ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

ЛЕКЦИЯ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ТЕМА 1: ВВЕДЕНИЕ В ПРЕДМЕТ. ИСТОРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Лектор: Подберезина Е.И.
2010 год

ВВЕДЕНИЕ

При решении различных физических и технических задач часто приходится встречаться со случайными явлениями. *Случайным явлением* называется явление, которое при неоднократном воспроизведении одного и того же опыта протекает каждый раз несколько по-иному.

Приведем примеры случайных явлений.

1. Производится стрельба из орудия, установленного под заданным углом к горизонту. Пользуясь методами внешней баллистики, можно найти теоретическую траекторию снаряда, которая вполне определяется условиями стрельбы (начальной скоростью снаряда, углом бросания и баллистическим коэффициентом снаряда). Фактическая траектория каждого отдельного снаряда неизбежно несколько отклоняется от теоретической за счет совокупного влияния многих факторов (например: ошибки изготовления снаряда, отклонение веса заряда от номинала, неоднородность структуры заряда, ошибки установки ствола в заданное положение, метеорологические условия).

2. Одно и то же тело несколько раз взвешивается на аналитических весах. Результаты повторных взвешиваний несколько отличаются друг от друга вследствие влияния многих второстепенных факторов, сопровождающих операцию взвешивания, среди которых положение тела на чашке весов, случайные вибрации аппаратуры, ошибки отсчета показаний прибора.

3. Самолет совершает полет на заданной высоте. Теоретически он летит горизонтально, равномерно и прямолинейно. Фактически полет сопровождается отклонениями центра массы самолета от теоретической траектории и колебаниями самолета около центра массы. Эти отклонения и колебания являются случайными и связаны с турбулентностью атмосферы.

4. Производится ряд подрывов осколочного снаряда в определенном положении относительно цели. Результаты отдельных подрывов отличаются друг от друга: меняется общее число осколков, взаимное расположение их траекторий, вес, форма и скорость каждого осколка. Эти изменения случайны и связаны с влиянием таких факторов, как неоднородность металла корпуса снаряда, неоднородность взрывчатого вещества, непостоянство скорости детонации. Поэтому различные подрывы, осуществленные, казалось бы, в одинаковых условиях, могут

приводить к разным результатам: в одних подрывах цель будет поражена осколками, в других – нет.

Во всех рассмотренных примерах подчеркнуты случайные вариации, неодинаковые результаты ряда опытов, основные условия которых остаются неизменными. Эти вариации всегда связаны с наличием второстепенных факторов, влияющих на исход опыта, но не заданных в числе его основных условий. Основные условия опыта, определяющие в общих чертах его протекание, сохраняются неизменными; второстепенные – меняются от опыта к опыту и вносят случайные различия в их результаты.

Должна существовать принципиальная разница в методах учета основных, решающих факторов, определяющих в главных чертах течение явления, и вторичных, второстепенных факторов, влияющих на течение явления в качестве «погрешностей» или «возмущений». Элемент неопределенности, сложности, многопричинности, присущий случайным явлениям, требует создания специальных методов для изучения этих явлений.

Такие методы разрабатываются в теории вероятностей. Ее предметом являются специфические закономерности, наблюдаемые в случайных явлениях.

Практика показывает, что, наблюдая в совокупности массы однородных случайных явлений, мы обычно обнаруживаем в них вполне определенные закономерности, своего рода устойчивости, свойственные именно массовым случайным явлениям.

Приведем примеры.

1. В сосуде заключен некоторый объем газа, состоящий из весьма большого числа молекул. Каждая молекула за секунду испытывает множество столкновений с другими молекулами, многократно меняет скорость и направление движения; траектория каждой отдельной молекулы случайна. Известно, что давление на стенку сосуда обусловлено совокупностью ударов молекул об эту стенку. Казалось бы, если траектория каждой отдельной молекулы случайна, то и давление на стенку сосуда должно было бы изменяться случайным и неконтролируемым образом; однако это не так. Если число молекул достаточно велико, то давление газа практически не зависит от траекторий отдельных молекул и подчиняется вполне определенной и очень простой закономерности. Случайные особенности, свойственные движению каждой отдельной молекулы, в массе взаимно компенсируются. В результате, несмотря на сложность и запутанность отдельного случайного явления, получается весьма простая закономерность, справедливая для массы случайных яв-

лений. Подчеркнем, что именно массовость случайных явлений обеспечивает выполнение этой закономерности.

2. Если много раз подряд бросать монету, частота появлений герба (отношение числа появившихся гербов к общему числу бросаний) постепенно стабилизируется, приближаясь к вполне определенному числу, именно к 0,5.

3. По мишени производится один за другим ряд выстрелов; наблюдается распределение точек попадания на мишени. При ограниченном числе выстрелов точки попадания распределяются по мишени в полном беспорядке, без какой-либо видимой закономерности. По мере увеличения числа выстрелов в расположении точек попадания начинает наблюдаться некоторая закономерность. Эта закономерность проявляется тем отчетливее, чем большее количество выстрелов произведено. Расположение точек попадания оказывается приблизительно симметричным относительно некоторой центральной точки: в центральной области группы пробоин расположены гуще, чем по краям; при этом густота пробоин убывает по вполне определенному закону (именно, по закону Гаусса или нормальному закону).

Подобные специфические закономерности проявляются всегда, когда мы имеем дело с массой однородных случайных явлений. Закономерности, проявляющиеся в этой массе, оказываются практически независимыми от индивидуальных особенностей отдельных случайных явлений, входящих в массу. Эти отдельные особенности в массе как бы взаимно погашаются, нивелируются, и средний результат массы случайных явлений оказывается практически уже неслучайным. Именно эта многократно подтвержденная опытом устойчивость массовых случайных явлений и служит базой для применения вероятностных (статистических) методов исследования. Методы теории вероятностей по природе приспособлены только для исследования массовых случайных явлений; они не дают возможности предсказать исход отдельного случайного явления, но дают возможность предсказать средний суммарный результат массы однородных случайных явлений, предсказать средний исход массы аналогичных опытов, конкретный исход каждого из которых остается неопределенным, случайным.

Изучение законов, управляющих массами случайных явлений, позволяет не только осуществлять научный прогноз в своеобразной области случайных явлений, но в ряде случаев помогает целенаправленно влиять на ход случайных явлений, ограничивать сферу действия случайности, сужать ее влияние на практику.

Вероятностный или статистический метод в науке не противопоставляет себя классическому методу точных наук, а является его дополнением, позволяющим глубже анализировать явление с учетом присущих ему элементов случайности.

В настоящее время нет почти ни одной естественной науки, в которой так или иначе не применялись бы вероятностные методы. Целые разделы современной физики (в частности, ядерная физика) базируются на методах теории вероятностей. Все шире применяются вероятностные методы в современной электротехнике и радиотехнике, метеорологи и астрономии, теории автоматического регулирования и машинной математике.

Обширное поле применения находит теория вероятностей в разнообразных областях военной техники: теория стрельбы и бомбометания, теория боеприпасов, теория прицелов и приборов управления огнем, аэронавигация, тактика и множество других разделов военной науки широко пользуются методами теории вероятностей и ее математическим аппаратом.

ИСТОРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Подобно другим математическим наукам, теория вероятностей развилась из практики.

Начало систематического исследования задач, относящихся к массовым случайным явлениям, и появление соответствующего математического аппарата относится к XVII веку. В начале XVII века знаменитый физик Галилей уже пытался подвергнуть научному исследованию ошибки физических измерений, рассматривая их как случайные и оценивая их вероятности. К этому же времени относятся первые попытки создания общей теории страхования, основанной на анализе закономерностей в таких массовых случайных явлениях, как заболеваемость, смертность, статистика несчастных случаев и так далее.

Однако как математическая наука теория вероятностей сформировалась, в основном, не на материале указанных выше практических задач. Эти задачи слишком сложны; в них законы, управляющие случайными явлениями, проступают недостаточно отчетливо и затушеваны многими осложняющими факторами. Сначала необходимо было изучить закономерности случайных явлений на более простом материале. Таким материалом исторически оказались азартные игры. Эти игры с незапамятных времен создавались рядом поколений именно так, чтобы в них исход опыта был независим от поддающихся наблюдению условий опыта, был чисто случайным. Само слово «азарт» (фр.) означает «случай». Схемы азартных игр дают исключительные по простоте и прозрачности модели случайных явлений, позволяющие в наиболее отчетливой форме наблюдать и изучать управляющие ими специфические законы, а возможность неограниченно повторять один и тот же опыт обеспечивает экспериментальную проверку этих законов в условиях действительной массовости явлений. Вплоть до настоящего времени примеры из области азартных игр и аналогичные им задачи на «схему урн» широко употребляются при изучении теории вероятностей как упрощенные модели случайных явлений, иллюстрирующие в наиболее простом и наглядном виде основные законы и правила теории вероятностей.

Возникновение теории вероятностей в современном смысле слова относится к середине XVII века и связано с исследованиями Паскаля (1623–1662), Ферма (1601–1665) и Гюйгенса (1629–1695) в области теории азартных игр. В этих работах постепенно сформировались такие важные понятия, как вероятность и математическое ожидание; были установлены их основные свойства и приемы их вычисления. Непосредственное практическое применение вероятностные методы нашли прежде всего в задачах страхования. С тех пор теория вероятностей находит все более широкое применение в различных областях.

Крупный шаг в развитии теории вероятностей связан с работами Якова Бернулли (1654–1705). Ему принадлежит первое доказательство одного из важнейших положений теории вероятностей – закона больших чисел. Еще до Якова Бернулли многие отмечали как эмпирический факт ту особенность случайных явлений, которую называют «свойством устойчивости частот при большом числе опытов». Было неоднократно отмечено, что при большом числе опытов, исход каждого из которых является случайным, относительная частота появления данного исхода имеет тенденцию стабилизироваться, приближаясь к некоторому определенному числу –вероятности этого исхода. Яков Бернулли впервые дал теоретическое обоснование этому эмпирическому факту. Теорема Якова Бернулли – простейшая форма закона больших чисел – устанавливает связь между вероятностью события и частотой его появления; при достаточно большом числе опытов можно с практической достоверностью ожидать сколь угодно близкого совпадения частоты с вероятностью.

Другой важный этап в развитии теории вероятностей связан с именем Моавра (1667–1754). Этот ученый впервые ввел в рассмотрение и для простейшего случая обосновал закон, очень часто наблюдаемый в случайных явлениях: так называемый нормальный закон (закон Гаусса). Нормальный закон играет исключительно важную роль в случайных явлениях. Теоремы, обосновывающие этот закон для тех или иных условий, носят в теории вероятностей общее название «центральной предельной теоремы».

Стройное и систематическое изложение основ теории вероятностей впервые дал знаменитый математик Лаплас (1749–1827). Он доказал одну из форм центральной предельной теоремы (теоремы Моавра – Лапласа) и развил ряд замечательных приложений теории вероятностей к вопросам практики, в частности, к анализу ошибок наблюдений и измерений.

Значительный шаг вперед в развитии теории вероятностей связан с именем Гаусса (1777–1855), который дал еще более общее обоснование нормальному закону и разработал метод обработки экспериментальных данных, известный под названием «метода наименьших квадратов». Следует отметить работы Пуассона (1781–1840), доказавшего более общую, чем у Якова Бернулли, форму закона больших чисел, а также впервые применившего теорию вероятностей к задачам стрельбы. С именем Пуассона связан один из законов распределения, играющий большую роль в теории вероятностей и ее приложениях.

Для всего XVIII и начала XIX века характерны бурное развитие теории вероятностей и повсеместное увлечение ею. Теория вероятностей становится «модной» наукой. Ее начинают применять не только там, где применение правомерно, но и там, где оно ничем не оправдано. Для этого периода характерны многочисленные попытки применить теорию вероятностей к изучению общественных явлений, к так называемым «моральным» или «нравственным» наукам. Во множестве появились работы, посвященные вопросам судопроизводства, истории, политики, даже богословия, в которых применялся аппарат теории вероятностей. Для всех этих псевдонаучных исследований характерен чрезвычайно упрощенный, механический подход к рассматриваемым в них общественным явлениям. В основу рассуждения полагаются некоторые произвольно заданные вероятности (например, при рассмотрении вопросов судопроизводства склонность каждого человека к правде или лжи оценивается некоторой постоянной, одинаковой для всех людей вероятностью), и далее общественная проблема решается как простая арифметическая задача.

Естественно, что все подобные попытки были обречены на неудачу и не могли сыграть положительной роли в развитии науки. Напротив, их косвенным результатом оказалось то, что примерно в двадцатых – тридцатых годах XIX века в Западной Европе повсеместное увлечение теорией вероятностей сменилось разочарованием и скептицизмом. На теорию вероятностей стали смотреть как на науку сомнительную, второсортную, род математического развлечения, вряд ли достойный серьезного изучения.

Замечательно, что именно в это время в России создается та знаменитая Петербургская математическая школа, трудами которой теория вероятностей была поставлена на прочную логическую и математическую основу и сделана надежным, точным и эффективным методом познания. Со времени появления этой школы развитие теории вероятностей уже тесным образом связано работами русских, а в дальнейшем – советских ученых.

Среди ученых Петербургской математической школы следует назвать В. Я. Буняковского (1804–1889) – автора первого курса теории вероятностей на русском языке, создателя современной русской терминологии в теории вероятностей, автора оригинальных исследований в области статистики и демографии.

Учеником В. Я. Буняковского был великий русский математик П. Л. Чебышев (1821–1894), которому принадлежит дальнейшее расширение и обобщение закона больших чисел. Кроме того, П. Л. Чебышев ввел в теорию вероятностей весьма мощный и плодотворный метод моментов.

Учеником П. Л. Чебышева был А. А. Марков (1856–1922), который существенно расширил область применения закона больших чисел и центральной предельной теоремы, распространив их не только на независимые, но и на зависимые опыты. Важнейшей заслугой А. А. Маркова явилось то, что он заложил основы совершенно новой ветви теории вероятностей – теории случайных, или «стохастических», процессов. Развитие этой теории составляет основное содержание новейшей, современной теории вероятностей.

Учеником П. Л. Чебышева был и А. М. Ляпунов (1857–1918), с именем которого связано первое доказательство центральной предельной теоремы при чрезвычайно общих условиях. Для доказательства своей теоремы А. М. Ляпунов разработал специальный метод характеристических функций, широко применяемый в современной теории вероятностей.

Характерной особенностью работ Петербургской математической школы была исключительная четкость постановки задач, полная математическая строгость применяемых методов и наряду с этим тесная связь теории с непосредственными требованиями практики. Трудами ученых Петербургской математической школы теория вероятностей была выведена с задворков науки и поставлена как полноправный член в ряд точных математических наук. Условия применения ее методов были строго определены, а самые методы доведены до высокой степени совершенства.

Советская школа теории вероятностей, унаследовав традиции Петербургской математической школы, занимает в мировой науке ведущее место. Назовем только некоторых крупнейших советских ученых, труды которых сыграли решающую роль в развитии современной теории вероятностей и ее практических приложений.

С. Н. Бернштейн разработал первую законченную аксиоматику теории вероятностей, а также существенно расширил область применения предельных теорем.

А. Я. Хинчин (1894–1959) известен своими исследованиями в области дальнейшего обобщения и усиления закона больших чисел, но главным образом своими исследованиями в области стационарных случайных процессов.

Ряд важнейших основополагающих работ в различных областях теории вероятностей и математической статистики принадлежит А. Н. Колмогорову. Он дал наиболее совершенное аксиоматическое построение теории вероятностей, связав ее с одним из важнейших разделов современной математики – метрической теорией функций. Особое значение работы А. Н. Колмогорова имеют в области теории случайных функций (стохастических процессов), которые в настоящее время являются основой всех исследований в данной области. Работы А. Н. Колмогорова, относящиеся к оценке эффективности легли в основу целого нового научного направления в теории стрельбы, переросшего затем в более широкую науку об эффективности боевых действий.

В. И. Романовский и Н. В. Смирнов известны своими работами в области математической статистики, Е. Е. Слуцкий – в теории случайных процессов, Б. В. Гнеденко – в области теории массового обслуживания, Е. Б. Дынкин – в области марковских случайных процессов, В. С. Пугачев – в области случайных процессов в применении к задачам автоматического управления.

Развитие зарубежной теории вероятностей в настоящее время также идет усиленными темпами в связи с настоятельными требованиями практики. Преимущественным вниманием пользуются, как и у нас, вопросы, относящиеся к случайным процессам. Значительные работы в этой области принадлежат Н. Винеру, В. Феллеру, Д. Дубу. Важные работы по теории вероятностей и математической статистике принадлежат Р. Фишеру, Д. Нейману и Г. Крамеру.