом выстреле >,

A_2 = < попадание при втором выстреле >,

A_3 = < попадание при третьем выстреле >,

A_4 = < промах >,

События A_1, A_2, A_3, A_4 образуют группу совместных событий.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Несколько событий образуют ***полную группу событий***, если в результате опыта обязательно произойдет одно из них.

ПРИМЕР. В урне шесть красных и четыре белых шара, причем пять из них имеют номер. Испытание – извлечение одного шара. Рассмотрим события:

A = < появление красного шара >,

B = < появление белого шара >,

C = < появление шара с номером >.

События A, B, C образуют полную группу совместных событий.

ПРИМЕР. По цели производится три выстрела.

A = < три промаха >,

B = < одно попадание >,

C = < два попадания >,

D = < три попадания >.

События A, B, C, D образуют полную группу несовместных событий.

ПРИМЕР. Пространство элементарных событий является полной группой несовместных событий.

ПРИМЕР. События A и $\overline{A}$ образуют полную группу несовместных событий для любого события A.

АЛГЕБРА СОБЫТИЙ

Пусть даны два события A и B.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Суммой*** или ***объединением событий*** A и B называется событие C, состоящее в наступлении хотя бы одного из событий A, B, то есть состоящее в наступлении или события A, или события B, или событий A и B вместе.

Пишут: $C = A + B = A \cup B$ = < или A произошло, или B произошло, или оба события A и B произошли >.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Произведением*** или ***пересечением событий*** A и B называется событие C, состоящее в том, что оба события A и B произошли, то есть состоящее в том, что произошло и событие A, и событие B.

Пишут: $C = A \cdot B = A \cap B$ = < и событие A произошло, и событие B произошло >.

ПРИМЕР. Стрелок производит два выстрела по цели. Возьмем события:

A = < попадание при первом выстреле >,

B = < попадание при втором выстреле >.

Суммой этих событий будет событие

$C = A + B = A \cup B$ = < попадание в цель > =

= <или попадание в цель при первом выстреле, промах при втором; или промах при первом выстреле, попадание при втором; или попадание при обоих выстрелах>.

Произведением этих событий будет событие

$D = A \cdot B = A \cap B$ = < попадание при обоих выстрелах > =

= < и при первом выстреле попадание, и при втором выстреле попадание >.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Разностью событий*** A и B называется событие C, состоящее в том, что событие A произошло, а событие B не произошло. Пишут: $C = A - B$.

ПРИМЕР. Вынимают карту из колоды. Возьмем события:

$$A = <\text{ взят король }>,$$

$$B = <\text{ взята карта пиковой масти }>.$$

Разностью $A - B$ событий A и B будет событие

$$C = A - B = <\text{ взят либо червовый, либо пиковый, либо бубновый король }>.$$

Разностью $B - A$ событий B и A будет событие

$$D = B - A = <\text{ взята пиковая карта, не являющаяся королем }>.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Событие $\Omega - A$, где Ω – пространство элементарных событий, называется ***событием***, ***противоположным*** событию A или ***дополнением*** к ***событию*** A и обозначается $\overline{A}$.

ПРИМЕР. Событием, противоположным событию

$$A = <\text{ отказ первого блока }>,$$

будет событие $\overline{A} = <$ первый блок исправен $>$. Дополнением к событию

$$B = <\text{ попал в цель }>$$

является событие $\overline{B} = <$ промахнулся $>$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Сигма алгеброй*** (σ–алгеброй) ***событий*** называют некоторый класс U подмножеств пространства элементарных событий Ω, удовлетворяющий условиям:

1. если $A \in U$, то $\overline{A} \in U$;
2. если $A \in U$, $B \in U$, то $A + B \in U$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Элементы σ–алгебры событий, заданной на пространстве элементарных событий, называются ***событиями***.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Два события называются ***равносильными*** (***эквивалентными***), если они состоят из одних и тех же элементарных событий. Пишут: $A = B$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Событие B называют ***следствием*** события A и пишут $A \subset B$, если из появления события A следует появление события B.

Если $A \subset B$ и $B \subset A$, то $A = B$. Если $A \subset B$ и $B \subset C$, то $A \subset C$.

СВОЙСТВА ОПЕРАЦИЙ НАД СОБЫТИЯМИ

1. Коммутативность суммы и произведения событий:

$$A + B = B + A, \quad A \cdot B = B \cdot A.$$

2. Ассоциативность суммы и произведения событий:

$$(A + B) + C = A + (B + C), \quad (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C).$$

3. Дистрибутивность относительно сложения:

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C.$$

4. Дистрибутивность относительно умножения:

$$(A \cdot B) + C = (A + C) \cdot (B + C).$$

5. $A \subset B \Rightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$.

6. Двойное дополнение события совпадает с исходным событием: $\overline{\overline{A}} = A$.

7. Сумма и произведение одинаковых событий совпадают с самим событием:

$$A + A = A \cdot A = A.$$

8. Законы де Моргана: $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$, $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$.

__**Замечание.**__ Из законов де Моргана и соотношения $A - B = A \cdot \overline{B}$ следует, что все действия над событиями можно получить с помощью только двух действий: объединения и отрицания (или пересечения и отрицания).