§1 Задачи, приведшие к возникновению вариационного исчисления

Одна из задач дифф-го исчисления – найти значения переменной x при к-х ф-я $f(x)$ имеет max или min

Вариационное исчисление также явл-ся теорией максимума и минимума, в которой, однако переменные и ф-ии имеют более сложную структуру

Рассмотрим некоторые из задач, к-е привели к появлению вар-го исчисления

1) <u>Задача о геодезических</u>

Пусть (S) – поверхность
A, B – точки на пов-ти (S)

Что представляет собой кривая наименьшей длины, соединяющая A и B?
(такие кривые называют геодезическими)

Обозначим ч/з ℓ независимую переменную
По условию задачи областью изменения ℓ явл-ся класс кривых, соединяющих A и B и лежащих на (S)

Обозначим ч/з $I(\ell)$ длину кривой ℓ
Тогда

$$I(\ell) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}\, dt$$

где $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ – параметрические ур-я кривой ℓ,
t_1, t_2 – значения параметра, соответствующие т-кам A и B

$\Rightarrow$ задача состоит в том, чтобы найти среди допустимых троек функций $x(t), y(t), z(t)$ такие, для к-х интеграл $I(\ell)$ принимает наименьшее значение

2 Задача о брахистохроне

Это та задача, которой вариационное исчисление обязано своим появлением. Считается, что в 1696 г Иоганн Бернулли поставил перед своими учениками след задачу:

Даны две т-ки A и B в вертикальной плоскости. Найти путь, по которому двигающаяся частица опускаясь под действием силы тяжести попадёт из A в B за кратчайшее время

Предположим, что т-ки A и B лежат в пл-ти xOy, с осью y, направленной вниз

Пусть ℓ - кривая, соединяющая A и B

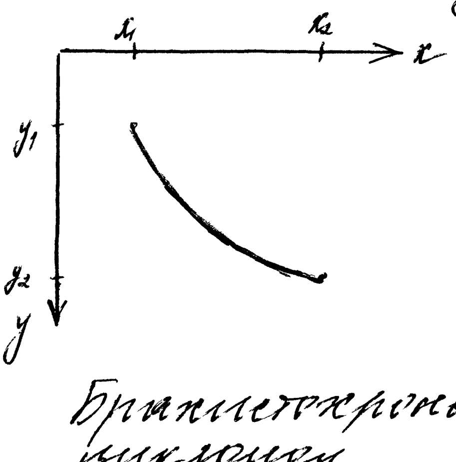
$y(x)$ - ур-е кривой ℓ

$A = A(x_1, y_1)$, $B = B(x_2, y_2)$

Пусть $I(\ell)$ - время спуска частицы по кривой ℓ

Тогда

$$I(\ell) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y-\alpha}}\, dx, \quad \text{где } \alpha = y_1 - \frac{(v_1)^2}{2g}$$



$\Rightarrow$ необходимо найти среди гладких ф-й, удовлетворяющих усл-ю $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$ такую, что интеграл $I(y)$ принимает наименьшее значение

Брахистохрона представляет собой циклоиду

(брахистохрона - от гр слов „кратчайший" и „время")

3. Задача о наименьшей поверхности вращения

Пусть $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ - точки пл-ти xOy

l - кривая, соединяющая A и B

$y=y(x)$ - ур-е кривой l

Пусть l вращается вокруг Ox, образуя некоторую пов-ть S

Что представляет собой поверхность вращения, имеющая наименьшую возможную площадь

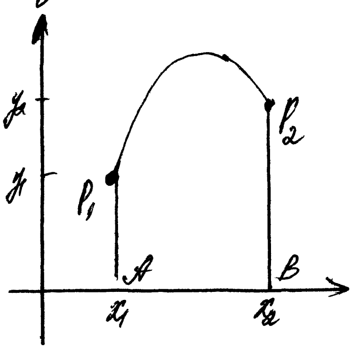
Т.к. площадь пов-ти вращения, образованной кривой $y(x)$ находится по ф-ле

$$S(y)=\int_{x_1}^{x_2} 2\pi y\sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

то задача сводится к нахождению ф-ии $y(x)$ такой, что $y(x_1)=y_1$, $y(x_2)=y_2$ и интеграл $S(y)$ принимает наименьшее значение

4. Изопериметрическая задача

Это классическая задача, формулировка к-й приписывается карфагенской царице Дидо (задача Дидоны, из „Энеиды" Вергилия) ≈ 850 г. до Р.Х.



Требуется среди всех гладких кривых длины L, соединяющих точки P_1 и P_2 ($L>|P_1P_2|$), найти ту, для которой площадь криволинейной трапеции AP_1P_2B будет наибольшей

Если положить, что $P_1 = P_1(x_1, y_1)$

$P_2 = P_2(x_2, y_2)$

$y(x)$ – ур-е ℓ $(y(x) > 0,\ \forall x \in [x_1, x_2])$

то задача сводится к нахождению ф-ии $y(x)$ т. что интеграл

$$S(y) = \int_{x_1}^{x_2} y\,dx$$

достигает наибольшего значения, а сама $y(x)$ при этом удовлетворяет условиям

$$y(x_1) = y_1,\quad y(x_2) = y_2,\quad \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+(y')^2}\,dx = L$$

Все описанные задачи можно охарактеризовать как задачи отыскания гладкой кривой $y = y(x)$, удовлетворяющей некоторым условиям, такой что интеграл типа

$$\int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\,dx$$

достигает наименьшего (наибольшего) значения. Т.е. это задачи нахождения наибольшего или наименьшего значения функционала

§ 2 Линейное нормированное пр-во. Метрическое пространство

Пусть L - линейное пространство над $\mathcal{F}$, где $\mathcal{F} = \mathbb{R}$ или $\mathcal{F} = \mathbb{C}$

Определение

Нормой в векторном пр-ве L наз-ся отображение

$$L \to \mathbb{R}$$
$$x \to \|x\|$$

удовлетворяющее условиям

1) $\|x\| \geq 0, \ \forall x \in L;$
   $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$
2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|, \ \forall x \in L, \forall \lambda \in \mathcal{F}$
3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \ \forall x, y \in L$
   (аксиома треугольника)

Число $\|x\|$ наз-ся нормой эл-та x

Линейное пр-во, на котором определена норма, наз-ся нормированным

Определение

Метрикой (расстоянием) на мн-ве X наз-ся функция

$$\underbrace{X \times X}_{\text{декартово произведение мн-ва } X} \to [0, +\infty)$$

$$(x, y) \to \rho(x, y)$$

удовлетворяющая условиям:

1) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (аксиома тождества)
2) $\rho(x, y) = \rho(y, x), \ \forall x, y \in X$ (аксиома симметрии)
3) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (аксиома треугольника) $\forall x, y, z \in X$

Мн-во X, на котором м б введена метрика, наз-ся метризуемым

Мн-во X, наделённое некоторой метрикой, называется метрическим пространством

Линейное нормированное пр-во явл-ся метрическим пространством. Расстояние в нем определяется ф-лой

$$\rho(x,y) = \|x-y\|$$

Действительно,

1) $\rho(x,y) = \|x-y\| \geq 0$, $\forall x,y \in L$

$\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x-y=0 \Leftrightarrow x=y$

2) $\rho(x,y) = \|x-y\| = \|(-1)(y-x)\| = |-1|\ \|y-x\| =$
$= \rho(y,x)$

3) $\rho(x,z) = \|x-z\| = \|(x-y)+(y-z)\| \leq \|x-y\|+\|y-z\| =$
$= \rho(x,y) + \rho(y,z)$

Примеры линейных нормированных пространств

1) В арифметическом линейном пр-ве $\mathbb{R}^n$ можно ввести норму след образом.

$$\|a\| = \sqrt{(\alpha_1)^2 + \ldots + (\alpha_n)^2}, \text{ где } a-(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$$

$\Rightarrow$ для вычисления расстояния получаем формулу

$$\rho(a,b) = \|a-b\| = \sqrt{(\alpha_1-\beta_1)^2 + \ldots + (\alpha_n-\beta_n)^2}$$

где $a=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, $b=(\beta_1,\ldots,\beta_n)$

2) В пр-ве $C[a,b]$ непрерывных на $[a,b]$ ф-й норма вводится след. образом:

$$\|y(x)\| = \max_{a \le x \le b} |y(x)|$$

При этом условия 1, 2, очевидно, выполняются. Проверим условие 3.
Пусть $y_1(x), y_2(x) \in C[a,b]$. Тогда $\forall x \in [a,b]$

$$|y_1(x) + y_2(x)| \le |y_1(x)| + |y_2(x)| \le \max |y_1(x)| + \max |y_2(x)|$$

$$\Rightarrow \max_{a \le x \le b} |y_1 + y_2(x)| \le \max_{a \le x \le b} |y_1(x)| + \max_{a \le x \le b} |y_2(x)|$$

(т.к непрерывная ф-я на $[a,b]$ достигает max на $[a,b]$)

$$\Rightarrow \|y_1(x) + y_2(x)\| \le \|y_1(x)\| + \|y_2(x)\|$$

При введённой таким образом норме для вычисления расстояния получаем ф-лу

$$\rho(y_1(x), y_2(x)) = \|y_1(x) - y_2(x)\| =$$
$$= \max_{a \le x \le b} |y_1(x) - y_2(x)|$$

3) Пусть $C_1[a,b]$ - мн-во непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ ф-й.
$C_1[a,b]$ - лин пр-во, причём $C_1[a,b] \subset C[a,b]$

Норма в пр-ве $C_1[a,b]$ вводится след. образом

$$\|y(x)\| = \underbrace{\max_{a \le x \le b} \{ \max_{x \in [a,b]} |y(x)|, \max_{x \in [a,b]} |y'(x)| \}}$$

$$\overset{\text{об}}{=} \max_{a \le x \le b} \{ |y(x)|, |y'(x)| \}$$

Тогда для вычисления расстояния получаем ф-лу

$$\rho(y_1(x), y_2(x)) = \max_{a \le x \le b} \{ |y_1(x) - y_2(x)|, |y_1'(x) - y_2'(x)| \}$$

4) Пусть $C_n[a,b]$ - мн-во n раз непр-но диффер-х на $[a,b]$ ф-й

$C_n[a,b]$ - лин. пр-во

причём

$$C_n[a,b] < C_{n-1}[a,b] < \dots < C_1$$

Норма в пр-ве $C_n[a,b]$ вводится след. образом:

$$\|y(x)\| = \max_{a \le x \le b} \{ |y(x)|, |y'(x)|, \dots, |y^{(n)}(x)| \}$$

$\Rightarrow$ расстояние определяется по ф-ле

$$\rho(y_1, y_2) = \max_{a \le x \le b} \{ |y_1(x) - y_2(x)|; |y_1'(x) - y_2'(x)|, \dots, |y_1^{(n)} - y_2^{(n)}| \} \quad (1)$$

Расстояние м/у ф-ми $y_1(x), y_2(x) \in C_n[a,b]$ наз-ют расстоянием n-го порядка ($n = 1, 2, \dots$)

Обозначают: $\rho_n(y_1(x), y_2(x))$

Расстояние м/у ф-ми $y_1(x), y_2(x) \in C[a,b]$ является в смысле этого определения расстоянием нулевого порядка

Примеры

1) Найти расстояние м/у ф-ми
$$y_1(x) = x, \quad y_2(x) = x^2 \quad на \quad [0;1]$$

Имеем
$$\rho(y_1, y_2) = \|y_1 - y_2\| = \max_{x\in[0,1]} |x - x^2| = \max_{x\in[0,1]} (x - x^2)$$
$$\left(|x - x^2| = x - x^2, \ \forall x \in [0,1] \right)$$

Найдём наибольшее значение ф-ии
$$y = x - x^2, \quad x \in [0;1]$$
Имеем:
а) $y'_x = 1 - 2x \Rightarrow y'_x = 0$ при $x = \frac{1}{2}$
б) $y(0) = 0$
$y(1) = 0$
$y(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} = y_{наиб}$

Т.О
$$\rho(x; x^2) = \frac{1}{4}$$

2) Найти расстояние 1-го порядка м/у ф-ми $y_1 = x^2$, $y_2(x) = x^3$ на $[0, 1]$

Имеем
$$\rho_1(x^2, x^3) = \|x^2 - x^3\| = \max_{x\in[0,1]} \{ |x^2 - x^3|, \underbrace{|2x - 3x^2|}_{|y_1' - y_2'|} \}$$

Найдём наибольшие значения ф-й
$$f(x) = |x^2 - x^3| = x^2 - x^3, \quad x \in [0;1]$$
$$g(x) = |2x - 3x^2|, \quad x \in [0, 1]$$

а) Имеем:

$$f'(x) = 2x - 3x^2$$

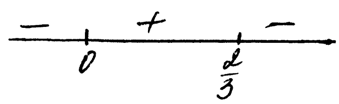
$$f'(x) = 0 \; : \; 2x - 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0, \quad x = \frac{2}{3}$$

$$f(0) = 0, \quad f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9} - \frac{8}{27} = \frac{4}{27}, \quad f(1) = 1 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow f_{наиб} = f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{27}$$

б) Расм $g(x) = |2x - 3x^2|$

$$2x - 3x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0, \; x_2 = \frac{2}{3}$$



$$\Rightarrow g(x) = \begin{cases} 2x - 3x^2, & x \in [0; 2/3] \\ 3x^2 - 2x, & x \in (2/3; 1] \end{cases}$$

$$\Rightarrow g'(x) = \begin{cases} 2 - 6x, & x \in [0; 2/3] \\ 6x - 2, & x \in (2/3, 1] \end{cases}$$

$$g'(x) = 0 \; ; \; 2 - 6x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \in \left[0; \frac{2}{3}\right]$$

Имеем.

$$g(0) = 0$$

$$g\left(\frac{1}{3}\right) = \left|\frac{2}{3} - \frac{3}{9}\right| = \frac{1}{3}$$

$$g(1) = |2 - 3| = 1$$

$$\Rightarrow g_{наиб} = g(1) = 1$$

Т.о получаем

$$\rho_1(x^2, x^3) = \max\left\{\frac{4}{27}; 1\right\} = 1.$$

Определение (в вариационном исчислении)
Пусть M – линейное нормированое пр-во функций (или его подмн-во)
Функция $M \to \mathbb{R}$
называется функционалом

Мн-во M наз-ют областью задания функционала

Зам. позднее функционалами стали наз-ть функции

$$\underbrace{L}_{\substack{\text{линейное}\\\text{нормированое}\\\text{пр-во}}} \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$$

В совр мат-ке под функционалом понимают любую ф-ию

$$\underbrace{X}_{\text{любое мн-во}} \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$$

Примеры

1) Пусть $y(x) \in C[0;1]$

$$J(y) = \int_0^1 y(x)\,dx \quad \text{– функционал}$$

2) Пусть $y(x) \in C_1[a;b]$, $x_0 \in [a,b]$

$$\left.\begin{aligned} J(y) &= y'(x_0) \\ J(y) &= \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx \end{aligned}\right\} \text{функционалы}$$

Определение

Пусть $\ell(x) \in C_n[a,b]$, $\varepsilon > 0$

ε-окрестностью n-го порядка кривой $y=\ell(x)$ наз-ся совокупность кривых $\varphi_\varepsilon(x) \in \mathcal{D}_n[a,b]$ для которых

$$\rho_n(\ell(x), \varphi_\varepsilon(x)) < \varepsilon$$

ε-окрестность нулевого порядка наз-ся сильной ε-окрестностью ф-ии $y=\ell(x)$

Сильная ε-окрестность кривой $y=\ell(x)$ состоит из кривых, расположенных в полоске шириной 2ε вокруг кривой $y=\ell(x)$

ε-окрестность 1-го порядка называют слабой ε-окрестностью ф-ии $y=\ell(x)$

ε-окрестность n-го порядка кривой $\ell(x)$ б обозначать $U_n(\ell(x), \varepsilon)$

Определение

Пусть $J[y(x)]$ - функционал с областью задания $C_n[a,b]$

$J[y(x)]$ наз-ся непрерывным (в точке $y_0(x)$) на (при) $y_0(x) \in C_n[a,b]$ в смысле близости n-го порядка, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ такое, что $\forall y(x) \in U_n(y_0(x), \delta)$, $y(x) \in C_n[a,b]$ выполняется н-во

$$|J[y(x)] - J[y_0(x)]| < \varepsilon$$

и функционал непрерывен при $\forall y_0(x) \in C_n[a,b]$ то говорят, что $J[y(x)]$ – непрерывный функционал на $C_n[a,b]$

Функционал, не являющийся непрерывным в смысле близости n-го порядка, будем называть разрывным в смысле указанной близости

Пример 1

Пусть $J[y(x)] : C_1[0,1] \to R$

$$J[y(x)] = \int_0^1 [y(x) + 2y'(x)]\,dx$$

Доказать, что $J[y(x)]$ непрерывен при $y(x) = x$ в смысле близости 1-го порядка

Решение

Пусть $\varepsilon > 0$. Док-м, что $\exists\, \delta > 0$ т., что

$$|J[y(x)] - J[x]| < \varepsilon$$

если

$$|y(x) - x| < \delta \quad и \quad |y'(x) - \underset{x'}{1}| < \delta$$

Имеем:

$$|J[y(x)] - J[x]| = \left| \int_0^1 [y(x) + 2y'(x)]\,dx - \int_0^1 [x+2]\,dx \right|$$

$$= \left| \int_0^1 [y(x) + 2y'(x) - x - 2]\,dx \right| \leq$$

$$\leq \int_0^1 |y(x) + 2y'(x) - x - 2|\,dx \leq$$

$$\leq \int_0^1 \big[|y(x) - x| + 2|y'(x) - 1|\big]\,dx =$$

$$= \int_0^1 |y(x) - x|\,dx + 2\int_0^1 |y'(x) - 1|\,dx$$

Положим $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$

Тогда из условия $|y(x) - x| < \frac{\varepsilon}{3}$, $|y'(x) - 1| < \frac{\varepsilon}{3}$

получим:

$$|J[y(x)] - J[x]| \le \int_0^1 |y(x) - x|\,dx + 2\int_0^1 |y'(x) - 1|\,dx$$

$$< \int_0^1 \frac{\varepsilon}{3}\,dx + 2\int_0^1 \frac{\varepsilon}{3}\,dx = \varepsilon$$

Т.О получили, что $J[y(x)]$ непрерывен на ф-ии $y(x) = x$ в смысле близости 1-го порядка

Очевидно, что он будет непрерывен на $\forall\, \tilde{y}(x) \in C_1[a,b]$

3) <u>Пример 2</u>

Пусть $J[y(x)] : C_1[a,b] \to \mathbb{R}$

$J[y(x)] = y'(x_0)$, где $x_0 \in [a,b]$

Доказать, что $J[y(x)]$ разрывен на $\forall\, \tilde{y}(x)$ в смысле близости 0-го порядка и непрерывен в смысле близости 1-го порядка

Решение

1) Требуется д-ть, что $\forall\, \tilde{y}(x) \in C_1[a,b]$ $\exists\, \varepsilon > 0$ такое, что $\forall\, \delta > 0$ найдётся $y(x) \in U_0(\tilde{y}(x), \delta)$ для которого выполняется н-во

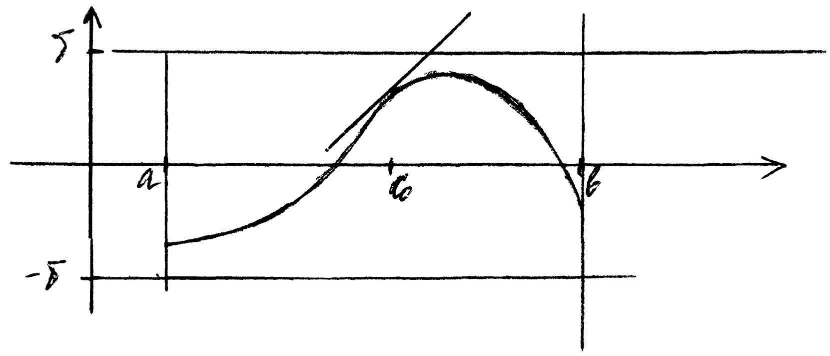
$$|J[y(x)] - J[\tilde{y}(x)]| > \varepsilon$$

Пусть $\forall\ \bar{y}(x) \in C_1[a,b]$, $\forall\ \delta > 0$

Пусть $\varphi(x)$ функция, удовлетворяющая условиям:

$$\varphi'(x_0) = 1,$$
$$|\varphi(x)| < \delta, \quad \forall\ x \in [a,b]$$

(такая функция, очевидно $\exists$ет:



Рассмотрим ф-ю $y(x) = \bar{y}(x) + \varphi(x)$

Имеем

$$|y(x) - \bar{y}(x)| = |\varphi(x)| < \delta$$
$$\Rightarrow y(x) \in U_0(\bar{y}(x), \delta)$$

При этом $\forall\ \varepsilon < 1$ справедливо н-во

$$|J[y(x)] - J[\bar{y}(x)]| = |\bar{y}'(x_0) + \varphi'(x_0) - \bar{y}'(x_0)| =$$
$$= |\varphi'(x_0)| = 1 > \varepsilon$$

Т.о. $J[y(x)]$ разрывен на $\forall\ \bar{y}(x)$ в смысле близости нулевого порядка

2) Покажем, что $J[y(x)]$ непрерывен в смысле близости 1-го порядка при $\forall\ \bar{y}(x) \in C_1[a,b]$

Пусть $\varepsilon > 0$. Имеем:

$$|J[y(x)] - J[\bar{y}(x)]| = |y'(x_0) - \bar{y}'(x_0)|$$

Пусть $\delta = \varepsilon$. Тогда $\forall\ y(x) \in U_1(\bar{y}(x), \delta)$

$$\rho_1(y(x), \bar{y}(x)) < \delta$$
$$\Leftrightarrow \| y(x) - \bar{y}(x) \| < \delta$$
$$\Leftrightarrow \max\{|y(x) - \bar{y}(x)|, |y'(x) - \bar{y}'(x)|\} < \delta$$

$\Leftrightarrow |y(x)-\bar{y}(x)|<\delta$ и $|y'(x)-\bar{y}'(x)|<\delta,\ \forall x\in[a;b]$

$\Rightarrow |J[y(x)]-J[\bar{y}(x)]|=|y'(x_0)-\bar{y}'(x_0)|<\frac{\varepsilon}{\delta}$

$\Rightarrow J[y(x)]$ непрерывный на $\forall \bar{y}(x)\in C_1[a;b]$

Пример №2 показывает, что из непрерывности функционала в смысле близости n-го порядка в общем случае не следует его непрерывность в смысле близости более низкого порядка

2) Пример 3

Пусть $J[y(x)]: C[a,b]\to\mathbb{R}$

$$J[y(x)]=\int_a^b g(x)\cdot y(x)\,dx$$

где $g(x)\in C[a;b]$

Доказать, что $J[y(x)]$ непрерывен в смысле близости 0-го порядка на $\forall y(x)\in C[a,b]$

Решение

Пусть $\varepsilon>0$; $\forall \bar{y}(x)\in C[a,b]$

Т.к $g(x)\in C[a,b]$, то, по теореме Вейерштрасса, $g(x)$ - ограничена

т.е $\exists M>0$ т., что $|g(x)|\le M,\ \forall x\in[a,b]$

Рассмотрим

$$|J[y(x)]-J[\bar{y}(x)]|=\left|\int_a^b g(x)\cdot y(x)dx-\int_a^b g(x)\,\bar{y}(x)\,dx\right|=$$

$$= \left| \int_a^b g(x)\,[y(x) - h(x)]\,dx \right| \leq \int_a^b |g(x)| \cdot |y(x) - h(x)|\,dx$$

$$\leq M \int_a^b \underbrace{\max_{a \leq x \leq b} |y(x) - h(x)|}_{\rho_0(y(x),\, h(x))}\,dx = M\, \rho_0(y(x), h(x)) \cdot (b-a).$$

Пусть $\delta = \frac{\varepsilon}{M(b-a)}$

Тогда $\forall y(x) \in U_0(h(x), \delta)$ имеем:

$$\rho_0(y(x), h(x)) < \delta$$

$$\Rightarrow \left| J[y(x)] - J[h(x)] \right| < M(b-a)\, \rho_0(y(x), h(x)) <$$

$$< M(b-a) \frac{\varepsilon}{M(b-a)} = \varepsilon$$

$\Rightarrow$ $J[y(x)]$ непрерывен на $\forall h(x) \in C[a,b]$ в смысле близости 0-го порядка

Определение

Пусть M - линейное нормированное пр-во ф-й

$$L: M \to \mathbb{R}$$

Функционал $L[y(x)]$ наз-ся линейным if он удовлетворяет условиям:

1) $L[c \cdot y(x)] = c\, L[y(x)]$, $\forall c \in \mathbb{R}$, $\forall y(x) \in M$

2) $L[y_1(x) + y_2(x)] = L[y_1(x)] + L[y_2(x)]$, $\forall y_1(x), y_2(x) \in M$

Примеры

1) Пусть $J[y(x)] : C[a,b] \to \mathbb{R}$

$$J[y(x)] = y(x_0) \quad , \text{где } x_0 \in [a,b]$$

Очевидно, что этот функционал линейный

2) Пусть $J[y(x)] : C[a,b] \to \mathbb{R}$

$$J[y(x)] = \int_a^b y(x)\,dx$$

В силу св-в определённого инт-ла функционал будет линейным

3) Пусть $J[y(x)] : C[a,b] \to \mathbb{R}$

$$J[y(x)] = \int_a^b g(x)\cdot y(x)\,dx \quad , \text{где } g(x) \in C[a,b]$$

$\Rightarrow J[y(x)]$ - линейный.

§4 Вариация функционала

1. Первое определение вариации функционала

Пусть функционал $J[y(x)]$ задан на мн-ве M функций

Определение

Приращением функционала $J[y(x)]$ отвечающим приращению аргумента $\delta y(x)$ наз-ся величина

$$\Delta J[y(x)] = J[\underbrace{y(x)+\delta y(x)}_{\tilde{y}(x)}] - J[y(x)]$$

где $\underbrace{\delta y(x)}_{\text{наз-ся вариацией кривой}} = \tilde{y}(x) - y(x)$, $\tilde{y}(x), y(x) \in M$

Пример

Найти приращение функционала

$$J[y(x)] = \int_0^1 y(x)\, y'(x)\, dx,$$

определённого в пр-ве $C_1[a,b]$, если $y(x) = x$, $\tilde{y}(x) = x^2$

Имеем

$$\Delta J[y(x)] = J[\tilde{y}(x)] - J[y(x)] =$$

$$= \int_0^1 x^2 \cdot 2x\, dx - \int_0^1 x \cdot 1\, dx = \frac{2x^4}{4}\Big|_0^1 - \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = 0$$

Рассм $\Delta J[y(x)]$

Если $y(x)$ фиксирована, то $\Delta J[y(x)]$ представляет собой функционал от $\delta y(x)$

Определение 1

Если приращение $\Delta J[y]$ можно представить в виде

$$\Delta J[y] = L[y(x), \delta y(x)] + \beta(y(x), \delta y(x)) \cdot \|\delta y(x)\|,$$

где $L[y(x), \delta y(x)]$ - линейный отн-но $\delta y(x)$ функционал

$$\beta(y(x), \delta y(x)) \to 0 \quad \text{при} \quad \|\delta y(x)\| \to 0$$

то функционал $J[y]$ наз-ся дифференцируем на $y(x)$

При этом линейная относительно $\delta y(x)$ часть $\Delta J[y(x)]$, т. е

$$L[y(x), \delta y(x)]$$

называется дифференциалом или вариацией функционала

Обозначают: δJ, $\delta J[y, \delta y]$

Лемма 1

Пусть $L[y(x)]$ - линейный функционал и

$$\frac{L[y(x)]}{\|y(x)\|} \to 0 \quad \text{при} \quad \|y\| \to 0$$

Тогда $L[y(x)] \equiv 0$

Док-во

$\Rightarrow$ Пусть $\exists\ y_0(x)$ т. что $L[y_0(x)] = \lambda \neq 0$

Положим $y_n(x) = \frac{y_0(x)}{n}$

Имеем

$$\|y_n(x)\| = \max\left\{ \frac{|y_0(x)|}{n}, \frac{|y_0'(x)|}{n}; \ldots; \frac{|y_0^{(k)}(x)|}{n} \right\}$$

$$\Rightarrow \|y_n(x)\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

При этом $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{L[y_n(x)]}{\|y_n(x)\|} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} L[y_0(x)]}{\frac{1}{n}\|y_0(x)\|} = \frac{\lambda}{\|y_0(x)\|} \neq 0$

$\lightning$

$\Rightarrow L[y(x)] \equiv 0$ чтд.

Теорема 2

Вариация функционала δJ (если она существует) определяется единственным образом

Док-во

$\Rightarrow$ Пусть
$$\Delta J[y] = L_1[y(x), \delta y] + \beta_1 \cdot \|\delta y\|$$
$$\Delta J[y] = L_2[y(x), \delta y] + \beta_2 \|\delta y\|$$
где $\beta_1 \to 0$ при $\|\delta y\| \to 0$
$\beta_2 \to 0$ при $\|\delta y\| \to 0$

Тогда
$$\underbrace{\Delta J[y] - \Delta J[y]}_{0} = L_1[y, \delta y] - L_2[y, \delta y] + (\beta_1 - \beta_2)\|\delta y\|$$
$$\Rightarrow \frac{L_1[y, \delta y] - L_2[y, \delta y]}{\|\delta y\|} = \beta_2 - \beta_1 \to 0 \text{ при } \|\delta y\| \to 0$$

Но тогда по лемме 1
$$L_1[y, \delta y] - L_2[y, \delta y] \equiv 0$$
$$\Rightarrow L_1[y, \delta y] = L_2[y, \delta y] \quad \lightning$$

$\Rightarrow$ Вариация функционала определена единственным образом ч.т.д.

Пример 1

Пусть $J[y] : C[a, b] \to \mathbb{R}$
$$J[y] = \int_a^b y(x)dx$$

Д-ть, что $J[y]$ дифференцируем при $\forall\, y(x) \in C[a; b]$. Найти δJ

Решение

Имеем:

$$\Delta J[y] = J[y+\delta y] - J[y] =$$

$$= \int_a^b [y(x) + \delta y(x)]\,dx - \int_a^b y(x)\,dx$$

$$= \int_a^b \delta y(x)\,dx$$

Получили:

$$\Delta J[y(x)] = \underbrace{\int_a^b \delta y(x)\,dx}_{\text{линейный отн-но } \delta y(x) \text{ функционал}}$$

$\Rightarrow$ $J[y(x)]$ дифф-м при $\forall\, y(x)$ и его вариация $\delta J = \int_a^b \delta y(x)\,dx$

Пример 2

Пусть $J[y] : C[a,b] \to \mathbb{R}$

$$J[y(x)] = \int_a^b y^2(x)\,dx$$

Д-ть, что $J[y(x)]$ дифф-м при $\forall\, y(x) \in C[a,b]$

Найти δJ

Решение

Имеем:

$$\Delta J[y] = J[y+\delta y] - J[y] =$$

$$= \int_a^b [y(x)+\delta y(x)]^2\,dx - \int_a^b y^2(x)\,dx =$$

$$= \int_a^b 2y(x)\cdot\delta y(x)\,dx + \underbrace{\int_a^b [\delta y(x)]^2\,dx}_{\frac{\int \dots}{\|\delta y\|}\cdot\|\delta y\|}$$

$\Rightarrow$ Д-ть, что $\frac{\int_a^b \dots}{\|\delta y\|} \to 0$ при $\|\delta y\| \to 0$

Рассмотрим $\forall$ из слагаемых

1) $\int\limits_a^b 2y(x)\cdot \delta y(x)\,dx$ — функционал, линейный отн-но $\delta y(x)$. (при фиксированной $y(x)$)

2) $$\int\limits_a^b [\delta y(x)]^2 dx = \int\limits_a^b |\delta y(x)|^2 dx \le$$

$$\le \int\limits_a^b [\underbrace{\max|\delta y(x)|}_{\|\delta y(x)\|}]^2 dx = \|\delta y(x)\|^2 \underbrace{\int\limits_a^b dx}_{b-a}$$

$$= [\|\delta y\|\cdot(b-a)]\cdot\|\delta y(x)\|$$

$\Rightarrow$

$$\rho \le \frac{\int\limits_a^b [\delta y]^2 dx}{\|\delta y\|} \le \|\delta y\|\cdot(b-a)$$

$\Rightarrow$ по лемме о 2-х миллионерах

$$\lim_{\|\delta y\|\to 0} \frac{\int\limits_a^b [\delta y]^2 dx}{\|\delta y\|} = 0$$

Т.О. ΔJ представлено в виде суммы $L[y,\delta y]$ и слагаемого, более высокого порядка малости чем $\|\delta y\|$

$\Rightarrow$ функционал явл-ся дифференцируемым и его вариация

$$\delta J = 2\int\limits_a^b y(x)\cdot\delta y(x)\,dx$$

Пример 3

Пусть $J[y] : C_1[a,b] \to R$

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y'_x)\,dx$$

где $F(x,y,y')$ – ф-я, непрерывная по x, y, y' и имеющая непрерывные частные производные до 2-го порядка включительно в области

$$a \le x \le b,\ -\infty < y < +\infty,\ -\infty < y' < +\infty$$

Найти δJ

Решение

Имеем

$$\Delta J[y] = \int_a^b F(x, y(x)+\delta y, y'+\delta y')\,dx - \int_a^b F(x,y,y')\,dx$$

$$= \int_a^b [F(x, y+\delta y, y'+\delta y') - F(x,y,y')]\,dx$$

По ф-ле Тейлора

$$F(x, y+\delta y, y'+\delta y') - F(x,y,y') = \underbrace{\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'}_{dF} + R(x,y,y',\delta y, \delta y')$$

где $R(x,y,y',\delta y,\delta y')$ – остаточный член ф-лы Тейлора

$$\Rightarrow \Delta J[y] = \underbrace{\int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right]dx}_{\text{линейное отн-но } \delta y \text{ и } \delta y'} + \underbrace{\int_a^b R(x,y,y',\delta y,\delta y')\,dx}_{\frac{J_1}{\|\delta y\|}\cdot\|\delta y\|}$$

Пусть все вторые частные производные ф-ии $F(x,y,y')$ по y и y' не превосходят по абсолютной величине некоторого $M>0$

Тогда

$$\left|\int_a^b R\right| \le \int_a^b |\underbrace{R(x,y,y',\delta y,\delta y')}_{\frac{d^2 f(x,\tilde{y},\tilde{y}')}{2!}}|\,dx \le \frac{M}{2}\int_a^b (\delta y+\delta y')^2 dx$$

$$\frac{d^2 f(x,\tilde{y},\tilde{y}')}{2!} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\delta y^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'}\delta y\,\delta y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}(\delta y')^2\right)$$

$$= \frac{M}{2}\int_a^b |\delta y+\delta y'|^2 dx \le \frac{M}{2}\int_a^b \Big(\underset{\|\delta y\|}{\underset{\shortparallel}{\max|\delta y|}} + \underset{\|\delta y\|}{\underset{\shortparallel}{\max|\delta y'|}}\Big)^2$$

$$\le \frac{M}{2}\int_a^b \left[2\|\delta y\|\right]^2 dx = 2M(b-a)\cdot\|\delta y\|^2$$

$\Rightarrow$

$$0 \le \frac{\int_a^b |R(x,y,y',\delta y,\delta y')|\,dx}{\|\delta y\|} \le 2M(b-a)\,\|\delta y\|$$

След-но

$$\frac{\left|\int_a^b R(x,y,y',\delta y,\delta y')\,dx\right|}{\|\delta y\|} \to 0 \quad \text{при} \quad \|\delta y\|\to 0$$

$\Rightarrow \int_a^b R(x,y,y',\delta y,\delta y')\,dx$ – б.м. более высокого порядка чем $\|\delta y\|$

Т.О.

$$\delta J = \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y'\right)dx \qquad (*)$$

Пример 4

Для функционала $J[y] = \int_0^1 (x^2(y')^2 - y^2)\,dx$ найти $\Delta J[y(x)]$ и δJ при $y(x)=x^2$, $\delta y = kx^3$. Сравнить их при $k=1;\ 0{,}1;\ 0{,}01$

Решение

1) $\Delta J = J[y+\delta y] - J[y] =$

$$= \int_0^1 \left[x^2\left[((y+\delta y)')\right]^2 - (y+\delta y)^2\right]dx - \int_0^1 \left[x^2(y')^2 - y^2\right]dx =$$

$$= \int_0^1 \left[x^2\left[(y')^2 + 2y'\delta y' + (\delta y')^2\right] - \cancel{y^2} - 2y\delta y - (\delta y)^2 - \cancel{x^2(y')^2} + \cancel{y^2}\right]dx$$

$$= \int_0^1 \left[2x^2 y'\delta y' + x^2(\delta y')^2 - 2y\delta y - (\delta y)^2\right]dx$$

$$= \underbrace{\int_0^1 \left[2x^2 y'\delta y' - 2y\delta y\right]dx}_{\delta J} + \int_0^1 \left[x^2(\delta y')^2 - (\delta y)^2\right]dx$$

$$= \int_0^1 \left[2x^2\cdot 2x\cdot 3kx^2 - 2x^2\cdot kx^3\right]dx + \int_0^1 \left[x^2\cdot(3kx^2)^2 - (kx^3)^2\right]dx = \int_0^1 10kx^5 + \int_0^1 8k^2x^6 =$$

$$= \frac{10}{6}k + \frac{8}{7}k^2 = \underbrace{\frac{5}{3}k}_{\delta J} + \frac{8}{7}k^2$$

Др. способ найти δJ

2) $$\delta J = \int_0^1 \left[\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right]dx = \int_0^1 \left[-2y\delta y + 2x^2 y'\delta y'\right]dx =$$

$$y = x^2 \Rightarrow y' = 2x$$
$$\delta y = kx^3 \Rightarrow \delta y' = 3kx^2$$

$$= \int_0^1 \left[-2x^2\cdot kx^3 + 2x^2\cdot 2x\cdot 3kx^2\right]dx =$$

$$= \int_0^1 (-2kx^5 + 12kx^5)dx = \int_0^1 10kx^5dx = \frac{10k}{6} = \frac{5k}{3}$$

Пусть $k = 1 \Rightarrow \Delta J = 2{,}810, \quad \delta J = 1{,}667$

$k = 0{,}1 \Rightarrow \Delta J = 0{,}181 \quad \delta J = 0{,}167$

$k = 0{,}01 \Rightarrow \Delta J = 0{,}0168 \quad \delta J = 0{,}0167$

2 Второе определение вариации функционала

Определение 2

Вариацией функционала $J[y(x)]$ в точке $y(x)$ наз-ся значение производной функционала $J[y(x)+t\delta y(x)]$ по параметру t, когда $t=0$:

$$\delta J = \frac{d}{dt} J[y(x)+t\delta y(x)]\Big|_{t=0}$$

Теорема 3

if $\exists$ет δJ в смысле определения 1, то $\exists$ет δJ и в смысле определения 2 и они совпадают.

Док-во — см обороте

Пример

Пользуясь определением 2 найти δJ для функционала

$$J[y(x)] = \int_a^b y^2(x)\,dx$$

Имеем

$$\delta J = \frac{d}{dt} J[y(x)+t\delta y(x)]\Big|_{t=0} =$$

$$= \frac{d}{dt}\int_a^b [y(x)+t\delta y(x)]^2 dx\Big|_{t=0} = \int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial t}[y(x)+t\delta y(x)]^2\Big|_{t=0}\right)dx$$

$$= \int_a^b \left[2[y(x)+t\delta y(x)]\,\delta y(x)\Big|_{t=0}\right]dx = 2\int_a^b y(x)\cdot\delta y(x)\,dx$$

Замечание

Определение 2 вариации функционала несколько шире 1-го в том смысле, что $\exists$ функционалы, из приращения к-х нельзя выделить главной линейной части, но вариация в смысле 2-го определения $\exists$ет

Док-во теоремы 3

Пусть $J[y(x)]$ имеет вариацию в смысле 1-го определения. Тогда имеем

$$\Delta J = J[y(x)+t\delta y(x)] - J[y(x)] =$$

$$= L[y(x), t\delta y(x)] + \beta(y(x); t\delta y(x)) \underbrace{\|t\delta y(x)\|}_{|t|\ \|\delta y\|}$$

С др. стороны

$$\frac{d}{dt} J[y(x)+t\delta y(x)]\Big|_{t=0} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{J[y+\overset{0+\Delta t}{\Delta t}\delta y] - J[y+0\,\delta y]}{\Delta t} =$$

$$= \left|\Delta t \overset{\text{об}}{=} t\right| = \lim_{t\to 0} \frac{\Delta J}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{L[y, t\delta y] + \beta(y, t\delta y)\ \|\delta y\|\cdot|t|}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{L[y, t\delta y]}{t} + \underbrace{\lim_{t\to 0} \frac{\beta(y, t\delta y)\ |t|\ \|\delta y\|}{t}}_{\substack{0,\ \text{т.к. при } t\to 0\ \|t\delta y\|\to 0 \\ \Rightarrow \beta(y, t\delta y)\to 0}} =$$

$$= \underbrace{\lim_{t\to 0} \frac{t\ L[y, \delta y]}{t}}_{\substack{\text{т.к. } L[y,\delta y] \text{ линейный} \\ \text{отн-но } \delta y}} =$$

$$= L[y, \delta y] = \delta J$$

чтд

§5 Экстремум функционала. Необходимое усл-е экстремума

Пусть $J[y]$ – функционал, $J[y]: C_1[a,b] \to \mathbb{R}$

Определения

Говорят, что $J[y]$ достигает на кривой $y = y_0(x)$ слабого относительного максимума (минимума), если $\exists\ U_1(y_0(x), \varepsilon)$ такая, что $\forall\ y(x) \in U_1(y_0(x), \varepsilon)$ имеем

$$J[y(x)] \le J[y_0(x)] \quad \left(J[y(x)] \ge J[y_0(x)] \right)$$

Говорят, что $J[y]$ достигает на кривой $y = y_0(x)$ сильного относительного максимума (минимума), если $\exists\ U_0(y_0(x), \varepsilon)$ такая, что $\forall\ y(x) \in U_0(y_0(x), \varepsilon)$ имеем

$$J[y(x)] \le J[y_0(x)] \quad \left(J[y(x)] \ge J[y_0(x)] \right)$$

Относительные максимумы и минимумы (слабые и сильные) наз-ся относительными экстремумами

Говорят, что $J[y]$ достигает на кривой $y = y_0(x)$ абсолютного максимума (минимума) если для $\forall$ допустимой кривой $y(x)$ имеем

$$J[y(x)] \le J[y_0(x)] \quad \left(J[y(x)] \ge J[y_0(x)] \right)$$

Абсолютный максимум и минимум наз-ся абсолютными экстремумами

А $y_0(x)$ - экстремум $J[y]$ (абсолютный, относительный) и рав-во

$$J[y(x)] = J[y_0(x)]$$

справедливо только при $y(x) = y_0(x)$, то экстремум наз-ся строгим

Справедливы утверждения

1) Любой сильный экстремум явл-ся в то же время и слабым.
Обратное неверно

2) Любой абсолютный экстремум явл-ся слабым и сильным относительным экстремумом, но не всякий относительный экстремум будет абсолютным

<u>Пример</u>

Пусть $J[y] : M \to R$

где $M \subset C_1[0; \pi]$

$$y(0) = y(\pi) = 0, \ \forall\, y(x) \in M$$

$$J[y] = \int_0^{\pi} y^2 [1-(y')^2]\, dy$$

Доказать, что на кривой $y \equiv 0$ $J[y]$ достигает слабого $\min$

Решение

Имеем $J[0] = 0$

Пусть $\varepsilon < 1$, $y \in U_1(0; \varepsilon)$

Тогда $|y'(x)| < 1$, $\forall\, x \in [0, \pi]$

$$\Rightarrow 1-(y')^2 > 0$$

$$\Rightarrow y^2 (1-(y')^2) > 0$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi} y^2(1-(y')^2)\,dx > 0$$

$\Rightarrow \forall y \in U_1(0;\varepsilon)$ выполняется н-во

$$J[y(x)] > J[0]$$

т. е. на $y \equiv 0$ $J[y(x)]$ достигает слабого min

Сильного min функционал на $y \equiv 0$ не достигает. Действительно, пусть

$$y_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin nx$$

Тогда

$$J[y_n(x)] = \int_0^{\pi} \frac{1}{n} \sin^2 nx\,(1 - n\cos^2 nx)\,dx =$$

$$= \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \sin^2 nx\,dx - \frac{1}{4}\int_0^{\pi} \sin^2 2nx\,dx$$

$$= \frac{1}{2n}\int_0^{\pi}(1-\cos 2nx)\,dx - \frac{1}{8}\int_0^{\pi}(1-\cos 4nx)\,dx$$

$$= \frac{\pi}{2n} - \frac{\pi}{8}$$

$\Rightarrow$ При $n > 4$ $J[y_n(x)] < 0$

Но $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ т. что $\forall n > N$

$$y_n(x) \in U_0(0;\varepsilon)$$

$\Rightarrow$ На $y \equiv 0$ $J[y(x)]$ не достигает сильного min

Теорема 1 (необходимое условие экстремума функционала)

Пусть функционал $J[y]$ достигает экстремума при $y=y_0(x)$ и в этой точке $\exists$ его вариация $\delta J[y_0, \delta y]$

Тогда
$$\delta J[y_0(x), \delta y(x)] = 0, \quad \forall \delta y$$
(где $y_0+\delta y \in M$ — област задания функционала)

Док-во

I вариант Используем 1-е определение δJ

Рассмотрим для определённости случай min

Т.к. $J[y]$ достигает min при $y=y_0(x)$, то $\exists\, \varepsilon>0$ т.что
$$J[y_0+\delta y] \geq J[y_0],$$
$\forall \delta y$, для которого $\|\delta y\| < \varepsilon$

Но по определению вариации
$$\Delta J = J[y_0+\delta y] - J[y_0] - \delta J[y_0, \delta y] + \beta[y_0, \delta y]\,\|\delta y\|,$$
где $\beta[y_0, \delta y] \to 0$ при $\|\delta y\| \to 0$

Если предположить, что $\delta J[y_0, \delta y] \neq 0$ то при достаточно малых δy знак ΔJ определяется знаком 1-го (главного) члена

Но $\delta J[y_0, \delta y]$ — линейный отн-но δy функционал

$$\Rightarrow \delta J[y_0, -\delta y] = -\delta J[y_0, \delta y]$$

$\Rightarrow$ При $\delta J[y_0, \delta y] \neq 0$ выражение ΔJ может быть как положительным, так и отрицательным при сколь угодно малых δy. Но это означает, что при $y_0(x)$ нет экстремума $\lightning \Rightarrow \delta J[y_0, \delta y] = 0$

II вариант. Используем 2-е определение δJ

Рассмотрим для определённости случай min

а) Пусть $\delta y = 0$

Тогда $\delta J[y_0, \delta y] = \frac{d}{dt} \underbrace{J[y_0 + t\delta y]}_{\text{не зависит от } t} \Big|_{t=0} = 0$

б) Пусть $\delta y \neq 0$

Т.к. на $y = y_0(x)$ $J[y]$ достигает min, то $\exists\ \varepsilon > 0$, т. что $\forall\ y(x) \in U(y_0, \varepsilon)$ справедливо н-во $J[y] \geq J[y_0]$

Пусть t - число, т. что $|t| < \frac{\varepsilon}{\|\delta y\|}$

Тогда $y_0 + t\delta y \in U(y_0, \varepsilon)$

‖ Действ-но, $\|(y_0 + t\delta y) - y_0\| = \|t\delta y\| = |t|\,\|\delta y\| < \varepsilon$

$\Rightarrow J[y_0 + t\delta y] \geq J[y_0]$

Таким образом, получили, что $J[y_0 + t\delta y]$, рассматриваемая как функция аргумента t, имеет min при $t = 0$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{d}{dt} J[y_0 + t\delta y]\Big|_{t=0}}_{\delta J[y_0, \delta y] = 0} = 0, \ \forall \delta y \ (\text{где } y_0 + \delta y \in M)$$

ч.т.д.

Функции, для к-х $\delta J = 0$ будем наз-ть стационарными функциями

§6 Простейшая задача вар-го исчисления. Уравнение Эйлера

Простейшей задачей вар-го исчисления наз-ся задача, к-я формулируется след образом

Пусть $F(x, y, y')$ - ф-я, имеющая непрерывные частные производные по x, y, y' до 2-го порядка включительно

Среди всех ф-й $y(x) \in C_1[a, b]$, удовлетворяющих граничным условиям

$$y(a) = A, \quad y(b) = B$$

найти ту ф-ю, на которой достигает слабого экстремума функционал

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y')\,dx \qquad (1)$$

Др словами, простейшая задача вар-го исчисления состоит в отыскании слабого экстремума функционала (1) на мн-ве всех гладких кривых, соединяющих две заданные т-ки $P_1(a, A)$ и $P_2(b, B)$

Для решения простейшей задачи вар-го исчисления нам понадобится след утверждение

Лемма 1 (основная лемма вар-го исчисления)

Если $\alpha(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и

$$\int_a^b \alpha(x) h(x)\,dx = 0, \quad \forall\, h(x) \in C[a, b],$$

то $\alpha(x) \equiv 0$

Док-во

$\Leftarrow$ Пусть $\delta(x) \neq 0$

Тогда $\exists x_0 \in (a, b)$ такая, что $\delta(x_0) \neq 0$

Будем для определённости считать, что

$$\delta(x_0) > 0$$

Т.к. $\delta(x)$ - непрерывна на $[a, b]$, то $\exists$ интервал $x_1 < x_0 < x_2$, на котором $\delta(x) > 0$

(см геометрическое определение непрерывной функции)

Пусть $h(x)$ - такая непрерывная на $[a, b]$ функция, что

$$h(x) > 0, \quad \forall x \in (x_1; x_2)$$
$$h(x) = 0, \quad \forall x \notin (x_1; x_2)$$

(например, $h(x) = \begin{cases} (x_1 - x)^2 (x_2 - x)^2, & x \in (x_1; x_2) \\ 0, & x \notin (x_1, x_2) \end{cases}$

Тогда

$$\int_a^b \delta(x) \cdot h(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} \delta(x) \cdot h(x)\, dx > 0$$

т.к. $\delta(x)\, h(x) > 0$. $\lightning$

$\Rightarrow \delta(x) \equiv 0$

ч.т.д.

<u>Замечание</u> Доказанная лемма остаётся верной и в том случае, когда предполагается что $h(x) \in C_k[a, b]$ и удовлетворяет некоторым граничным условиям (например, $h(a) = h(b) = 0$)

Т.е лемма останется справедливой и соотношение $\int^b \delta(x) \cdot h(x) = 0$ будет выполняться для более узкого класса ф-й $h(x)$ чем $C[a, b]$

Теорема 2

Пусть M – мн-во непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций, удовлетворяющих граничным условиям

$$y(a) = A, \quad y(b) = B$$

Для того чтобы определённый на M функционал ① достигал на данной функции $y_0(x)$ экстремума (слабого) необходимо, чтобы $y_0(x)$ удовлетворяла условию

$$F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y'} = 0 \qquad ②$$

Уравнение ② наз-ся уравнением Эйлера

Замечание

Т.к любой сильный экстремум явл-ся в то же время и слабым, то любое условие, необходимое для слабого экстремума, необходимо и для сильного

Док-во

Пусть $y_0(x) \in M$ и $J[y] = \int_a^b F(x, y, y')dx$ достигает экстремума на $y_0(x)$

Тогда $\delta J[y_0, \delta y] = 0$, $\forall \delta y$ т что $y_0 + \delta y \in M$

По ф ле (*) из §4 имеем:

$$\delta J[y_0, \delta y] = \int_a^b [F'_y \delta y + F'_{y'} \delta y'] dx =$$

$$= \int_a^b F'_y \delta y dx + \int_a^b F'_{y'} \delta y' dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = F'_{y'} & du = \frac{dF'_{y'}}{dx} \\ dv = \delta y' dx & v = \delta y \end{matrix} \right| =$$

$$= \int_a^b F'_y \delta y \, dx + F'_{y'} \delta y \Big|_a^b - \int_a^b \frac{dF'_{y'}}{dx} \delta y \, dx$$

Т. к. $y_0(x)$, $y_0(x) + \delta y(x) \in M$, то

$$\left. \begin{matrix} y_0(a) = A & y_0(a) + \delta y(a) = A \\ y_0(b) = B & y_0(b) + \delta y(b) = B \end{matrix} \right\} \Rightarrow \delta y(a) = \delta y(b) = 0$$

$$\Rightarrow F'_{y'} \delta y \Big|_a^b = 0 - 0 = 0$$

$$\Rightarrow \delta J[y_0, \delta y] = \int_a^b F'_y \delta y \, dx - \int_a^b \frac{dF'_{y'}}{dx} \delta y \, dx =$$

$$= \int_a^b \left[F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y'} \right] \delta y = 0, \quad \forall \delta y \text{ т. что } y_0 + \delta y \in M$$

$\Rightarrow$ По лемме 1

$$F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y'} = 0 \quad \text{при } y = y_0(x)$$

ч.т.д.

[Ур-е Эйлера явл-ся дифф. ур-ем 2-го порядка. Его общее решение $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ определяет двухпараметрическое сем-во кривых. Интегральные кривые ур-я Эйлера наз-ся экстремалями (лагранжевы кривые)

Т. к.

$$\frac{d}{dx} \underbrace{F'_{y'}}_{\text{ф-я от } x, y, y'} = F''_{y'x} + F''_{y'y} \cdot y' + F''_{y'y'} y''$$

то ур-е Эйлера можно записать в виде

$$F'_y - F''_{y'x} - F''_{y'y} y' - F''_{y'y'} y'' = 0 \qquad (3)$$

— развёрнутый вид ур-я Эйлера

Итак, экстремум функционала ① может реализовываться только экстремалях, причём таких, которые удовлетворяют условиям $y(a)=A$, $y(b)=B$

Но краевая задача

$$F'_y - \frac{d}{dx}F'_{y'} = 0$$

$$y(a)=A\ ,\ y(b)=B$$

не всегда имеет решение. А если решение есть, то оно может быть не единственным

Примеры 1, 2, 3 стр 23

Кроме того, уравнение Эйлера не всегда интегрируется в квадратурах. Приведём некоторые простейшие случаи интегрируемости уравнения Эйлера

Простейшие случаи ур-я Эйлера

1) F не зависит от y, т.е

$$F = F(x, y')$$

Тогда

$$F'_y - \frac{d}{dx}(F'_{y'}) = 0 - \frac{d}{dx}(F'_{y'})$$

$$\Rightarrow F'_y - \frac{d}{dx}(F'_{y'}) = 0 \iff \frac{d}{dx}(F'_{y'}) = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{F'_{y'} = C}_{\text{ур-е 1-го порядка}}$$

ТО в данном случае порядок диф ур-я понижается

(2) F не зависит от x, т.е

$$F = F(y, y')$$

Тогда

$$F'_y - \frac{d}{dx}(\underbrace{F'_{y'}}_{\text{ф-я от } y \text{ и } y'}) = F'_y - F''_{y'y}\, y' - F''_{y'y'}\, y''$$

$$\Rightarrow F'_y - \frac{d}{dx}(F'_{y'}) = 0 \iff F'_y - F''_{y'y}\, y' - F''_{y'y'}\, y'' = 0$$

Умножим обе части рав-ва на y':

$$F'_y \cdot y' - F''_{y'y}(y')^2 - F''_{y'y'}\, y''\, y' = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left[F'_y \cdot y' + F'_{y'} \cdot y''\right]}_{\frac{d}{dx}(F)} - \left[\underbrace{F'_{y'}\, y''}_{\frac{d}{dx}(y') \cdot F'_{y'}} + \underbrace{F''_{y'y}(y')^2 + F''_{y'y'}\, y'' \cdot y'}_{y' \frac{d}{dx}(F'_{y'})}\right] = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(F) - \left[\frac{d}{dx}(y') \cdot F'_{y'} + y' \cdot \frac{d}{dx}(F'_{y'})\right] = 0$$

$$\frac{d}{dx}(F - y' F'_{y'}) = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{F - y' F'_{y'} = C}_{\substack{\text{дифф ур-е 1-го порядка} \\ \text{(1-й интеграл ур-я Эйлера)}}}$$

Т.о порядок уравнения понижается

(3) F не зависит от y', т.е

$$F = F(x, y)$$

Тогда

$$F'_y - \frac{d}{dx}(F'_{y'}) = F'_y - \frac{d}{dx}(0) = F'_y$$

$\Rightarrow$ ур-е Эйлера принимает вид

$$\underbrace{F'_y(x,y)=0}_{}$$

ур-е, не являющееся дифференциальным

Ур-е $F'_y(x,y)=0$ не содержит произвольных эл-тов

$\Rightarrow$ кривая, на которой может достигаться экстремум существует только в том случае, когда кривая $F'_y(x,y)=0$ удовлетворяет граничным условиям

$$y(a)=A, \quad y(b)=B$$

④ F не зависит от x и y, т. е.

$$F=F(y')$$

Тогда

$$F'_y-\frac{d}{dx}(F'_{y'})=0-F''_{y'y'}\cdot y''=0$$

$\Rightarrow$ Ур-е Эйлера принимает вид

$$F''_{y'y'}\cdot y''=0$$

$$\Rightarrow y''=0 \quad \text{или} \quad F''_{y'y'}=0$$

Из $y''=0$ находим

$$y=C_1x+C_2$$

Из $F''_{y'y'}=0$ находим

$$F'_{y'}=C$$

$$\Rightarrow F=Cy'$$

$$\Rightarrow J[y]=\int_a^b Cy'dx=Cy\Big|_a^b=C(B-A)$$

$\Rightarrow$ функционал принимает одно и то же значение $\forall\, y(x)\in M$

ТО экстремалями явл-ся всевозможные прямые линии

$$y(x) = C_1 x + C_2$$

Пример 4

Найти экстремали функционала

$$J[y(x)] = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$$

$$y(a) = A, \quad y(b) = B$$

$J[y(x)]$ - длина кривой в плоскости xOy, соединяющей точки $M_1(a, A)$ и $M_2(b, B)$

$\Rightarrow$ Геометрически задача состоит в нахождении линии, дающей кратчайшее расстояние между двумя точками плоскости

Ур-е Эйлера имеет вид

$$y'' = 0$$

$$\Rightarrow y = C_1 x + C_2$$

Из условий $y(a) = A$, $y(b) - B$ находим

$$\begin{cases} A = C_1 a + C_2 \\ B = C_1 b + C_2 \end{cases} \Rightarrow C_1 = \frac{B - A}{b - a}, \quad C_2 = \underbrace{\frac{Ba - Ab}{b - a}}_{-C_1 a + A}$$

$\Rightarrow$

$$y = \frac{B - A}{b - a}(x - a) + A$$

- прямая, проходящая из т-ки $(a; A)$ и (b, B)

5) F не зависит от x и y', т.е.

$$F = F(y)$$

Тогда $F'_y - \frac{d}{dx}(F'_{y'}) = F'_y - \frac{d}{dx}(0) = F'_y$

$\Rightarrow$ Ур-е Эйлера принимает вид

$$\underbrace{F'_y(y) = 0}_{\text{ур-е не являющееся дифференциальным}}$$

$\Rightarrow$ Экстремаль существует, только if ~~кривая~~ $F'_y(y) = 0$ удовлетворяет граничным условиям $y(a) = A$, $y(b) = B$

(ср. с 3))

6) F зависит от y' линейно, т.е.

$$F = M(x,y) + N(x,y)\,y'$$

Тогда

$$F'_y - \frac{d}{dx}(F'_{y'}) = \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial y}\cdot y' - \frac{d}{dx}(N(x,y)) =$$

$$= \frac{\partial M}{\partial y} + \cancel{\frac{\partial N}{\partial y} y'} - \frac{\partial N}{\partial x} - \cancel{\frac{\partial N}{\partial y} y'}$$

$$= \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$$

$\Rightarrow$ Ур-е Эйлера принимает вид

$$\underbrace{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0}_{\text{ур-е, не являющееся дифференциальным}}$$

$\Rightarrow$ Также как и в случаях 3) и 5) экстремаль будет существовать только в том случае, когда решение ур-я удовлетворяет граничным условиям

Если же окажется, что

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \equiv 0$$

в некоторой области D плоскости xOy, то выражение

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

является полным дифференциалом некоторой ф-ции и функционал

$$J[y(x)] = \int_a^b F(x,y,y')dx = \int_{(a,A)}^{(b,B)} M\,dx + N\,dy$$

не зависит от пути интегрирования. Т.е в этом случае значение функционала $J[y(x)]$ одно и то же на всех допустимых кривых

$\Rightarrow$ Вариационная задача теряет смысл

Пример 5

Исследовать на экстремум функционал

$$J[y(x)] = \int_a^b (y^2 + 2xyy')dx$$

$$y(a) = A, \quad y(b) = B$$

Решение

$F(x,y,y')$ линейно зависит от y',

$$M(x,y) = y^2, \quad N(x,y) = 2xy$$

Имеем $\frac{\partial M}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2y$

$$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}$$

$\Rightarrow$ $(y^2+2xyy')dx$ является полным дифференциалом:

$$(y^2+2xyy')dx = y^2dx + 2xy\,dy = d(xy^2)$$

$\Rightarrow$ Интеграл не зависит от пути интегрирования

$$J[y(x)] = \int_a^b (y^2+2xyy')dx = \int_{(a,A)}^{(b,B)} d(xy^2) = xy^2\Big|_{(a,A)}^{(b,B)} = bB^2 - aA^2$$

$\Rightarrow$ Вариационная задача не имеет смысла

Пример 1

На каких кривых может достигать экстремума функционал

$$J[y]=\int_1^2\left[(y')^2-2xy\right]dx$$

$$y(1)=0,\quad y(2)=-1$$

Решение

Имеем $F(x,y,y')=(y')^2-2xy$

$$\Rightarrow F'_y-\frac{d}{dx}\left(F'_{y'}\right)=-2x-\frac{d}{dx}\left(2y'\right)=-2x-2y''$$

$$F'_y-\frac{d}{dx}\left(F'_{y}\right)=0 \iff y''+x=0$$

$$\Rightarrow y'=-\frac{x^2}{2}+C_1$$

$$y=-\frac{x^3}{6}+C_1x+C_2$$

Из условий $y(1)=0$, $y(2)=-1$ находим

$$\begin{cases}0=-\frac{1}{6}+C_1+C_2\\ -1=-\frac{8}{6}+2C_1+C_2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}C_1+C_2=\frac{1}{6}\\ 2C_1+C_2=\frac{2}{6}\end{cases}$$

$$\Rightarrow C_1=\frac{1}{6},\quad C_2=0$$

ТО экстремум может достигаться только на кривой $y=-\frac{x^3}{6}+\frac{x}{6}$

Пример 2

Найти экстремали функционала

$$J[y]=\int_1^3(3x\ y)y\,dx,$$

удовлетворяющие условиям $y(1)=1$, $y(3)=\frac{9}{2}$

Решение

Имеем: $F(x,y,y') = 3xy - y^2$

$\Rightarrow F'_y - \frac{d}{dx}(F'_{y'}) = 3x - 2y - \frac{d}{dx}(0) = 3x - 2y$

$\Rightarrow F'_y - \frac{d}{dx}(F'_{y'}) = 0 \Leftrightarrow 3x - 2y = 0$

$\Rightarrow y = \frac{3}{2}x.$

Но тогда $y(1) = \frac{3}{2}\,1 = \frac{3}{2} \neq 1$

Т.к. экстремалей, удовлетворяющих граничным условиям нет, то поставленная вариационная задача решений не имеет

Пример 3

Найти экстремали функционала $J[y] = \int\limits_0^{2\pi}[(y')^2 - y^2]dx$, удовлетворяющие граничным условиям $y(0) = y(2\pi) = 1$

Решение

Имеем: $F(x,y,y') = (y')^2 - y^2$

$\Rightarrow F'_y - \frac{d}{dx}(F'_{y'}) = -2y - \frac{d}{dx}(2y') = -2y - 2y''$

$F'_y - \frac{d}{dx}(F'_{y'}) = 0 \Leftrightarrow y'' + y = 0$

$\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i$

$\Rightarrow y = C_1\cos x + C_2 \sin x$

Из условий $y(0) = y(2\pi) = 1$ находим

$1 = C_1 \underbrace{\cos 0}_{1} + C_2 \underbrace{\sin 0}_{0} \Rightarrow C_1 = 1$

$1 = 1 \cdot \underbrace{\cos 2\pi}_{1} + C_2 \underbrace{\sin 2\pi}_{0}$ - верно $\forall C_2$

ТО поставленная вариационная задача имеет бесконечно много решений

$y = \cos x + C \sin x \quad , \forall C$

В заключение этого § приведём решения двух классических задач

Задача 1 (задача о брахистохроне)

Среди всех гладких кривых, соединяющих точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ найти ту, по которой материальная точка, двигаясь под действием силы тяжести попадёт из A в B за кратчайшее время

Ранее получили, что на искомой кривой достигает минимума функционал

$$\mathcal{J}[y] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y-\alpha}}\,dx$$

$$\text{где}\quad \alpha = y_1 - \frac{(v_0)^2}{2g}$$

Пусть $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ и $v_0 = 0$

$$\Rightarrow \mathcal{J}[y] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y}}\,dx$$

Найдём экстремали этого функционала

Имеем
$$\underbrace{F(y, y') = \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y}}}_{\text{не зависит от } x}$$

$$\Rightarrow F - y' F'_{y'} = \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y}} - y' \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = C_1$$

$$\Rightarrow \frac{1 + \cancel{(y')^2} - \cancel{(y')^2}}{\sqrt{y}\,\sqrt{1+(y')^2}} = C_1$$

$$\Rightarrow \sqrt{y}\,\sqrt{1+(y')^2} = \frac{1}{C_1}$$

$$\Rightarrow y\cdot(1+(y')^2) = \underbrace{\left(\frac{1}{C_1}\right)^2}_{C}$$

Найдём решение полученного дифф ур-я в параметрическом виде

Положим $y' = ctg\, t$

Тогда $y = \frac{C}{1+(y')^2} = \frac{C}{1+ctg^2 t} = C\sin^2 t$

$\frac{dy}{dx} = ctg\, t \Rightarrow dx = \frac{dy}{ctg\, t} = \frac{d(C\sin^2 t)}{ctg\, t} =$

$= \frac{2C\sin t \cos t}{ctg\, t} dt = 2C\sin^2 t\, dt$

$\Rightarrow x = \int 2C\sin^2 t\, dt = C\int(1-\cos 2t)dt =$

$= C\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right) = \frac{C}{2}(2t - \sin 2t) + C_2$

Т.к. $\underbrace{x(0)}_{x_1} = \underbrace{y(0)}_{y_1} = 0$, то $C_2 = 0$

$\Rightarrow$ Искомая экстремаль

$$\begin{cases} x = \frac{C}{2}(2t - \sin 2t) \\ y = C\sin^2 t = \frac{C}{2}(1-\cos 2t) \end{cases}$$

Обозначим $2t = p$ Получим

$$\begin{cases} x = \frac{C}{2}(p - \sin p) \\ y = \frac{C}{2}(1-\cos p) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Экстремаль является циклоидой
Значение C определяется из условия прохождения экстремали ч/з $B(x_2, y_2)$

Задача 2 (о наименьшей площади поверхности вращения)

Среди всех плоских гладких кривых, соединяющих точки $A(x_1,y_1)$ и $B(x_2,y_2)$, найти ту, которая при вращении вокруг Ox образует поверхность наименьшей площади

Ранее показали, что на искомой кривой достигает min функционал

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} 2\pi y \sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

Найдём экстремали этого функционала. Имеем

$$F(y,y') = \underbrace{y\sqrt{1+(y')^2}}_{\text{нет } x}$$

$$\Rightarrow F - y'F'_{y'} = y\sqrt{1+(y')^2} - y' \cdot y \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = C_1$$

$$\Rightarrow \frac{y(1+(y')^2) - y(y')^2}{\sqrt{1+(y')^2}} = C_1$$

$$\Rightarrow \frac{y}{\sqrt{1+(y')^2}} = C_1$$

Найдём общее решение полученного дифф уравнения в параметрическом виде
Полагаем

$$y' = \operatorname{sh} t$$

Тогда

$$y = C_1\sqrt{1+(y')^2} = C_1\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t} = C_1 \operatorname{ch} t$$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{sh} t \Rightarrow dx = \frac{dy}{\operatorname{sh} t} = \frac{d(C_1 \operatorname{ch} t)}{\operatorname{sh} t} = \frac{C_1 \operatorname{sh} t\,dt}{\operatorname{sh} t} = C_1\,dt$$

$$\Rightarrow x = C_1 t + C_2$$

Т.о. искомая поверхность образуется вращением линии, параметрические ур-я которой имеют вид
$$\begin{cases} x = C_1 t + C_2 \\ y = C_1 \operatorname{ch} t \end{cases}$$

Исключая параметр t получим:

$$y = C_1 \operatorname{ch} \frac{x - C_2}{C_1}$$

— сем-во цепных линий

Поверхность, получающуюся в результате вращения цепной линии, наз-ют катеноидом

Постоянные C_1 и C_2 находятся из граничных условий.

$$y_1 = C_1 \operatorname{ch} \frac{x_1 - C_2}{C_1}, \quad y_2 = C_1 \operatorname{ch} \frac{x_2 - C_2}{C_1}$$

М показать, что в зависимости от положения т-к A и B может существовать одно, два или не существовать ниодного решения