ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

ЛЕКЦИЯ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ТЕМА 2: ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРНОГО АНАЛИЗА

Лектор: Подберезина Е.И.
2010 год

ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРНОГО АНАЛИЗА

Комбинаторный анализ (***комбинаторика***) – раздел высшей математики, посвященный решению задач выбора и расположения элементов некоторого, обычно конечного, множества в соответствии с заданными правилами.

Определение. Вся подлежащая изучению совокупность объектов (наблюдений) называется ***генеральной совокупностью***.

Определение. Та часть объектов, которая случайно отобрана из генеральной совокупности для непосредственного изучения, называется ***выборочной совокупностью*** или ***выборкой***.

Определение. ***Объемом совокупности*** (генеральной или выборочной) называется число объектов этой совокупности.

Объем генеральной совокупности будем обозначать через n, выборочной совокупности – через k.

На практике чаще представляет интерес не конкретный вид выборок, а количество выборок, которые можно сделать из генеральной совокупности. Формулы для подсчета числа выборок являются следствиями двух простых правил или принципов комбинаторики: принципа умножения и принципа сложения. Эти принципы и сами часто применяются при решении комбинаторных задач.

Принцип умножения. Пусть требуется последовательно выполнить k действий. Если первое действие можно выполнить n_1 способами, после чего второе действие можно выполнить n_2 способами, после чего третье действие – n_3 способами, и так далее, после чего k-е действие – n_k способами, то все k действия вместе (в указанном порядке) можно выполнить $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$ способами.

ЗАДАЧА. В группе 30 человек. Необходимо выбрать старосту, его заместителя и профорга. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Нужно выполнить три действия: 1) выбрать старосту; 2) выбрать заместителя; 3) выбрать профорга. Первое действие можно сделать 30 способами. После того, как староста выбран, заместителя выбирают из оставшихся 29 человек, поэтому второе действие можно выполнить 29 способами. Аналогично третье действие можно выполнить 28 способами. По правилу умножения, общее число способов выбора старосты, его заместителя и профорга равно $30 \cdot 29 \cdot 28 = 24360$.

ЗАДАЧА. Три почтальона должны разнести 4 писем по 4 адресам. Сколькими способами они могут распределить эту работу?

Решение. Требуется выполнить 4 действия: 1) отнести первое письмо; 2) отнести второе письмо; 3) отнести третье письмо; 4) отнести четвертое письмо. Каждое из этих действий может быть выполнено любым из трех почтальонов, то есть тремя способами. Следовательно, по принципу умножения все четыре действия вместе могут быть выполнены $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$ способами.

Принцип сложения. Если два действия взаимно исключают друг друга, причем одно из них можно выполнить n способами, а другое – k способами, то выполнить одно любое из этих действий можно $n + k$ способами.

Это правило легко распространить на любое конечное число действий.

ЗАДАЧА. Имеется 20 шаров красного цвета и 30 шаров белого цвета. Нужно выбрать два шара одного цвета. Сколькими способами можно это сделать, если учитывается порядок выбора шаров?

Решение. Два шара одного цвета будут выбраны, если будет выполнено одно из двух взаимно исключающих друг друга действия: первое действие – выбрать два красных шара, второе действие – выбрать два белых шара. Согласно принципу умножения выбрать два красных шара можно $20 \cdot 19 = 380$ способами, аналогично выбрать два белых шара можно $30 \cdot 29 = 870$ способами. Поскольку эти два действия взаимно исключают друг друга, то по принципу сложения выполнить одно из них, то есть выбрать два шара одного цвета можно $380 + 870 = 1250$ способами.

Пусть дана генеральная совокупность объема n. Выборки из генеральной совокупности производятся не произвольным образом, а по правилам, которые определяются условиями поставленной задачи. В зависимости от этих правил выборки делятся на размещения, сочетания и перестановки.

Определение. Конечное множество, содержащее n элементов, называется ***упорядоченным***, если каждому элементу этого множества поставлено в соответствие одно и только одно из чисел $1, 2, \ldots, n$, то есть все элементы этого множества пронумерованы.

Из этого определения следует, что если поменять местами хотя бы два разных элемента упорядоченного множества, получится другое упорядоченное множество. Например, слово – упорядоченное множество. Слова «кот» и «ток» имеют разный смысл, хотя состоят из одних и тех же букв. Номер машины тоже представляет собой упорядоченное множество.

Пусть дано множество, состоящее из n различных элементов.

Определение. ***Размещением без повторений из n элементов по k*** ($0 < k \le n$) называется любое упорядоченное подмножество данного множества, содержащее k элементов.

Из определения вытекает, что размещения – это выборки объема k, отличающиеся друг от друга либо составом элементов, либо порядком их расположения. Число размещений из n элементов по k обозначается через A_n^k и вычисляется по формуле

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

ЗАДАЧА. Номер машины содержит разные нечетные цифры. Сколько таких номеров машин?

Решение. Генеральную совокупность образуют числа: 1, 3, 5, 7, 9; поэтому ее объем равен пяти. Выборочная совокупность является размещением без повторений, ее объем равен трем. Следовательно, количество таких номеров машин равно числу размещений из пяти элементов по три: $A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$.

ЗАДАЧА. Студенту необходимо сдать три различных экзамена в течение шести дней. В день разрешается сдавать не более одного экзамена. Сколькими способами можно организовать сдачу экзаменов?

Решение. Объем генеральной совокупности равен шести, объем выборочной совокупности равен трем. Выборка является размещением без повторений. Следовательно, искомое число способов равно числу размещений из 6 элементов по 3: $A_6^3 = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = 4 \cdot 5 \cdot 6 = 120$.

Определение. Упорядоченное множество из n элементов называется ***перестановкой без повторений*** этого множества.

Другими словами, перестановка множества из n элементов – это размещение из n элементов по n, то есть перестановка представляет собой частный случай размещения, когда объем генеральной совокупности совпадает с объемом выборочной совокупности.

Согласно последнему определению, различные перестановки из n элементов отличаются лишь порядком расположения элементов. Число перестановок без повторений из n элементов обозначается символом P_n и вычисляется по формуле

$$P_n = n!.$$

ЗАДАЧА. Сколькими способами можно расставить на полке 5 различных книг?

Решение. Искомое число способов равно числу перестановок без повторений из 5 элементов, то есть $P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

ЗАДАЧА. Сколькими способами можно расставить 9 различных книг на полке так, чтобы определенные 4 книги стояли рядом?

Решение. Выделенные 4 книги будем считать за одну. Шесть различных книг можно расставить на полке $P_6 = 6! = 720$ способами (смотрите предыдущую задачу). Но 4 выделенные книги можно переставить между собой $P_4 = 4! = 24$ способами. По правилу умножения искомое число способов равно $P_6 \cdot P_4 = 720 \cdot 24 = 17280$.

<u>Определение</u>. ***Сочетанием без повторений из*** n ***элементов по*** k $(0 < k \le n)$ называется любое подмножество, которое содержит k элементов данного множества.

Из определения вытекает, что сочетания – это выборки, которые отличаются только составом элементов. Число сочетаний без повторений из n элементов *по* k обозначается C_n^k и вычисляется по формуле:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

ЗАДАЧА. В шахматном турнире участвуют 16 человек. Сколько партий должно быть сыграно в турнире, если между любыми двумя участниками должна быть сыграна одна партия?

Решение. Объем генеральной совокупности равен 16, объем выборки равен 2. Выборки – пары игроков отличаются только составом участников, поэтому в турнире должно быть сыграно C_{16}^2 партий. Вычислим:

$$C_{16}^2 = \frac{16!}{2!(16-2)!} = \frac{16!}{2!(16-2)!} = \frac{16!}{2!14!} = \frac{15 \cdot 16}{2} = 120.$$

ЗАДАЧА. В вазе 10 красных и 4 розовых гвоздики. Сколькими способами можно выбрать 1 красную гвоздику и две розовых?

Решение. Требуется выполнить два действия: 1)выбрать одну красную гвоздику из 10; 2) выбрать 2 розовых гвоздики из 4. Так как порядок выбора цветов не имеет значения, то первое действие можно выполнить $C_{10}^1 = \frac{10!}{1!(10-1)!} = \frac{10!}{9!} = 10$ способами, второе действие можно выполнить $C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{3 \cdot 4}{2!} = 6$ способами. По принципу умножения оба эти действия можно выполнить $C_{10}^1 \cdot C_4^2 = 60$ способами.

Коэффициенты C_n^k называются ***биномиальными коэффициентами***, так как они входят в формулу ***бинома Ньютона***

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, a^k \, b^{n-k}.$$

При решении комбинаторных задач часто удобно использовать следующие свойства биномиальных коэффициентов:

1. $C_n^k = C_n^{n-k}$;

2. для $1 \le k < n$ имеет место равенство Паскаля:

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k;$$

3. $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \ldots + C_n^n = 2^n$.

ЗАДАЧА. В аудитории 10 ламп. Сколькими способами она может быть освещена?

Решение. Существуют 11 взаимно исключающих друг друга случаев. Первый случай – ни одна лампа не горит. Этому случаю соответствует C_{10}^0 способов освещения аудитории. Второй случай – горит одна лампа из 10 имеющихся; этому случаю соответствует C_{10}^1 способов освещения аудитории. Третий случай – горит 2 лампы из 10; этому случаю соответствует C_{10}^2 способов освещения аудитории и так далее. Наконец, все лампы могут гореть, этому случаю соответствует C_{10}^{10} способов осветить аудиторию. Тогда по правилу сложения число различных способов осветить аудиторию равно

$$C_{10}^0 + C_{10}^1 + C_{10}^2 + \ldots + C_{10}^{10} = 2^{10} = 1024.$$

Существуют две схемы выбора k элементов ($0 < k \le n$) из исходного множества, содержащего n элементов: без возвращения и с возвращением. В ***схеме выбора без возвращения*** выбранные элементы не возвращаются обратно; можно отобрать сразу все k элементов или последовательно отбирать их по одному. В ***схеме выбора с возвращением*** выбор осуществляется поэлементно, причем каждый отобранный элемент перед отбором следующего элемента возвращается в генеральную совокупность.

Если отбор элементов осуществляется по схеме выбора без возвращения, получаются рассмотренные выше выборки: размещения без повторений, перестановки без повторений, сочетания без повторений. При отборе элементов по схеме выбора с возвращением получаются размещения с повторениями, перестановки с повторениями, сочетания с повторениями.

Определение. Если при отборе k элементов из n элементы возвращаются обратно и упорядочиваются, то получившиеся выборки называются ***размещениями с повторениями из*** n ***элементов по*** k.

Размещения с повторениями могут отличаться друг от друга элементами, порядком их расположения и количеством повторений элементов. Число размещений без повторений из n элементов по k обозначается $\overline{A}_n^k$ и вычисляется по формуле

$$\overline{A}_n^k = n^m.$$

ЗАДАЧА. В конкурсе по 5 номинациям участвуют 10 кинофильмов. Сколько существует вариантов распределения призов, если по каждой номинации установлены различные премии?

Решение. Каждый из вариантов распределения призов представляет собой выборку 5 фильмов из 10, отличающуюся от других выборок как составом, так и их порядком. Каждый фильм может получить призы как по одной, так и по нескольким номинациям. Поэтому число таких выборок равно числу размещений с повторениями из 10 элементов по 5:

$$\overline{A}_{10}^5 = 10^5 = 100000.$$

Определение. Если при отборе k элементов из n элементы возвращаются обратно без последующего упорядочивания, то получившиеся выборки называются ***сочетаниями с повторениями из*** n ***элементов по*** k. Число сочетаний из n элементов по k обозначается $\overline{C}_n^k$ и вычисляется по формуле:

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}.$$

ЗАДАЧА. Сколькими способами можно выбрать 6 одинаковых или разных пирожных в кондитерской, где есть 11 разных сортов пирожных?

Решение. Объем генеральной совокупности равен 11, объем выборочной равен 6. Выборка является сочетанием с повторениями, поскольку порядок следования элементов выборки не важен и элементы выборки могут повторяться. Следовательно, искомое число способов равно $\overline{C}_{11}^6 = C_{11+6-1}^6 = C_{16}^6 = \frac{16!}{6!(16-6)!} = \frac{16!}{6!\cdot 10!} = 8008.$

ЗАДАЧА. В конкурсе по 5 номинациям участвуют 10 кинофильмов. Сколько существует вариантов распределения призов, если по каждой номинации установлены одинаковые премии?

Решение. Если по каждой номинации установлены одинаковые премии, то порядок фильмов в выборке 5 призов значения не имеет, поэтому искомое число вариантов равно $\overline{C}_{10}^{5} = C_{10+5-1}^{5} = C_{14}^{5}$ =2002.

<u>Определение</u>. Пусть во множестве с n элементами есть l различных элементов, при этом первый элемент повторяется n_1 раз, второй элемент – n_2 раз, и так далее, l-ый элемент – n_l раз, причем выполняется условие $n_1 + n_2 + \ldots + n_l = n$. Перестановки из n элементов данного множества называются ***перестановками с повторениями*** из n элементов.

Число перестановок с повторениями из n элементов обозначается символом $P_n(n_1, n_2, \ldots, n_l)$ и вычисляется по формуле:

$$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_l) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_l!}.$$

ЗАДАЧА. Сколько различных пятизначных чисел можно составить из цифр 3, 3, 5, 5, 8?

Решение. Здесь $n = 5$, $n_1 = 2$, $n_2 = 2$, $n_3 = 1$. Искомое количество пятизначных чисел равно $P_5(2,2,1) = \frac{5!}{2! \cdot 2! \cdot 1!} = 30$.

ЗАДАЧА. Сколько разных «слов» можно получить с помощью букв А, А, К, Л, И, И, И разрезной азбуки?

Решение. Аналогично $n = 7$, $n_1 = 3$, $n_2 = 2$, $n_3 = 1$, $n_4 = 1$. Искомое число перестановок с повторениями равно:

$$P_7(3,2,1,1) = \frac{7!}{3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!} = 420.$$

<u>Замечание</u>. При больших n удобна формула Стирлинга:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n}.$$

Формулы для вычисления числа размещений и сочетаний можно применять и при решении задач комбинаторики, описываемых в несколько отличных от приведенных выше постановках.

В частности, при распределении частиц по ячейкам:

1) число способов, которыми можно заполнить n разных ячеек k разными частицами, причем в каждой ячейке может находиться не более одной частицы, равно A_n^k;

2) число способов, которыми можно заполнить n разных ячеек k одинаковыми частицами, причем в каждой ячейке может находиться не более одной частицы, равно C_n^k;

3) число способов, которыми можно заполнить n разных ячеек k разными частицами, причем в каждой ячейке может находиться любое число частиц, равно $\overline{A}_n^k$;

4) число способов, которыми можно заполнить n разных ячеек k одинаковыми частицами, причем в каждой ячейке может находиться любое число частиц, равно $\overline{C}_n^k$.