Домашнее задание по теме: «Интегрирование линейных дифференциальных уравнений с помощью формулы Дюамеля. Интегрирование систем дифференциальных уравнений. Решение интегральных уравнений Вольтерра»

1) $x'' + x = \dfrac{1}{3+\cos^2 t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

Ответ: $x(t) = \dfrac{1}{4}\sin t \cdot \ln\left(\dfrac{2+\sin t}{2-\sin t}\right) + \dfrac{\cos t}{\sqrt{3}} \cdot \left(arctg\dfrac{\cos t}{\sqrt{3}} - \dfrac{\pi}{6}\right).$

2) $x'' - x' - 2 = \dfrac{e^{2t}}{(1+e^t)^2}, \quad x(0) = 2, \quad x'(0) = -2.$

Ответ: $x(t) = \dfrac{e^t - 1}{2} + \ln 2 - \ln(1+e^t) + 2 - 2t.$

3) $\begin{cases} x' - y' - 2x + 2y = 1 - 2t \\ x'' + 2y' + x = 0 \end{cases} \qquad x(0) = y(0) = x'(0) = 0.$

Ответ: $x(t) = 2(1 - e^{-t} - te^{-t}), \quad y(t) = 2 - t - 2e^{-t} - 2te^{-t}$

4) $\begin{cases} 2x'' - x' + 9x - y'' - y' - 3y = 0 \\ 2x'' + x' + 7x - y'' + y' - 5y = 0 \end{cases} \qquad x(0) = x'(0) = 1, \quad y(0) = y'(0) = 0.$

Ответ: $x(t) = \dfrac{1}{3}(e^t + 2\cos 2t + \sin 2t), \quad y(t) = \dfrac{2}{3}(e^t - \cos 2t - 0{,}5\sin 2t)$

5) $y(x) = x + \dfrac{1}{2} \cdot \int\limits_0^x (x-t)^2 \cdot y(t)dt$

Ответ: $y(x) = \dfrac{1}{3}\left(e^{-x} - e^{-x/2} \cdot \cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \sqrt{3} \cdot e^{-x/2} \cdot \sin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right).$

6) $\int\limits_0^x e^{2(x-t)} \cdot y(t)dt = x^2 \cdot e^x$

Ответ: $y(x) = e^x(2x - x^2).$