МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«**НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**»

О.Н. Имас, Е.Г. Пахомова, С.В. Рожкова, И.Г. Устинова

ЛЕКЦИИ ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

*Рекомендовано в качестве учебного пособия
Редакционно-издательским советом
Томского политехнического университета*

Издательство
Томского политехнического университета
2012

УДК 517.9(075.8)
ББК 22.161.1я73
Л436

Имас О.Н.

Л436 Лекции по дифференциальным уравнениям: учебное пособие / О.Н. Имас, Е.Г. Пахомова, С.В. Рожкова, И.Г. Устинова; Национальный исследовательский Томский политехнический университет. − Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2012. – 193 с.

Учебное пособие представляет собой конспект лекций по курсу «Дифференциальные уравнения», читаемых авторами для студентов АВТФ и ЭТО ТПУ. Теоретический материал сопровождается подробно разобранными примерами. Кроме того, в пособии рассмотрены несколько вопросов, которые, как правило, не включаются в лекционные курсы и оставляются на самостоятельное изучение.

Пособие предназначено для студентов технических вузов.

УДК 517.9(075.8)
ББК 22.161.1я73

Рецензенты

Доктор технических наук,
декан ФПМК ТПУ, профессор
А.М. Горцев

Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры высшей математики СТИ НИЯУ МИФИ
И.Л. Фаустова

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее пособие предназначено для студентов института кибернетики, но может быть использовано студентами и других инженерных специальностей. В нем рассматриваются три раздела теории обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). В первой главе изучаются уравнения первого порядка. Во второй главе рассматриваются уравнения высших порядков, при этом, наряду с задачей Коши рассматривается краевая задача. В частности, один параграф посвящен задаче Штурма-Лиувилля, как частному случаю краевых задач. В третьей главе изучаются системы дифференциальных уравнений. Здесь же несколько параграфов посвящено линейным уравнениям в частных производных первого порядка. Хотя уравнения в частных производных являются частью курса «уравнения математической физики», авторы считают, что линейные уравнения в частных производных первого порядка полезнее изучать в рамках курса дифференциальных уравнений, так как интегрирование такого типа уравнений сводится к интегрированию системы ОДУ. Кроме того, это позволит студентам привыкнуть к работе с уравнениями, связывающими функцию нескольких переменных и ее частные производные, и подготовит их к решению объемных задач математической физики.

Для удобства работы с пособием авторы использовали в главах сквозную нумерацию параграфов. Нумерация формул, теорем и примеров привязана к параграфам. Использовались символы ■ – доказательство закончено и ◇ – решение примера завершено. Дополнительная информация, уточняющая или поясняющая определения или теоремы, выделена в виде замечаний.

ВВЕДЕНИЕ

Понятия, а вслед за ними и целые разделы, существующие в современной математике, часто кажутся весьма далекими от реального мира. Но именно они позволяют понять и описать строение атомного ядра, движения геологических плит, рассчитать движение объектов вблизи и в далеком космосе, дают возможность строить математические модели экономики, применять математику в изучении общественных явлений.

Один из таких разделов, которые в обязательном порядке изучают студенты младших курсов – дифференциальные уравнения. Особенностью дифференциальных уравнений является их непосредственная связь с приложениями. Чтобы изучить достаточно сложное явление природы, предварительно рассматривают всевозможные связи между величинами, их характеризующими. Затем эти связи выражают математически – функциями и их производными. В результате получают дифференциальное уравнение, а, зачастую, и систему дифференциальных уравнений. Решая такое уравнение (или систему), мы, фактически, восстанавливаем функцию по ее свойствам. Далее, по виду полученной функции можно делать выводы о том, как в дальнейшем будет развиваться изучаемое явление, какие условия надо задать, чтобы достигнуть требуемых результатов.

Как известно, теория обыкновенных дифференциальных уравнений начала развиваться в XVII веке одновременно с возникновением дифференциального и интегрального исчисления. Можно сказать, что необходимость решать дифференциальные уравнения для нужд механики, то есть находить траектории движений, явилась толчком для создания Ньютоном нового исчисления. Законы Ньютона позволяют строить математическую модель механического движения, которая обычно представляет собой дифференциальное уравнение. Рассмотрим, например, подробнее такую задачу.

С некоторой высоты сброшено тело массой m. Требуется установить закон изменения скорости падения тела $v(t)$, если на него действует сила сопротивления воздуха, пропорциональная скорости (коэффициент пропорциональности k). По II закону Ньютона

$$ma = F,$$

где $a = \dfrac{dv}{dt}$ – ускорение движущегося тела, $F = F_T + F_{сопр} = mg - kv$ – сумма сил, действующих на тело – силы тяжести и силы сопротивления воздуха. Таким образом, имеем уравнение, связывающее искомую функцию $v(t)$ и ее производную $\frac{dv}{dt}$:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv,$$

т. е. дифференциальное уравнение.

В настоящее время теория дифференциальных уравнений является одним из самых больших разделов современной математики. Ее разработкой занимались крупнейшие ученые XVIII века, такие как Ж. Даламбер, Ж. Л. Лагранж, А. Клеро и др. Наибольшую роль в развитии этой теории сыграли труды Л. Эйлера. В первых двух томах его «Интегрального исчисления» содержится немало классических примеров интегрирования дифференциальных уравнений, в том числе и решения линейного однородного уравнения любого порядка с постоянными коэффициентами.

Отметим, что изучение обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) на младших курсах обычно остается на уровне открытий XVIII века, и заключается в освоении приемов интегрирования лишь хорошо изученных типов уравнений и некоторых экзотических случаев, ибо "точно" интегрируемые уравнения – это исключительная редкость во множестве возможных уравнений. Переходя к реальным объектам исследования, студенты, инженеры и аспиранты сталкиваются с более сложными моделями и их математической реализацией. Даже в кругах исследователей – «чистых математиков» довольно долго интегрирование уравнений в квадратурах, теоретико-групповой подход к уравнениям считались тупиковой ветвью в науке. Тем не менее, теория обыкновенных дифференциальных уравнений является базой для уравнений математической физики и, кроме того, развитие современной физики показало, что именно те самые редкие и хорошо изученные случаи и представляют наибольший физический интерес. А успехи, достигнутые в ряде разделов математики – в алгебраической топологии, дифференциальной геометрии и коммутативной алгебре, позволяют надеяться на то, что общая теория уравнений с частными производными будет построена.

ГЛАВА I
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

§ 1. Основные понятия

В математике и физике часто встречаются задачи, для решения которых требуется решить уравнение, содержащее не только неизвестную функцию и ее аргумент, но и производную неизвестной функции.

Уравнение вида
$$F(x, y, y', y'', y''', \ldots, y^{(n)}) = 0, \qquad (1.1)$$
связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y = y(x)$ и ее производные $y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)$, называется ***обыкновенным дифференциальным уравнением***. Порядок старшей производной, входящей в дифференциальное уравнение, называется ***порядком дифференциального уравнения***.

Например, уравнения
$$y' + xy - x^2 = 0,$$
$$x(y')^2 + e^x = 0,$$
$$yy' - 1 = 0,$$
$$(y')^5 + e^{y^2} = 0$$
будут дифференциальными уравнениями первого порядка; уравнения
$$xy'' - (y')^3 - y = 0,$$
$$y'' - y' = 1$$
будут дифференциальными уравнениями второго порядка; уравнение
$$y^2 - y''' + x^5 = 0$$
имеет третий порядок.

Функция $y = \varphi(x)$ называется ***решением дифференциального уравнения*** (1.1) на интервале (a, b), если при ее подстановке в это уравнение получается тождество, справедливое для всех x из интервала (a,b).

Например, функция $y = \cos x$ является решением дифференциального уравнения $y'' + y = 0$ на $(-\infty,+\infty)$; функция $y = \sqrt{1 - x^2}$ будет решением уравнения $y' = -\dfrac{x}{y}$ в интервале $(-1; 1)$. Чтобы это проверить, достаточно подставить функцию в соответствующее уравнение.

Уравнение

$$\Phi(x, y) = 0,$$

задающее в неявном виде решение дифференциального уравнения (1.1), называется ***интегралом дифференциального уравнения***.

График решения (интеграла) дифференциального уравнения называется ***интегральной кривой***.

Процесс нахождения решений дифференциального уравнения называется ***интегрированием дифференциального уравнения***. Это название не случайно, так как нахождение решений обычно связано с процессом интегрирования. Поскольку процесс интегрирования функции приводит к появлению множества функций, то и решений любое дифференциальное уравнение тоже будет иметь множество. Основной задачей теории дифференциальных уравнений является отыскание всех решений данного дифференциального уравнения в заданной области (в явной или неявной форме). Дифференциальное уравнение называется ***интегрируемым в квадратурах***, если все его решения могут быть получены в результате конечной последовательности элементарных действий над известными функциями и интегрированием этих функций. Таких уравнений сравнительно немного. В нашем курсе мы рассмотрим основные типы дифференциальных уравнений, интегрируемых в квадратурах.

Замечание. В математике рассматриваются также уравнения, которые связывают искомую функцию нескольких переменных, ее аргументы и частные производные. Такие уравнения называются ***дифференциальными уравнениями в частных производных***. Их интегрирование представляет собой значительно более сложную задачу, чем интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений. Позднее мы познакомимся с одним типом дифференциальных уравнений в частных производных.

§ 2. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для уравнения, разрешенного относительно производной

В общем случае дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид

$$\boxed{F(x, y, y') = 0,} \tag{2.1}$$

где x – независимая переменная, y – неизвестная искомая функция, F – заданная функция трех переменных. В §§ 2-10 мы будем рассматривать дифференциальные уравнения первого порядка, которые можно записать в виде

$$\boxed{y' = f(x, y).} \tag{2.2}$$

Уравнение (2.2) называется уравнением первого порядка, ***разрешенным относительно производной***. Для уравнений вида (2.2) справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2.1 (Коши). *Пусть в уравнении*

$$y' = f(x, y) \tag{2.2}$$

функция $f(x, y)$ *удовлетворяет двум условиям:*

1) $f(x, y)$ *непрерывна в некоторой области* D *плоскости* xOy*;*

2) *ее частная производная* $f'_y(x, y)$ *в области* D *ограничена.*

Тогда для любой точки $M_0(x_0, y_0) \in D$ *существует единственное решение* $y = \varphi(x)$ *уравнения* (2.2)*, определенное в некотором интервале* (a, b)*, содержащем точку* x_0*, и удовлетворяющее условию* $y_0 = \varphi(x_0)$.

Числа x_0, y_0 называются ***начальными значениями (данными)*** для решения $y = \varphi(x)$, а условие $y_0 = \varphi(x_0)$ – ***начальным условием*** решения. Задача нахождения решения $y = \varphi(x)$ дифференциального уравнения (2.2), удовлетворяющего начальному условию $y_0 = \varphi(x_0)$, называется ***задачей Коши***. Поэтому теорему 2.1 называют ***теоремой существования и единственности решения задачи Коши***.

Геометрически задание начального условия означает, что на плоскости xOy задается точка $M_0(x_0, y_0)$, через которую проходит интегральная кривая. Согласно теореме 2.1, через каждую точку области D проходит, и притом единственная, интегральная кривая уравнения (2.2). Закрепляя значение x_0 и изменяя в некоторых пределах значение y_0 (так, чтобы точка (x_0, y_0) принадлежала области D), для каждого числа y_0 будем получать свое решение. В результате, вся область D будет покрыта интегральными кривыми, которые нигде между собой не пересекаются (рис.2.1).

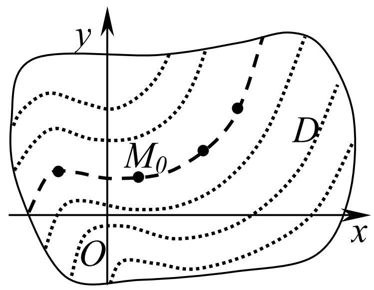

Рис.2.1.

Таким образом, теорема 2.1 подтверждает высказанное нами ранее предположение о том, что дифференциальное уравнение имеет множество решений и говорит о том, что эта совокупность решений зависит от произвольной постоянной.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Общим решением*** *дифференциального уравнения* (2.2)

$$y' = f(x, y)$$

в области D *существования и единственности решения задачи Коши называется функция* $y = \varphi(x, C)$, *зависящая от* x *и одной произвольной постоянной* C*, которая удовлетворяет следующим двум условиям:*

1) *при любом допустимом значении постоянной C она удовлетворяет уравнению* (2.1);
2) *каково бы ни было начальное условие* $y_0 = y(x_0)$ *(где* $(x_0, y_0) \in D$*), можно найти единственное значение* C_0 *такое, что функция* $y = \varphi(x, C_0)$ *удовлетворяет данному начальному условию.*

Уравнение $\Phi(x, y, C) = 0$, задающее общее решение в неявном виде, называется ***общим интегралом уравнения***.

С геометрической точки зрения общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения представляет собой семейство интегральных кривых, зависящих от одного параметра. Решение уравнения, удовлетворяющее условию $y_0 = y(x_0)$ (где $(x_0, y_0) \in D$), будет изображаться определенной кривой этого семейства (рис.2.1).

Замечание. Теорема 2.1 дает достаточные условия существования (1 условие теоремы) и единственности (2 условие теоремы) решения задачи Коши. Поэтому возможно, что в точке (x_0, y_0) условия теоремы 2.1 не выполняются, а решение $y = y(x)$ уравнения (2.2), удовлетворяющее условию $y_0 = y(x_0)$, существует и единственно.

ПРИМЕР 2.1. Рассмотрим уравнение $y' = \dfrac{1}{y^2}$. Имеем $f(x, y) = \dfrac{1}{y^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{2}{y^3}$. В точках $(x_0, 0)$ оси *Ox* функция $f(x, y)$ разрывна и, следовательно, условия теоремы 2.1 не выполняются. Но через каждую точку $(x_0, 0)$ проходит единственная интегральная кривая $y = \sqrt[3]{3(x - x_0)}$ (рис. 2.2). ◇

ПРИМЕР 2.2. Рассмотрим уравнение $y' = \dfrac{3}{2}\sqrt[3]{y^2}$. Имеем $f(x, y) = \dfrac{3}{2}\sqrt[3]{y^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{y}}$. Во всех точках плоскости *xOy* функция $f(x, y)$ определена и непрерывна. Однако в точках $(x_0, 0)$ производная функции $\dfrac{\partial f}{\partial y} \to \infty$. Так как в точках оси *Ox* нарушается второе условие теоремы 2.1, то возможно нарушение единственности решения. Легко проверить, что функция $y = \dfrac{(x+C)^3}{8}$ является общим решением данного уравнения. Кроме того, очевидно, что уравнение имеет решение $y \equiv 0$. Таким образом, через каждую точку $(x_0, 0)$ проходит две интегральные кривые (рис. 2.3), и в этих точках действительно нарушается единственность решения. ◇

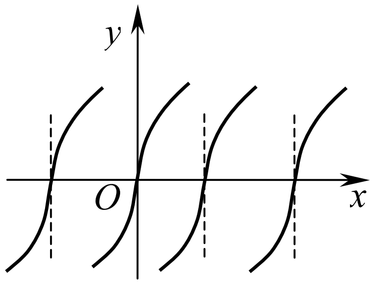

Рис.2.2.

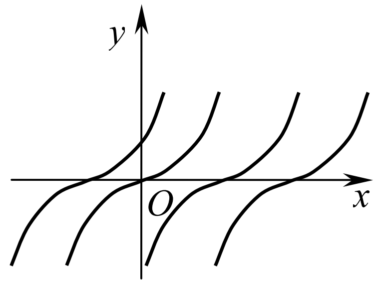

Рис.2.3.

Решение (интеграл), в каждой точке которого выполняется условие единственности, называется ***частным***. Очевидно, что любое частное решение (интеграл) получается из общего решения (интеграла) при конкретном значении постоянной C (включая $C = \pm\infty$).

Общее решение не всегда описывает все множество решений дифференциального уравнения (см. пример 2.2). Решение (интеграл) $y = \psi(x)$, в каждой точке которого нарушено условие единственности (т. е. через каждую точку интегральной кривой $y = \psi(x)$, проходит помимо $y = \psi(x)$ еще хотя бы одна интегральная кривая), называется ***особым***. Особое решение, очевидно, не входит в общее решение дифференциального уравнения. График особого решения называют ***особой интегральной кривой уравнения***. С геометрической точки зрения особая интегральная кривая является огибающей семейства интегральных кривых

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Линия ℓ называется **огибающей** однопараметрического семейства кривых, если она в каждой своей точке касается одной кривой семейства, причем в различных точках она касается различных кривых.*

ПРИМЕР 2.3. Прямые $y = \pm R$ являются огибающими семейства окружностей $(x+C)^2 + y^2 = R^2$ (рис. 2.4). ◇

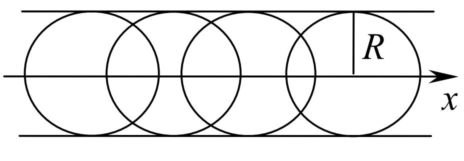

Рис. 2.4.

ПРИМЕР 2.4. Прямая $y = 0$ являются огибающей семейства кривых $y = \dfrac{(x+C)^3}{8}$ (рис. 2.3). $\diamond$

Интегрируя дифференциальное уравнение, необходимо всегда проверять, не были ли потеряны в процессе преобразования какие-нибудь решения. Если уравнение имеет особое решение, оно всегда «теряется» и обладает тем свойством, что оно могло бы быть включено в общее решение, если бы допускалось $C = C(x)$ (так как огибающая касается в разных точках разных кривых семейства).

Вопросы, связанные с существованием и нахождением особых решений в нашем курсе подробно рассматриваться не будут.

§ 3. Уравнения с разделенными переменными

Заметим, что дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной, всегда можно записать в виде

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \tag{3.1}$$

(иногда эту форму записи называют ***дифференциальной формой уравнения***).

Действительно, так как $y' = \dfrac{dy}{dx}$, то уравнение (2.2) можно переписать следующим образом:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} - f(x, y) = 0.$$

Умножая каждое слагаемое на dx, находим

$$dy - f(x, y)dx = 0.$$

Это уравнение вида (3.1), где $P(x, y) = -f(x, y)$, $Q(x, y) = 1$.

Обратно, всякое уравнение вида (3.1), если $Q(x, y) \neq 0$, можно разрешить относительно производной:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

или

$$y' = f(x, y), \text{ где } f(x, y) = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}.$$

В дальнейшем мы будем использовать ту форму записи уравнения, разрешенного относительно производной (форму (2.2) или (3.1)), которая нам более удобна в конкретном случае. При этом, если уравнение записано в виде (3.1), то обычно предполагают, что переменные x и y равноправны.

Дифференциальное уравнение вида

$$\boxed{f(x)dx+\varphi(y)dy=0,} \tag{3.2}$$

где $f(x)$ и $\varphi(y)$ – непрерывные функции, называется ***уравнением с разделенными переменными.***

Найдем общий интеграл уравнения (3.2). Пусть $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$, $\Phi(y)$ – первообразная функции $\varphi(y)$. Тогда

$$f(x)dx=dF, \quad \varphi(y)dy=d\Phi,$$

$$\Rightarrow \quad f(x)dx+\varphi(y)dy=d(F+\Phi).$$

Из (3.2) следует, что $d(F+\Phi)=0$. Тогда

$$F(x)+\Phi(y)=C, \tag{3.3}$$

где C – произвольная постоянная.

Итак, мы получили соотношение (3.3), связывающее решение y, независимую переменную x и произвольную постоянную C, т. е. получили общий интеграл уравнения (3.2). Его принято записывать в виде

$$\int f(x)dx+\int\varphi(y)dy=C, \tag{3.4}$$

где C – произвольная постоянная.

Замечание. В (3.4), как и всюду в теории дифференциальных уравнений, символом $\int f(x)dx$ обозначают одну из первообразных функции (а не все множество первообразных, как это принято в математическом анализе).

ПРИМЕР 3.1. Найти общий интеграл уравнения $xdx+3y^2dy=0$.

РЕШЕНИЕ. Это уравнение с разделенными переменными. Интегрируя, получаем:

$$\int xdx+3\int y^2dy=C \;\Rightarrow\; \frac{x^2}{2}+y^3=C \;\Rightarrow\; x^2+2y^3=2C.$$

Обозначим $2C=\widetilde{C}$ и получим, что общий интеграл данного уравнения имеет вид

$$x^2+2y^3=\widetilde{C}. \ \diamond$$

§ 4. Уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение вида

$$\boxed{M_1(x)\cdot N_1(y)dx + M_2(x)\cdot N_2(y)dy = 0,} \tag{4.1}$$

называется ***уравнением с разделяющимися переменными*** (функции $M_1(x)$, $N_1(y)$, $M_2(x)$, $N_2(y)$ предполагаются непрерывными).

Иначе говоря, *уравнение с разделяющимися переменными, это уравнение, в котором коэффициенты при дифференциалах распадаются на множители, зависящие только от* x *и только от* y.

Уравнение (4.1) может быть приведено к уравнению с разделенными переменными путем деления обеих его частей на выражение $N_1(y)\cdot M_2(x)$. Действительно, в этом случае имеем

$$\frac{M_1(x)\cdot N_1(y)}{N_1(y)\cdot M_2(x)}dx + \frac{M_2(x)\cdot N_2(y)}{N_1(y)\cdot M_2(x)}dy = 0.$$

После сокращения получим уравнение с разделенными переменными

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0.$$

Замечания. 1) Деление на $N_1(y)\cdot M_2(x)$ может привести к потере решений, обращающих в нуль произведение $N_1(y)\cdot M_2(x)$. Поэтому чтобы получить полное решение, необходимо рассмотреть корни уравнений $N_1(y)=0$, $M_2(x)=0$.

2) Уравнение, разрешенное относительно y', является уравнением с разделяющимися переменными, если оно имеет вид:

$$y' = f(x)\cdot\varphi(y).$$

Действительно, разделим уравнение (4.1) на $M_2(x)\cdot N_2(y)dx$

$$\frac{M_1(x)\cdot N_1(y)}{M_2(x)\cdot N_2(y)} + \frac{dy}{dx} = 0$$

и получим $$y' = f(x)\cdot\varphi(y),$$

где $$f(x) = -\frac{M_1(x)}{M_2(x)},\ \varphi(y) = \frac{N_1(y)}{N_2(y)}.$$

ПРИМЕР 4.1. Найти все решения уравнения

$$2x\cdot\sqrt{y}dx + (1-x^2)dy = 0.$$

РЕШЕНИЕ. Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными, так как коэффициенты при dx и dy представляет собой произведение двух функций, одна из которых зависит только от x, а другая – только от y. Разделим обе части уравнения на $(1-x^2)\cdot\sqrt{y}$:

$$\frac{2x}{(1-x^2)}dx+\frac{dy}{\sqrt{y}}=0 \qquad (\text{где } (1-x^2)\cdot\sqrt{y}\neq 0).$$

Получили уравнение с разделенными переменными. Его общий интеграл

$$\int\frac{2x}{(1-x^2)}dx+\int\frac{dy}{\sqrt{y}}=C,$$

$$-\ln\left|1-x^2\right|+2\sqrt{y}=C.$$

Найдем общее решение. Имеем:

$$\sqrt{y}=\frac{1}{2}\left(\ln\left|1-x^2\right|+C\right) \quad \text{или} \quad y=\left(\ln\sqrt{\left|1-x^2\right|}+\frac{1}{2}C\right)^2.$$

Так как C – произвольная постоянная, то $\frac{1}{2}C$ можно переобозначить через C. Следовательно, общее решение уравнения будет иметь вид:

$$y=\left(\ln\sqrt{\left|1-x^2\right|}+C\right)^2.$$

При делении на $(1-x^2)\cdot\sqrt{y}$ мы могли потерять решения. Поэтому необходимо рассмотреть корни уравнений $1-x^2=0$, $\sqrt{y}=0$.

1) $1-x^2=0 \Rightarrow x=\pm1$.

Подстановкой в дифференциальное уравнение убеждаемся, что $x=\pm1$ являются решениями. Проверим, входят ли они в общий интеграл. Имеем: $$2\sqrt{y}-\ln\left|1-x^2\right|=C.$$

$$\Rightarrow \quad 1-x^2=\pm e^{-C}\cdot e^{2\sqrt{y}}$$

$$\Rightarrow \quad x=\pm\sqrt{1-\widetilde{C}\cdot e^{2\sqrt{y}}}, \quad \text{где } \widetilde{C}=\pm e^{-C}\neq 0.$$

Решения $x=\pm1$ могут быть включены в общее решение, если снять ограничение на $\widetilde{C}$.

2) $\sqrt{y}=0 \Rightarrow y=0$.

Подставляя в исходное дифференциальное уравнение убеждаемся, что $y=0$ удовлетворяет дифференциальному уравнению и в общее решение (интеграл) не входит, но могло бы входить, если бы допускалось $C=C(x)=-\ln\sqrt{\left|1-x^2\right|}$. Это означает, что через каждую точку кривой $y=0$ проходит еще одна интегральная кривая, входящая в общее решение и, следовательно, мы имеем дело с особым решением.

Таким образом, все решения дифференциального уравнения определяются равенствами:

$$y=\left(\ln\sqrt{\left|1-x^2\right|}+C\right)^2,\ y=0,$$

причем решение $y=0$ – особое. ◇

ПРИМЕР 4.2. Найти все решения уравнения $ydx-xdy=0$ и указать частное решение, удовлетворяющее условию $y(1)=2$.

РЕШЕНИЕ. Разделим обе части уравнения на $x\cdot y$:

$$\frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}=0 \quad (\text{где } x\cdot y\neq 0).$$

Получили уравнение с разделенными переменными. Его общий интеграл

$$\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dy}{y}=C \qquad \text{или} \qquad \ln|x|-\ln|y|=C.$$

Найдем общее решение. Так как функция $y=\ln x$ может принимать любое действительное значение, то произвольную постоянную можно представить в виде $\ln C$, где $C>0$. Получим:

$$\ln|x|-\ln|y|=\ln C \qquad \text{или} \qquad |y|=C\cdot|x|,$$

откуда

$$y=\pm C\cdot x.$$

Так как C – произвольная постоянная, то $\pm C$ можно переобозначить через C. Следовательно, общее решение уравнения будет иметь вид:

$$y=C\cdot x, \quad \text{где } C\neq 0.$$

При делении на $x\cdot y$ мы могли потерять решения. Поэтому необходимо рассмотреть функции $x=0$ и $y=0$.

1) Подстановкой в дифференциальное уравнение убеждаемся, что $y=0$ является решением. В общее решение оно войдет при $C=0$. Следовательно, ограничение на значения константы необходимо снять.
2) $x=0$ – удовлетворяет дифференциальному уравнению и в общее решение входит при $\frac{1}{C}=0$, т. е. при $C=\infty$.

Таким образом, все решения дифференциального уравнения определяются равенством:

$$y=C\cdot x, \quad \text{где } C \text{ – любое число.}$$

Найдем решение, удовлетворяющее начальному условию $y(1)=2$. Подставим значения $x_0=1$, $y_0=2$ в общее решение и найдем значение C:

$$2=C\cdot 1 \quad \Rightarrow \quad C=2.$$

Таким образом, при $C=2$ получаем частное решение

$$y=2x,$$

которое удовлетворяет начальному условию $y(1)=2$. ◇

В заключение параграфа рассмотрим следующее уравнение:

$$y' = f(ax+by+c), \tag{4.2}$$

где a, b и c – некоторые числа. Оно приводится к уравнению с разделяющимися переменными заменой $z(x)=ax+by+c$.

Действительно, в этом случае имеем:

$$\frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}\cdot\left(\frac{dz}{dx} - a\right).$$

Тогда уравнение (4.2) примет вид

$$\frac{1}{b}\cdot\left(\frac{dz}{dx} - a\right) = f(z) \quad \text{или} \quad \frac{dz}{dx} = bf(z) + a.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными, интегрируя которое получаем

$$\frac{dz}{bf(z)+a} = dx \quad (\text{где } bf(z)+a \neq 0);$$

$$\Rightarrow \int \frac{dz}{bf(z)+a} = x + C.$$

ПРИМЕР 4.3. Найти общее решение уравнения $y' = 2x - y$.

РЕШЕНИЕ. Положим $z = 2x - y$. Тогда

$$\frac{dz}{dx} = 2 - \frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 2 - \frac{dz}{dx}.$$

Подставляя эти выражения в исходное уравнение, получим:

$$2 - \frac{dz}{dx} = z \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} = 2 - z.$$

Разделим переменные:

$$\frac{dz}{2-z} = dx \quad (\text{где } 2 - z \neq 0).$$

Проинтегрируем:

$$\int \frac{dz}{2-z} = \int dx - \ln C, \text{ где } C>0;$$

$$\ln|2-z| = -x + \ln C, \text{ где } C>0;$$

$$\Rightarrow \quad 2 - z = e^{-x}\cdot C, \quad \text{где } C\neq 0;$$

$$\Rightarrow \quad z = 2 + C\cdot e^{-x}.$$

Возвращаясь к старой переменной, получим:

$$2x - y = 2 + C \cdot e^{-x}, \quad \text{где } C \neq 0.$$

В процессе преобразований потеряно решение $z=2$ (т. е. $y=2x-2$), которое может быть включено в общее при $C=0$. Таким образом, общее решение

$$y=2x-2-C\cdot e^{-x},\ \forall C.\ \diamond$$

§ 5. Однородные уравнения

К уравнению с разделяющимися переменными всегда можно привести уравнения, которые получили название однородных.

Функция $M(x,y)$ называется ***однородной измерения m*** (или ***однородной степени m***), если при любом $t\neq 0$ справедливо равенство

$$\boxed{M(t\cdot x, t\cdot y) = t^m \cdot M(x,y).}$$

Например, функция $f(x,y)=\sqrt[4]{x^8+y^8}$ – однородная измерения 2, так как

$$f(t\cdot x, t\cdot y)=\sqrt[4]{t^8x^8+t^8y^8}=t^2\cdot\sqrt[4]{x^8+y^8}=t^2\cdot f(x,y);$$

функция $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{xy}$ – однородная измерения 0, так как

$$f(t\cdot x, t\cdot y)=\frac{t^2x^2+t^2y^2}{t^2xy}=\frac{x^2+y^2}{xy}=t^0\cdot f(x,y).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Уравнение первого порядка*

$$y' = f(x,y)$$

называется ***однородным*** *относительно x и y, если* $f(x,y)$ *– однородная функция нулевого измерения.*

Покажем, как уравнение, однородное относительно x и y, можно привести к уравнению с разделяющимися переменными.

По определению имеем $f(t\cdot x, t\cdot y)=f(x,y)$ для любого $t\neq 0$. Положим в этом тождестве $t=\dfrac{1}{x}$ и получим

$$f(x,y)=f\left(1,\frac{y}{x}\right),$$

т. е. однородная функция нулевого измерения зависит от отношения $\dfrac{y}{x}$.

Следовательно, уравнение (5.1) можно записать в виде

$$y' = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Сделаем замену $\frac{y}{x} = z$. Тогда $y = xz$ и $\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}$. Подставим эти выражения в уравнение $y' = f(x, y)$ и получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$z + x\frac{dz}{dx} = \varphi(z) \quad \text{или} \quad x\frac{dz}{dx} = \varphi(z) - z.$$

Разделяя переменные и интегрируя, находим:

$$\frac{dz}{\varphi(z) - z} = \frac{dx}{x} \quad (\text{где } \varphi(z) - z \neq 0);$$

$$\Rightarrow \int \frac{dz}{\varphi(z) - z} = \ln|x| + C.$$

Подставив после интегрирования вместо z отношение $\frac{y}{x}$, получим общий интеграл исходного уравнения.

Замечание. Дифференциальное уравнение

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

является однородным относительно x и y, если функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ – однородные функции одного и того же измерения.

Действительно, в этом случае

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)},$$

а отношение двух однородных функций одного и того же измерения, очевидно, является функцией нулевого измерения.

ПРИМЕР 5.1. Найти общее решение уравнения $y' + \frac{x + y}{x + 2y} = 0$.

РЕШЕНИЕ. Запишем уравнение в виде

$$y' = -\frac{x + y}{x + 2y}.$$

Функции $x + y$ и $x + 2y$ – однородные первого измерения. Тогда функция $f(x, y) = -\frac{x + y}{x + 2y}$ – однородная нулевого измерения. Действительно,

$$f(tx, ty) = -\frac{tx + ty}{tx + 2ty} = -\frac{x + y}{x + 2y} = t^0 \cdot f(x, y), \quad m = 0.$$

Следовательно, имеем однородное уравнение.

Делаем замену $\frac{y}{x}=z$. Тогда $y=xz$ и $\frac{dy}{dx}=z+x\frac{dz}{dx}$. Подставляя в уравнение, получаем

$$z+x\frac{dz}{dx}+\frac{1+z}{1+2z}=0 \quad \text{или} \quad x\frac{dz}{dx}+\frac{2z^2+2z+1}{1+2z}=0.$$

Разделяя переменные и интегрируя, находим:

$$\frac{(2z+1)dz}{2z^2+2z+1}+\frac{dx}{x}=0 \quad \text{или} \quad \frac{1}{2}\cdot\frac{d(2z^2+2z+1)}{2z^2+2z+1}+\frac{dx}{x}=0,$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\ln\left|2z^2+2z+1\right|+\ln\left|x\right|=\ln C,\ C>0;$$

$$\Rightarrow \ln\left|2z^2+2z+1\right|+\ln\left|x\right|^2=\ln C^2,\ C>0;$$

$$\Rightarrow \left|2z^2+2z+1\right|\cdot x^2=C^2,\ C>0.$$

Подставляя $\frac{y}{x}=z$, получаем $\left|2y^2+2xy+x^2\right|=C^2,\ C>0$.

$$\Rightarrow 2y^2+2xy+x^2=\pm C^2.$$

Переобозначим $\pm C^2$ через C. Тогда общий интеграл уравнения.

$$2y^2+2xy+x^2=C, \quad C\neq 0.$$

Потери решений в процессе интегрирования не произошло, так как $2z^2+2z+1\neq 0$, $\forall z$, а $x=0$ не является решением. ◇

Замечание. Некоторые однородные уравнения проще интегрируются с помощью подстановки $\frac{x}{y}=z$, которая, как легко убедиться, также приводит однородное уравнение к уравнениию с разделяющимися переменными.

ПРИМЕР 5.2. Найти общее решение уравнения $xdy-ydx=ydy$.

РЕШЕНИЕ. Запишем уравнение в виде

$$(x-y)dy=ydx.$$

Функции $x-y$ и x – однородные измерения 1. Следовательно, уравнение является однородным относительно x и y. Но, так как уравнение можно записать в виде

$$\frac{x}{y}-1=\frac{dx}{dy},$$

то в данном случае за свободную переменную удобнее выбрать y, а за искомую функцию $x=x(y)$.

Положим $\frac{x}{y}=z$.

$$\Rightarrow \quad x=z\cdot y \quad \text{и} \quad x'=z+y\cdot z'.$$

Подставляя в уравнение выражения для x и x', получаем

$$z-1=z+y\cdot z'.$$

Приводя подобные и разделяя переменные, находим:

$$\frac{dy}{y}=-dz \qquad (y\neq 0).$$

Отсюда после интегрирования будем иметь

$$\ln|y|=\ln C-z, \quad C>0;$$

$$\Rightarrow \quad y=Ce^{-z}, \quad C\neq 0.$$

Заменяя z на $\frac{x}{y}$, получаем общий интеграл

$$y=Ce^{-\frac{x}{y}}.$$

При делении на y мы могли потерять решение $y=0$. Подстановкой в дифференциальное уравнение убеждаемся, что $y=0$ является решением. Из общего интеграла оно может быть получено при $C=0$.

Таким образом, все решения дифференциального уравнения определяются равенством:

$$y=Ce^{-\frac{x}{y}},\ \forall C.\diamond$$

ПРИМЕР 5.3. Найти общее решение уравнения

$$\frac{dx}{x^2-xy+y^2}=\frac{2dy}{y^2-4xy}.$$

РЕШЕНИЕ. Запишем уравнение в виде

$$y'=\frac{y^2-4xy}{2(x^2-xy+y^2)} \quad \text{или} \quad x'=\frac{2(x^2-xy+y^2)}{y^2-4xy}.$$

Функции $f(x,y)=\frac{y^2-4xy}{x^2-xy+y^2}$ и $\varphi(x,y)=\frac{2(x^2-xy+y^2)}{y^2-4xy}$ – однородные нулевого измерения. Следовательно, рассматриваемое уравнение однородное, причем здесь замены $\frac{x}{y}=z$ и $\frac{y}{x}=z$ приведут к уравнениям одинаковой сложности. Например, будем работать с уравнением

$$x'=\frac{2(x^2-xy+y^2)}{y^2-4xy}.$$

Тогда свободной переменной является y, а искомая функция $x=x(y)$. Полагаем
$$\frac{x}{y}=z,$$
$$\Rightarrow\ x=z\cdot y,\qquad x'=z+y\cdot z'.$$
Подставляя в уравнение выражения для x и x' получаем
$$z+yz'=\frac{2z^2-2z+2}{1-4z},$$
$$yz'=\frac{6z^2-3z+2}{1-4z}.$$
Разделяя переменные и интегрируя, находим
$$\frac{1-4z}{6z^2-3z+2}dz=\frac{dy}{y}\qquad \text{или}\qquad \frac{1}{3}\frac{d(6z^2-3z+2)}{6z^2-3z+2}=-\frac{dy}{y},$$
$$\Rightarrow\quad \ln(6z^2-3z+2)=\ln C^3-\ln|y^3|,\quad C>0;$$
$$6z^2-3z+2=\frac{C^3}{y^3},\quad C\neq 0.$$
Подставляя $\dfrac{x}{y}=z$, получаем общий интеграл
$$6x^2y-3xy^2+2y^3=C^3,\quad C\neq 0.$$
Потери решений в процессе интегрирования не произошло, так как $6z^2-3z+2\neq 0$, $\forall z$, а $y=0$ не является решением. ◇

§ 6. Уравнения, приводящиеся к однородным

6.1. Уравнение вида $y'=f\left(\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$

Рассмотрим уравнение
$$y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right).\tag{6.1}$$
Если $c_1=c_2=0$, то уравнение (6.1) будет однородным. В противном случае, в зависимости от коэффициентов при x и y, оно может быть с помощью замены приведено либо к уравнению с разделяющимися переменными, либо к однородному. Рассмотри каждый из этих двух случаев.

1) Пусть хотя бы одно из чисел c_1 или c_2 отлично от нуля, а коэффициенты при x и y удовлетворяют условию

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Тогда система уравнений

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \end{cases} \tag{6.2}$$

будет иметь единственное решение.

Сделаем замену переменных:

$$\boxed{x = t + \alpha ,\ y = z + \beta ,}$$

где α и β – решения системы (6.2). Тогда $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dz}{dt}$ и из уравнения (6.1) получим:

$$\frac{dz}{dt} = f\left(\frac{a_1(t+\alpha) + b_1(z+\beta) + c_1}{a_2(t+\alpha) + b_2(z+\beta) + c_2} \right),$$

$$\Rightarrow \ \frac{dz}{dt} = f\left(\frac{a_1 t + b_1 z + (a_1\alpha + b_1\beta + c_1)}{a_2 t + b_2 z + (a_2\alpha + b_2\beta + c_2)} \right).$$

Но α и β – решения системы (6.2). Следовательно,

$$a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 \quad \text{и} \quad a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0 ,$$

и имеет место однородное уравнение

$$\frac{dz}{dt} = f\left(\frac{a_1 t + b_1 z}{a_2 t + b_2 z} \right).$$

2) Теперь рассмотрим случай, когда хотя бы одно из чисел c_1 или c_2 отлично от нуля, а коэффициенты при x и y удовлетворяют условию

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 .$$

Равенство нулю определителя второго порядка с ненулевыми элементами означает, что его строки пропорциональны, т. е.

$$a_2 = \lambda a_1 , \quad b_2 = \lambda b_1 .$$

Но тогда уравнение (6.1) можно записать в виде

$$y' = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{\lambda(a_1 x + b_1 y) + c_2} \right) \quad \text{или} \quad y' = \varphi(a_1 x + b_1 y) .$$

Это уравнение вида (4.2), которые мы уже рассмотрели ранее в §4. Мы показали, что оно приводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью замены $z = a_1 x + b_1 y$.

ПРИМЕР 6.1. Найти общий интеграл уравнения

$$(4y - 3x - 5)y' - 3y + 7x + 2 = 0.$$

РЕШЕНИЕ. Запишем уравнение в виде

$$y' = \frac{-7x + 3y - 2}{-3x + 4y - 5}.$$

Это уравнение вида (6.1). Рассмотрим систему

$$\begin{cases} -7x + 3y - 2 = 0, \\ -3x + 4y - 5 = 0. \end{cases}$$

Она имеет единственное решение

$$x_0 = \frac{7}{19}, \ y_0 = \frac{29}{19}.$$

Следовательно, уравнение приводится к однородному заменой

$$x = t + x_0 = t + \frac{7}{19}, \quad y = z + y_0 = z + \frac{29}{19}.$$

В результате получим однородное уравнение

$$\frac{dz}{dt} = \frac{-7t + 3z}{-3t + 4z}.$$

Сделаем еще одну замену переменных:

$$z = ut \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dt} = u + t\frac{du}{dt}.$$

Это приведет нас к уравнению

$$u + t\frac{du}{dt} = \frac{-7 + 3u}{-3 + 4u},$$

$$\Rightarrow \ t\frac{du}{dt} = \frac{-4u^2 + 6u - 7}{-3 + 4u}.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Запишем его в виде

$$\frac{dt}{t} + \frac{4u - 3}{4u^2 - 6u + 7}du = 0,$$

$$\Rightarrow \ \frac{dt}{t} + \frac{1}{2}\frac{d(4u^2 - 6u + 7)}{4u^2 - 6u + 7} = 0.$$

Интегрируя, получаем

$$\ln|t|+\frac{1}{2}\ln(4u^2-6u+7)=\ln\widetilde{C}\,,\quad \widetilde{C}>0\,;$$

$$\Rightarrow\ (4u^2-6u+7)\cdot t^2=\widetilde{C}^2\,,\quad \widetilde{C}>0\,;$$

$$\Rightarrow\ (4u^2-6u+7)t^2=C\,,\quad C>0\,.$$

Сделаем обратную замену переменных $u=\dfrac{z}{t}$ и получим:

$$4z^2-6zt+7t^2=C\,,\quad C>0\,.$$

Но $z=y-\dfrac{29}{19}$, $t=x-\dfrac{7}{19}$. Следовательно

$$7x^2+4y^2-6xy+4x-10y=C-\frac{131}{19}\,.$$

Переобозначив $C-\dfrac{131}{19}$ через C, окончательно получим

$$7x^2+4y^2-6xy+4x-10y=C\,,\ \text{где}\ C>-\frac{131}{19}\,.$$

Потери решений в процессе интегрирования не произошло, так как $4u^2-6u+7>0\ \ \forall u$, а $t=0$ не является решением. $\diamond$

ПРИМЕР 6.2. Найти общий интеграл уравнения

$$(x+2y+1)y'=2x+4y+3\,.$$

РЕШЕНИЕ. Запишем уравнение в виде

$$y'=\frac{2x+4y+3}{x+2y+1}\,.$$

Это уравнение вида (6.1). Рассмотрим систему

$$\begin{cases}2x+4y+3=0,\\ x+2y+1=0.\end{cases}$$

Так как определитель ее матрицы $\begin{vmatrix}2&4\\1&2\end{vmatrix}=0$, то система не имеет решений и исходное дифференциальное уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью замены

$$z=x+2y\,.$$

В этом случае имеем: $\qquad z'=1+2y'\,,$

$$\Rightarrow\ y'=\frac{1}{2}\cdot(z'-1)\,,$$

и из уравнения получаем:

$$\frac{1}{2}\cdot\left(z'-1\right)=\frac{2z+3}{z+1}.$$

Разделяя переменные и интегрируя, находим:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{4z+6}{z+1}+1 \quad \text{или} \quad \frac{dz}{dx}=\frac{5z+7}{z+1},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{z+1}{5z+7}dz=dx \quad (5z+7\neq 0),$$

$$\Rightarrow \quad \int\frac{z+1}{5z+7}dz=\int dx+C,$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{5}\int\left(1-\frac{2/5}{z+7/5}\right)dz=\int dx+C,$$

$$\Rightarrow \quad z-\frac{2}{5}\ln\left|z+\frac{7}{5}\right|=5x+C.$$

Заменяя $z=x+2y$, получаем:

$$x+2y-\frac{2}{5}\ln\left|x+2y+\frac{7}{5}\right|=5x+C,$$

$$\Rightarrow \quad 2y-\frac{2}{5}\ln\left|x+2y+\frac{7}{5}\right|=4x+C,$$

$$\Rightarrow \quad y-\frac{1}{5}\ln\left|x+2y+\frac{7}{5}\right|=2x+C,$$

$$\Rightarrow \quad 5y-\ln\left|5x+10y+7\right|=10x+C.$$

В процессе интегрирования, при делении на $5z+7$, было потеряно решение $5x+10y+7=0$. Оно может быть включено в общий интеграл, если переписать общий интеграл в виде:

$$5x+10y+7=Ce^{5y-10x}, \quad \forall C. \diamond$$

6.2. Обобщенно однородные уравнения

Уравнение первого порядка называется ***обобщённо однородным***, если существует такое рациональное число α, что каждое слагаемое уравнения – однородная функция степени m относительно x, y, y' (относительно x, y, dx, dy), если считать x – величиной измерения 1, y – величиной измерения α, y' (dy) – величиной измерения $\alpha-1$, dx – величиной измерения 0.

Иначе говоря, уравнение $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ является обобщено однородным, если существует такое рациональное число α, что

$$P(tx,t^{\alpha}y)dx+Q(tx,t^{\alpha}y)\cdot(t^{\alpha-1}dy)=t^{m}\cdot\left[P(x,y)dx+Q(x,y)dy\right]$$

или, что тоже, выполняются равенства

$$\left.\begin{aligned} P(tx,t^{\alpha}y)dx=t^{m}\cdot P(x,y)dx, \\ Q(tx,t^{\alpha}y)\cdot(t^{\alpha-1}dy)=t^{m}\cdot Q(x,y)dy. \end{aligned}\right\} \qquad (6.3)$$

Обобщенно однородное уравнение приводится к однородному уравнению заменой

$$\boxed{y=z^{\alpha}.}$$

Действительно, после замены $y=z^{\alpha}$ получим уравнение

$$\underbrace{P(x,z^{\alpha})}_{P_1(x,z)}dx+\underbrace{Q(x,z^{\alpha})\cdot\alpha z^{\alpha-1}}_{Q_1(x,z)}dz=0. \qquad (6.4)$$

Рассмотрим функцию $P_1(x,z)$. Имеем:

$$P_1(tx,tz)dx=P(tx,(tz)^{\alpha})dx=P(tx,t^{\alpha}z^{\alpha})dx=P(tx,t^{\alpha}y)dx.$$

По условию (6.3)

$$P(tx,t^{\alpha}y)dx=t^{m}\cdot P(x,y)dx.$$

$$\Rightarrow\quad P_1(tx,tz)dx=t^{m}\cdot P(x,y)dx=t^{m}\cdot P(x,z^{\alpha})dx=t^{m}\cdot P_1(x,z)dx,$$

$$\Rightarrow\quad P_1(tx,tz)=t^{m}P_1(x,z).$$

Аналогично, для $Q_1(x,z)$, имеем:

$$Q_1(tx,tz)dz=Q(tx,(tz)^{\alpha})\cdot\alpha(tz)^{\alpha-1}dz=Q(tx,t^{\alpha}z^{\alpha})\cdot t^{\alpha-1}\cdot\alpha z^{\alpha-1}dz=$$
$$=Q(tx,t^{\alpha}y)\cdot t^{\alpha-1}\cdot dy$$

По условию (6.3)

$$Q(tx,t^{\alpha}y)\cdot(t^{\alpha-1}dy)=t^{m}\cdot Q(x,y)dy.$$

$$\Rightarrow\quad Q_1(tx,tz)dz=t^{m}Q(x,y)dy=t^{m}\cdot Q(x,z^{\alpha})\cdot\alpha z^{\alpha-1}dz=t^{m}\cdot Q_1(x,z)dz;$$

$$\Rightarrow\quad Q_1(tx,tz)=t^{m}Q_1(x,z).$$

Итак, функции $P_1(x,z)$ и $Q_1(x,z)$ – однородные одинаковой степени и, следовательно, уравнение (6.4) – однородное.

Обобщенно однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными заменой

$$\boxed{y=zx^{\alpha}.}$$

Действительно, из определения обобщенного однородного уравнения, получаем:

$$P(tx,t^{\alpha}y)=t^{m}\cdot P(x,y) \quad \text{и} \quad Q(tx,t^{\alpha}y)=t^{m-\alpha+1}Q(x,y).$$

Положим $t=\dfrac{1}{x}$. Тогда:

$$P(tx,t^{\alpha}y)=P\left(1,\frac{y}{x^{\alpha}}\right)=\frac{1}{x^{m}}P(x,y),$$

$$Q(tx,t^{\alpha}y)=Q\left(1,\frac{y}{x^{\alpha}}\right)=\frac{1}{x^{m-\alpha+1}}Q(x,y).$$

Следовательно,

$$P(x,y)=x^{m}\cdot P\left(1,\frac{y}{x^{\alpha}}\right), \quad Q(x,y)=x^{m-\alpha+1}\cdot Q\left(1,\frac{y}{x^{\alpha}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}=x^{\alpha-1}\cdot\varphi\left(\frac{y}{x^{\alpha}}\right).$$

Таким образом, обобщенно однородное уравнение, разрешенное относительно производной, имеет вид

$$y'=-\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}=x^{\alpha-1}\cdot\varphi\left(\frac{y}{x^{\alpha}}\right)$$

Делая в этом уравнении замену $y=zx^{\alpha}$ получим:

$$z'x^{\alpha}+z\cdot\alpha\cdot x^{\alpha-1}=x^{\alpha-1}\cdot\varphi(z),$$

$$\Rightarrow \quad z'x=\varphi(z)-\alpha z.$$

Но последнее уравнение, очевидно, является уравнением с разделяющимися переменными.

ПРИМЕР 6.3. Найти все решения уравнения $\left(\dfrac{2}{x^{2}}-y^{2}\right)dx+dy=0$.

РЕШЕНИЕ. Запишем уравнение в виде

$$\frac{2}{x^{2}}dx-y^{2}dx+dy=0.$$

Слагаемое $\dfrac{2}{x^{2}}dx$ имеет измерение $1\cdot(-2)+0=-2$, слагаемое $y^{2}dx$ – измерение $\alpha\cdot 2+0=2\alpha$, слагаемое dy – измерение $\alpha-1$. Равенства

$$-2=2\alpha=\alpha-1$$

справедливы при $\alpha=-1$. Следовательно, данное уравнение – обобщённо однородное, $\alpha=-1$.

Приведем исходное уравнение к уравнению с разделяющимися переменными, сделав замену $y=zx^{-1}$. Тогда:

$$dy=\frac{dz}{x}-\frac{zdx}{x^2},$$

и уравнение примет вид:

$$\frac{2}{x^2}dx-\frac{z^2}{x^2}dx+\frac{dz}{x}-\frac{zdx}{x^2}=0 \quad \text{или} \quad (2-z-z^2)dx+xdz=0,$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x}+\frac{dz}{2-z-z^2}=0,$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{z+2}-\frac{1}{z-1}\right)dz=0 \quad \text{или} \quad 3\frac{dx}{x}+\left(\frac{1}{z+2}-\frac{1}{z-1}\right)dz=0.$$

Интегрируя, находим

$$3\int\frac{dx}{x}+\int\left(\frac{1}{z+2}-\frac{1}{z-1}\right)dz=\ln C, \quad C>0,$$

$$\Rightarrow 3\cdot\ln|x|+\ln\left|\frac{z+2}{z-1}\right|=\ln C, \quad C>0,$$

$$\Rightarrow \frac{z-1}{z+2}=Cx^3 \quad \text{или} \quad 1-\frac{3}{z+2}=Cx^3, \quad C\neq 0,$$

$$\Rightarrow z+2=\frac{3}{1-Cx^3}, \quad C\neq 0,$$

$$\Rightarrow z=\frac{1+2Cx^3}{1-Cx^3}, \quad C\neq 0.$$

Сделаем обратную замену переменных $z=yx$ и получим:

$$yx=\frac{1+2Cx^3}{1-Cx^3}, \quad C\neq 0,$$

$$\Rightarrow y=\frac{1+2Cx^3}{x-Cx^4}, \quad C\neq 0.$$

В процессе преобразований было потеряно решение $y=x^{-1}$ (т. е. $z=1$). Оно может быть включено в общее при $C=0$. Решение $y=-2x^{-1}$ (т. е. $z=-2$) входит в общее при $\frac{1}{C}=0$, т. е. при $C=\infty$.

Таким образом, все решения уравнения имеют вид:

$$y=\frac{1+2Cx^3}{x-Cx^4}, \ \forall C. \ \diamond$$

§ 7. Линейные уравнения первого порядка

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение, которое может быть записано в виде

$$\boxed{y' + p(x)y = f(x),} \tag{7.1}$$

где $p(x)$, $f(x)$ – заданные непрерывные функции.

Иначе говоря, линейное дифференциальное уравнение первого порядка это уравнение, в которое неизвестная функция y и ее производная y' входят в первых степенях и не перемножаясь[1].

Если $f(x) \equiv 0$, то линейное уравнение называется ***однородным***. В противном случае уравнение называется ***неоднородным***. Рассмотрим их по отдельности.

7.1. Линейные однородные уравнения

Линейное однородное уравнение

$$\boxed{y' + p(x)y = 0} \tag{7.2}$$

является уравнением с разделяющимися переменными.

Действительно, разделяя переменные, получаем

$$\frac{dy}{y} + p(x)dx = 0 \quad (\text{где } \ y \neq 0).$$

Откуда находим

$$\ln|y| + \int p(x)dx = \ln C, \quad C > 0$$

(здесь для удобства постоянная C представлена в виде $\ln C$);

$$\Rightarrow \ |y| \cdot e^{\int p(x)dx} = C,$$

$$\Rightarrow \ y = C \cdot e^{-\int p(x)dx}, \quad C \neq 0. \tag{7.3}$$

В процессе преобразований было потеряно решение $y = 0$. Оно может быть получено по формуле (7.3) при $C = 0$. Следовательно, общее решение линейного однородного уравнения (7.2) будет иметь вид

$$y = C \cdot e^{-\int p(x)dx}, \ \forall C. \tag{7.4}$$

[1] Т. е. ***линейное*** относительно неизвестной функции и ее производной.

7.2. Линейные неоднородные уравнения

Имеются два метода интегрирования линейных неоднородных уравнений первого порядка.

1) *Метод вариации постоянной (метод Лагранжа).*

Сначала решаем однородное уравнение, которое имеет ту же левую часть, что и уравнение (7.1) (его называют ***однородным уравнением, соответствующим данному неоднородному уравнению***). Общим решением такого уравнения, как было показано выше, является функция

$$y = C \cdot e^{-\int p(x)dx}.$$

Далее полагаем, что решение неоднородного уравнения по структуре совпадает с решением соответствующего линейного однородного уравнения, т. е. имеет вид

$$y = C(x) \cdot e^{-\int p(x)dx}.$$

Функцию $C(x)$ можно найти, подставив y и y' в исходное неоднородное уравнение (7.1). Действительно,

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dC}{dx} \cdot e^{-\int p(x)dx} - C(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} \cdot p(x).$$

Подставляя выражения для y и y' в (7.1) получим

$$\frac{dC}{dx} \cdot e^{-\int p(x)dx} - C(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} \cdot p(x) + p(x) \cdot C(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} = f(x),$$

$$\Rightarrow \ \frac{dC}{dx} \cdot e^{-\int p(x)dx} = f(x),$$

$$\Rightarrow \ \frac{dC}{dx} = f(x) \cdot e^{\int p(x)dx},$$

$$\Rightarrow \ dC = f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx.$$

Интегрируя, находим

$$C(x) = \int \left[f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} \right] dx + C_1.$$

И, окончательно получим, что общее решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y(x) = \left(\int \left[f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} \right] dx + C_1 \right) \cdot e^{-\int p(x)dx}$$

или

$$y(x) = C_1 \cdot e^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx} \cdot \int \left[f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} \right] dx. \qquad (7.5)$$

З а м е ч а н и я . 1) С формальной точки зрения общее решение неоднородного уравнения получается из общего решения соответствующего однородного уравнения заменой константы C на функцию $C(x)$. Такой «произвол» объясняет происхождение названия метода «вариация постоянной».

2) Формула (7.5) трудна для запоминания. Поэтому в конкретных примерах обычно повторяют проведенные выше рассуждения.

3) Заметим, что первое слагаемое в (7.5) совпадает с общим решением однородного уравнения, а второе – функция

$$\varphi(x) = e^{-\int p(x)dx} \cdot \int \left[f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} \right] dx$$

является частным решением линейного неоднородного уравнения (получается из общего решения при $C = 0$).

ПРИМЕР 7.1. Решить уравнение $xy' + 2y - x^4 = 0$. Найти частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 0$.

РЕШЕНИЕ. Это линейное неоднородное уравнение. Запишем его в виде

$$y' + 2\frac{y}{x} = x^3.$$

Интегрируем соответствующее однородное уравнение

$$y' + 2\frac{y}{x} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} + 2\frac{y}{x} = 0.$$

Имеем:
$$\frac{dy}{y} = -\frac{2dx}{x},$$

$$\Rightarrow \ln|y| = -2\ln|x| + \ln C, \quad C>0.$$

Откуда получаем, что общее решение рассматриваемого линейного однородного уравнения

$$y = \frac{C}{x^2}, \quad \forall C.$$

Теперь полагаем, что решение неоднородного уравнения совпадает по структуре с решением соответствующего однородного уравнения, т. е. имеет вид:

$$y = \frac{C(x)}{x^2}. \tag{7.6}$$

Тогда
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dC}{dx} \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{2C}{x^3}.$$

Подставим y и $\dfrac{dy}{dx}$ в исходное уравнение. Получим:

$$\frac{dC}{dx}\cdot\frac{1}{x^2}-\frac{2C}{x^3}+\frac{2}{x}\cdot\frac{C}{x^2}-x^3=0,$$

$$\Rightarrow\ \frac{dC}{dx}\cdot\frac{1}{x^2}-x^3=0,$$

$$\Rightarrow\frac{dC}{dx}=x^5 \quad \text{и} \quad C(x)=\frac{x^6}{6}+C.$$

Подставим найденное $C(x)$ в (7.6) и получим, что общее решение линейного неоднородного уравнения имеет вид

$$y=\frac{1}{x^2}\cdot\left(\frac{x^6}{6}+C\right)=\frac{x^4}{6}+\frac{C}{x^2}.$$

Теперь найдем частное решение, удовлетворяющее условию $y(1)=0$. Подставляя в общее решение начальные значения $x_0=1$, $y_0=0$, находим $C=-\frac{1}{6}$. Следовательно, искомым частным решением уравнения будет функция

$$y=\frac{x^4}{6}-\frac{1}{6\cdot x^2}=-\frac{1}{6}\cdot\left(x^4-\frac{1}{x^2}\right). \ \diamond$$

2) ***Метод Бернулли.***

Решение уравнения (7.1) может быть сведено к последовательному интегрированию двух уравнений с разделяющимися переменными.

Будем искать решение уравнения (7.1) в виде произведения двух непрерывно дифференцируемых функций от x:

$$\boxed{y=u(x)\cdot v(x).} \qquad (7.7)$$

Тогда

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}\cdot v+\frac{dv}{dx}\cdot u.$$

Подставим y и y' в линейное неоднородное уравнение (7.1) и получим:

$$\frac{du}{dx}\cdot v+\frac{dv}{dx}\cdot u+puv=f(x),$$

или

$$\frac{du}{dx}\cdot v+u\cdot\left(\frac{dv}{dx}+pv\right)=f(x). \qquad (7.8)$$

Имеем одно дифференциальное уравнение (7.8), содержащее две неизвестные функции u и v. Так как число неизвестных больше числа уравнений, то одно неизвестное можно выбрать произвольно. Выберем $v(x)$ так, чтобы выражение в скобках в (7.8) обратилось в нуль. Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dx} + pv = 0, & (7.9) \\ \dfrac{du}{dx} \cdot v = f(x). & (7.10) \end{cases}$$

Уравнение (7.9) совпадает с (7.2). Его решением является функция (7.4), причем, учитывая свободу выбора $v(x)$, можно в (7.4) принять $C = 1$, т. е.

$$v(x) = e^{-\int p(x)dx}.$$

Полученную функцию $v(x)$ подставим в уравнение (7.10) и найдем $u(x)$:

$$\frac{du}{dx} \cdot e^{-\int p(x)dx} = f(x) \quad \text{или} \quad du = f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx,$$

$$\Rightarrow u(x) = \int f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + C.$$

Подставив найденные таким образом $u(x)$ и $v(x)$ в (7.7), мы получим, что общее решение линейного неоднородного уравнения (7.1) имеет вид:

$$y = e^{-\int p(x)dx} \cdot \left[\int f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + C \right].$$

ПРИМЕР 7.2. Найти общее решение уравнения

$$\cos x \cdot y' + \sin x \cdot y = 2^x \cdot \cos^2 x.$$

РЕШЕНИЕ. Запишем уравнение в виде

$$y' + tgx \cdot y = 2^x \cdot \cos x.$$

Полагаем $y = u(x) \cdot v(x)$. Подставляя $y = uv$ и $y' = u'v + uv'$ в исходное уравнение, будем иметь

$$u'v + uv' + tgx \cdot uv = 2^x \cdot \cos x \quad \text{или} \quad u'v + u(v' + tgx \cdot v) = 2^x \cdot \cos x.$$

Согласно (7.9) полагаем

$$v' + tgx \cdot v = 0. \tag{7.11}$$

Тогда

$$u'v = 2^x \cdot \cos x. \tag{7.12}$$

Находим одно решение уравнения (7.11). Имеем:

$$\frac{dv}{dx} = -v \cdot tgx \quad \text{или} \quad \frac{dv}{v} = -tgxdx,$$

$$\Rightarrow \ln|v| = \ln|\cos x| + \ln C, \quad C > 0,$$

$$\Rightarrow v = C\cos x, \quad \forall C.$$

Так как нам требуется какое-нибудь одно решение, то полагаем $C = 1$ и получаем

$$v(x) = \cos x.$$

Подставим найденную функцию $v(x)$ в уравнение (7.12):

$$u' \cdot \cos x = 2^x \cdot \cos x.$$

Откуда находим

$$u' = 2^x \quad \text{или} \quad du = 2^x\, dx,$$

$$\Rightarrow \quad u(x) = \frac{2^x}{\ln 2} + C.$$

Так как по предположению $y = u(x) \cdot v(x)$, то окончательно получаем, что общее решение заданного линейного уравнения имеет вид

$$y = u(x) \cdot v(x) = \left(\frac{2^x}{\ln 2} + C \right) \cdot \cos x. \ \diamond$$

ПРИМЕР 7.3. Найти общее решение уравнения

$$y' = \frac{1}{2x - y^2}.$$

РЕШЕНИЕ. Уравнение является линейным, если x считать функцией, а y аргументом. Действительно, в этом случае оно принимает вид

$$x' = 2x - y^2.$$

Полагаем $x = u(y) \cdot v(y)$. Подставляя $x = uv$ и $x' = u'v + uv'$ в исходное уравнение, будем иметь

$$u'v + uv' - 2uv = -y^2$$

$$\Rightarrow \ u'v + u(v' - 2 \cdot v) = -y^2.$$

Согласно (7.9) полагаем

$$v' - 2 \cdot v = 0. \tag{7.13}$$

Тогда

$$u'v = -y^2. \tag{7.14}$$

Находим одно решение уравнения (7.13). Имеем:

$$\frac{dv}{dy} = 2v \quad \text{или} \quad \frac{dv}{v} = 2dy,$$

$$\Rightarrow \quad \ln|v| = 2y + \ln C, \quad C > 0$$

$$\Rightarrow \quad v = Ce^{2y}, \quad \forall C.$$

Так как нам требуется какое-нибудь одно решение, то полагаем $C = 1$ и получаем

$$v(y) = e^{2y}.$$

Подставим найденную функцию $v(y)$ в уравнение (7.14):

$$u' \cdot e^{2y} = -y^2.$$

Откуда находим

$$u' = -y^2 \cdot e^{-2y},$$

$$\Rightarrow \quad du = -y^2 \cdot e^{-2y} dy .$$

Интегрируя два раза по частям, находим:

$$u(y) = \frac{e^{-2y}}{2}\left(y^2 + y + \frac{1}{2} \right) + C .$$

Так как по предположению $x = u(y) \cdot v(y)$, то окончательно получаем, что общее решение заданного линейного уравнения имеет вид

$$x = u(y) \cdot v(y) = \left[\frac{e^{-2y}}{2}\left(y^2 + y + \frac{1}{2} \right) + C \right] \cdot e^{2y} . \ \diamond$$

§ 8. Уравнения Бернулли

Уравнением Бернулли называется уравнение вида

$$\boxed{y' + p(x) \cdot y = f(x) \cdot y^n ,} \tag{8.1}$$

где $p(x), f(x)$ – непрерывные функции, $n \neq 0$, $n \neq 1$ (в противном случае это будет линейное уравнение).

Уравнение Бернулли можно привести к линейному уравнению. Для этого достаточно обе части уравнения Бернулли разделить на y^n*, а затем сделать замену*

$$\boxed{z = y^{1-n} .}$$

Действительно, разделив обе части уравнения на y^n, получим:

$$\frac{y'}{y^n} + \frac{p(x)}{y^{n-1}} = f(x) \quad \text{или} \quad y' \cdot y^{-n} + p(x) \cdot y^{1-n} = f(x) . \tag{8.2}$$

Теперь полагаем $z = y^{1-n}$. Тогда

$$\frac{dz}{dx} = (1-n) y^{-n} \frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y^n}{1-n} \frac{dz}{dx} .$$

Подставим $z = y^{1-n}$ и $y' = \dfrac{y^n}{1-n} \dfrac{dz}{dx}$ в уравнение (8.2) и получим:

$$\frac{y^n}{1-n} \cdot \frac{1}{y^n} \frac{dz}{dx} + p(x) z = f(x) ,$$

$$\Rightarrow \ \frac{1}{1-n} \frac{dz}{dx} + p(x) z = f(x) ,$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} + (1-n)\cdot p(x)\cdot z = (1-n)\cdot f(x).$$

Это линейное неоднородное уравнение относительно z и z'. Найдя его общее решение методом Бернулли, получим:

$$z = u(x)\cdot v(x) \quad \text{или} \quad \frac{1}{y^{n-1}} = u(x)\cdot v(x),$$

$$\Rightarrow \quad y^{n-1} = \frac{1}{u(x)}\cdot\frac{1}{v(x)},$$

$$\Rightarrow \quad y = \left(\frac{1}{u(x)}\right)^{\frac{1}{n-1}}\cdot\left(\frac{1}{v(x)}\right)^{\frac{1}{n-1}} = \tilde{u}(x)\cdot\tilde{v}(x).$$

Таким образом, решение уравнения Бернулли можно сразу искать в виде произведения двух функций методом Бернулли, не приводя предварительно к линейному уравнению.

> *Замечание*. Уравнение Бернулли при $n>0$ имеет решение $y=0$. Оно будет частным решением при $n>1$ (обычно входит в общее при $C=\infty$) и особым при $0<n<1$.

ПРИМЕР 8.1. Найти общее решение уравнения $xydy = (y^2+x)dx$.
РЕШЕНИЕ. Запишем уравнение в виде:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2+x}{xy} \quad \text{или} \quad y' - \frac{y}{x} = y^{-1}.$$

Это уравнение Бернулли, в котором $n=-1$. Приведем его к линейному. Для этого разделим обе части уравнения на y^{-1}:

$$yy' - \frac{y^2}{x} = 1.$$

Далее полагаем $z = y^{1-n} = y^2$. Тогда

$$\frac{dz}{dx} = 2y\frac{dy}{dx} \quad \text{или} \quad z' = 2yy'.$$

Подставим $z=y^2$ и $z'=2yy'$ в исходное уравнение и получим

$$\frac{1}{2}z' - \frac{z}{x} = 1 \quad \text{или} \quad z' - \frac{2}{x}z = 2.$$

Это линейное неоднородное уравнение относительно z и z'. Решим его методом вариации произвольной постоянной. Для соответствующего однородного уравнения $z' = \frac{2z}{x}$ имеем:

$$\frac{dz}{z} = 2\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \ \ln|z| = 2\ln|x| + \ln C, \quad C > 0;$$

$$\Rightarrow \ z = Cx^2, \quad \forall C.$$

Считаем, что решение неоднородного уравнения имеет вид

$$z = C(x)\cdot x^2.$$

Тогда $$\frac{dz}{dx} = \frac{dC}{dx}\cdot x^2 + 2x\cdot C.$$

Подставляем z и z' в линейное неоднородное уравнение и находим:

$$\frac{dC}{dx}\cdot x^2 + 2x\cdot C - \frac{2}{x}\cdot Cx^2 = 2,$$

$$\frac{dC}{dx}\cdot x^2 = 2 \quad \text{или} \quad dC = \frac{2}{x^2}dx,$$

$$\Rightarrow \ C(x) = -\frac{2}{x} + C.$$

Найденное $C(x)$ подставим в общее решение $z = C(x)\cdot x^2$ неоднородного уравнения и получим:

$$z = x^2\left(C - \frac{2}{x}\right) = Cx^2 - 2x.$$

Вернемся к переменной y (по формуле $z = y^2$):

$$y^2 = Cx^2 - 2x.$$

Следовательно, общее решение данного уравнения имеет вид

$$y = \pm\sqrt{Cx^2 - 2x}. \ \diamond$$

ПРИМЕР 8.2. Найти все решения уравнения $xy' - y = 3x^2\sqrt{y}$.

РЕШЕНИЕ. Запишем уравнение в виде

$$y' - \frac{1}{x}y = 3x\sqrt{y}.$$

Это уравнение Бернулли. Проинтегрируем его, не приводя к линейному. По методу Бернулли полагаем $y = u(x)\cdot v(x)$. Тогда $y' = u'\cdot v + u\cdot v'$. Подставив эти выражения в уравнение Бернулли, получим

$$u'v + uv' - \frac{1}{x}uv = 3x\sqrt{u\cdot v},$$

$$\Rightarrow \ u'v + u\left(v' - \frac{1}{x}v\right) = 3x\sqrt{u\cdot v}.$$

Полагая выражение в скобках равным нулю, запишем систему:

$$\begin{cases} v' - \dfrac{1}{x} v = 0, \\ u'v = 3x\sqrt{u \cdot v}. \end{cases}$$

Находим одно из решений первого уравнения:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{v}{x} \quad \text{или} \quad \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x},$$

$$\Rightarrow\ \ln|v| = \ln|x| + \ln C, \quad C > 0;$$

$$\Rightarrow\ v = Cx, \quad \forall C.$$

Положим $C = 1$, тогда

$$v = x.$$

Из второго уравнения при $v = x$ находим $u(x)$:

$$u' \cdot x = 3x\sqrt{u \cdot x},$$

$$\frac{du}{dx} = 3\sqrt{x} \cdot \sqrt{u} \quad \text{или} \quad \frac{du}{\sqrt{u}} = 3\sqrt{x}dx,$$

$$2\sqrt{u} = 2\sqrt{x^3} + 2C \quad \text{или} \quad \sqrt{u} = \sqrt{x^3} + C,$$

$$\Rightarrow\ u = \left(\sqrt{x^3} + C\right)^2.$$

В итоге получим, что общее решение данного уравнения имеет вид

$$y = u \cdot v = x \cdot \left(\sqrt{x^3} + C\right)^2.$$

В процессе интегрирования было потеряно решение $y = 0$. Так как оно может быть получено из общего решения при $C = C(x) = -\sqrt{x^3}$, то это решение – особое.

Таким образом, все решения дифференциального уравнения определяются равенствами:

$$y = x \cdot \left(\sqrt{x^3} + C\right)^2, \quad \forall C; \qquad y = 0. \ \diamond$$

ПРИМЕР 8.3. Решить уравнение $(x^2 + y^2 + 1)dy + xydx = 0$.

РЕШЕНИЕ. Запишем уравнение в виде

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{x^2 + y^2 + 1}{xy} \quad \text{или} \quad x' + \frac{x}{y} = -\frac{y^2 + 1}{xy}.$$

Сравним полученное уравнение с (8.1) и заметим, что это уравнение Бернулли, но теперь роль свободной переменной играет y, а искомой функции – $x(y)$. Полагаем $x = u(y) \cdot v(y)$. Тогда $x' = u' \cdot v + u \cdot v'$. Подставив эти выражения в уравнение Бернулли, получим

$$u'\cdot v+u\cdot v'+\frac{u\cdot v}{y}=-\frac{y^2+1}{u\cdot v\cdot y},$$

$$u'\cdot v+u\left(v'+\frac{v}{y}\right)=-\frac{y^2+1}{u\cdot v\cdot y}.$$

Полагая выражение в скобках равным нулю, запишем систему:

$$\begin{cases} v'+\dfrac{1}{y}v=0, \\ u'v=-\dfrac{y^2+1}{u\cdot v\cdot y}. \end{cases}$$

Находим одно из решений первого уравнения:

$$\frac{dv}{dy}=-\frac{v}{y} \quad \text{или} \quad \frac{dv}{v}=-\frac{dy}{y},$$

$$\Rightarrow \ \ln|v|=-\ln|y|+\ln C, \quad C>0;$$

$$\Rightarrow \ v=\frac{C}{y}, \quad \forall C.$$

Пусть $C=1$, тогда

$$v=\frac{1}{y}.$$

Из второго уравнения при $v=\dfrac{1}{y}$ находим $u(y)$:

$$\frac{u'}{y}=-\frac{y^2+1}{u\cdot\dfrac{1}{y}\cdot y},$$

$$\Rightarrow \ u\cdot du=-(y^3+y)dy,$$

$$\Rightarrow \ \frac{u^2}{2}=-\left(\frac{y^4}{4}+\frac{y^2}{2}\right)+\frac{C}{2},$$

$$u=\pm\sqrt{C-\frac{1}{2}y^4-y^2}.$$

В итоге получим, что общее решение данного уравнения имеет вид

$$x(y)=u\cdot v=\pm\frac{1}{y}\cdot\sqrt{C-\frac{1}{2}y^4-y^2}, \quad \forall C.$$

Потерянных решений нет. ◇

§ 9. Уравнения в полных дифференциалах

Уравнение

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \tag{9.1}$$

называется ***уравнением в полных дифференциалах***, если его левая часть является полным дифференциалом некоторой функции $u(x,y)$, т. е. если

$$\boxed{M(x,y)dx+N(x,y)dy=du(x,y)\,.}$$

Очевидно, что общий интеграл уравнения в полных дифференциалах будет иметь вид

$$u(x,y)=C\,.$$

Таким образом, задача интегрирования дифференциального уравнения в полных дифференциалах фактически сводится к задаче отыскания функции двух переменных по ее полному дифференциалу.

Критерий, когда выражение $M(x,y)dx+N(x,y)dy$ представляет собой дифференциал некоторой функции $u(x,y)$ и один из возможных способов ее нахождения, дает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 9.1. *Пусть функции $M(x,y)$, $N(x,y)$ определены и непрерывны в области D плоскости xOy и имеют в ней непрерывные частные производные $\frac{\partial M}{\partial y}$ и $\frac{\partial N}{\partial x}$. Для того чтобы выражение*

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy$$

представляло собой полный дифференциал некоторой функции $u(x,y)$, необходимо и достаточно, чтобы во всех точках области D выполнялось условие

$$\boxed{\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}\,.}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1) ***Необходимость*** $(\Rightarrow)$. Пусть

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=du(x,y)\,.$$

Но

$$du(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy\,.$$

Следовательно,

$$M(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad N(x,y)=\frac{\partial u}{\partial y}\,.$$

Тогда

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \qquad \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

По условию теоремы $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ – непрерывны в области D и, следовательно,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x},$$

$$\Rightarrow \ \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}.$$

2) ***Достаточность*** ($\Leftarrow$). Пусть

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}.$$

Найдем функцию $u(x,y)$ такую, что

$$du(x,y)=M(x,y)dx+N(x,y)dy,$$

или, что то же самое, функцию, для которой

$$\frac{\partial u}{\partial x}=M(x,y), \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=N(x,y).$$

Сначала найдем любую функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условию

$$\frac{\partial u}{\partial x}=M(x,y).$$

Для этого достаточно проинтегрировать это равенство по x, считая y – постоянной. Получим:

$$u(x,y)=\int M(x,y)dx+\varphi(y),$$

где $\varphi(y)$ – произвольная функция.

Теперь необходимо подобрать $\varphi(y)$ так, чтобы выполнялось условие

$$\frac{\partial u}{\partial y}=N(x,y).$$

Имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx+\varphi(y)\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right)+\varphi'(y)$$

и

$$\frac{\partial u}{\partial y}=N(x,y).$$

$$\Rightarrow \ \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right)+\varphi'(y)=N(x,y),$$

$$\Rightarrow \quad \varphi'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right).$$

Следовательно, искомая функция $\varphi(y)$ будет существовать, если выражение $N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right)$ не зависит от x. Убедимся в этом, продифференцировав его по x (если выражение не зависит от x, то в результате дифференцирования должен получиться ноль):

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right)\right] = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\left(\int M(x,y)dx\right) =$$

$$= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\int M(x,y)dx\right) = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int M(x,y)dx\right) =$$

$$= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\big(M(x,y)\big) = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0.$$

Итак, выражение $N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right)$ действительно не зависит от x, и, следовательно, проинтегрировав его по y, получим:

$$\int\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right)\right]dy + C = \varphi(y)$$

и

$$u(x,y) = \int M(x,y)dx + \int\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right)\right]dy + C. \quad \blacksquare$$

ПРИМЕР 9.1. Найти общий интеграл уравнения

$$(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0.$$

РЕШЕНИЕ. Имеем

$$M(x,y) = 3x^2 + 6xy^2, \qquad N(x,y) = 6x^2y + 4y^3,$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 12xy, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 12xy.$$

Так как условие $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ выполнено, то уравнение является уравнением в полных дифференциалах, т. е. левая часть этого уравнения есть полный дифференциал некоторой функции $u(x,y)$. Найдем эту функцию так, как это было сделано в теореме. Имеем:

1) $u(x,y) = \int M(x,y)dx + \varphi(y) = \int (3x^2 + 6xy^2)dx + \varphi(y) = x^3 + 3x^2y^2 + \varphi(y)$.

$$2)\ \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(x^3 + 3x^2y^2 + \varphi(y)\right) = 6x^2y + \varphi'(y), \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = N(x,y) = 6x^2y + 4y^3. \end{cases}$$

$$\Rightarrow\ 6x^2y + \varphi'(y) = 6x^2y + 4y^3,$$

$$\Rightarrow\ \varphi'(y) = 4y^3 \quad \text{и} \quad \varphi(y) = y^4 + C.$$

Таким образом, получили:

$$u(x,y) = x^3 + 3x^2y^2 + \varphi(y) = x^3 + 3x^2y^2 + y^4 + C,$$

и общий интеграл уравнения будет иметь вид:

$$x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C. \ \diamond$$

Существуют и другие способы нахождения функции $u(x,y)$. Например, она может быть найдена по одной из следующих формул, которые появляются при изучении свойств криволинейных интегралов II рода:

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy + C, \qquad (9.2)$$

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} N(x,y)dy + C, \qquad (9.3)$$

где (x_0, y_0) – любая точка области D непрерывности функций $M(x,y)$, $N(x,y)$, а интеграл $\int_{x_0}^{x} M(x,y)dx$ в (9.2) $\left(\int_{y_0}^{y} N(x,y)dy \text{ в } (9.3)\right)$ вычисляется в предположении, что переменная y (переменная x) является константой.

ПРИМЕР 9.2. Найти общий интеграл уравнения

$$e^{-y}dx - (2y + xe^{-y})dy = 0.$$

РЕШЕНИЕ. Имеем

$$M(x,y) = e^{-y}, \quad N(x,y) = -(2y + xe^{-y}),$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -e^{-y}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -e^{-y}.$$

Так как условие $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ выполнено, то уравнение является уравнением в полных дифференциалах, т. е. левая часть этого уравнения есть полный дифференциал некоторой функции $u(x,y)$.

Найдем функцию $u(x, y)$ по формуле (9.3). Так как функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ определены и непрерывны в любой точке плоскости xOy, то можно взять в качестве точки (x_0, y_0) начало координат. Тогда

$$u(x,y)=\int_0^x e^0 dx-\int_0^y (2y+xe^{-y})dy+C=\int_0^x dx-\int_0^y (2y+xe^{-y})dy+C=$$

$$=x\Big|_0^x-\left(y^2-xe^{-y}\right)\Big|_0^y+C=x-y^2+xe^{-y}-x+C=xe^{-y}-y^2+C\,.$$

Следовательно, общий интеграл исходного уравнения имеет вид

$$xe^{-y}-y^2=C\,.\diamond$$

Иногда функцию $u(x, y)$ можно найти, сгруппировав члены выражения $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ и приведя его таким образом к виду $du(x, y)$. Этот метод получил название ***метод интегрируемых комбинаций***.

ПРИМЕР 9.3. Найти общий интеграл уравнения

$$2xydx+(x^2-3y^2)dy=0\,.$$

РЕШЕНИЕ. Имеем

$$M(x,y)=2xy\,,\qquad N(x,y)=x^2-3y^2\,.$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=2x\,,\qquad \frac{\partial N}{\partial x}=2x\,.$$

Так как условие $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ выполнено, то уравнение является уравнением в полных дифференциалах, т. е. левая часть этого уравнения есть полный дифференциал некоторой функции $u(x, y)$.

Чтобы найти функцию $u(x, y)$, группируем члены уравнения следующим образом

$$(2xydx+x^2dy)-3y^2dy=0\,.$$

Имеем

$$2xydx+x^2dy=d(x^2y)\qquad \text{и}\qquad 3y^2dy=d(y^3)\,.$$

Следовательно, уравнение можно записать в виде

$$d(x^2y)-d(y^3)=0\,,$$

$$\Rightarrow\ d\left(x^2y-y^3\right)=0\,.$$

Таким образом, $\qquad u(x,y)=yx^2-y^3,$

и общий интеграл исходного уравнения имеет вид

$$yx^2-y^3=C\,.\ \diamond$$

§ 10. Интегрирующий множитель

Если условие $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ не выполнено, то уравнение

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \qquad (10.1)$$

не является уравнением в полных дифференциалах. Но в некоторых случаях удается подобрать функцию $\mu(x, y)$, после умножения на которую левая часть уравнения становится полным дифференциалом. Такая функция называется ***интегрирующим множителем*** уравнения.

Покажем, как можно в некоторых случаях найти интегрирующий множитель. Поскольку уравнение

$$\mu M(x, y)dx + \mu N(x, y)dy = 0$$

является уравнением в полных дифференциалах, то выполняется условие

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x},$$

т. е.

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} M + \frac{\partial M}{\partial y} \mu = \frac{\partial \mu}{\partial x} N + \frac{\partial N}{\partial x} \mu,$$

или

$$\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{\partial \mu}{\partial x} N - \frac{\partial \mu}{\partial y} M .$$

Разделив обе части этого равенства на μ, получим

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial x} N - \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial y} M , \qquad (10.2)$$

$$N \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}. \qquad (10.3)$$

Таким образом, всякая функция μ, удовлетворяющая уравнению (10.3), является интегрирующим множителем уравнения (10.1). Следовательно, для нахождения $\mu(x, y)$ нужно проинтегрировать дифференциальное уравнение в частных производных (10.3). В общем случае эта задача является сложной, поэтому рассмотрим два частных случая.

1) Пусть $\mu = \mu(x)$. Тогда условие (10.3) принимает вид

$$N \frac{d \ln \mu}{dx} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$$

или

$$\frac{d \ln \mu}{dx} = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right).$$

Откуда находим

$$\ln \mu(x) = \int \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)dx + C$$

и

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)dx}$$

(так как достаточно иметь какой-нибудь один интегрирующий множитель, то можно взять $C = 0$).

Итак, если выражение

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

зависит только от x, то интегрирующий множитель $\mu = \mu(x)$ существует и может быть найден из уравнения

$$\boxed{\frac{d\ln\mu}{dx} = \varphi(x), \quad \text{где} \quad \varphi(x) = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right).} \tag{10.4}$$

В противном случае интегрирующего множителя вида $\mu(x)$ не существует.

2) Пусть $\mu = \mu(y)$. Тогда уравнение (10.3) принимает вид

$$-M\frac{d\ln\mu}{dy} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$$

или

$$\frac{d\ln\mu}{dy} = -\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right).$$

Откуда находим

$$\mu(y) = e^{-\int \frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)dy}.$$

Таким образом, если

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

зависит только от y, то интегрирующий множитель $\mu = \mu(y)$ существует и может быть найден из уравнения

$$\boxed{\frac{d\ln\mu}{dy} = -\psi(y), \quad \text{где} \quad \psi(y) = \frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right).} \tag{10.5}$$

В противном случае интегрирующего множителя вида $\mu(y)$ не существует.

ПРИМЕР 10.1. С помощью интегрирующего множителя, найти общий интеграл уравнения $(x^2 + y^2 + x)dx + ydy = 0$.

РЕШЕНИЕ. Для данного уравнения

$$M(x,y) = x^2 + y^2 + x, \quad N(x,y) = y,$$

$$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 2y.$$

Это уравнение не является уравнением в полных дифференциалах, но отношение $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{1}{y} \cdot 2y = 2$ не зависит от y. Следовательно, существует интегрирующий множитель $\mu = \mu(x)$, который может быть найден из уравнения (10.4):

$$\frac{d\ln\mu}{dx} = \varphi(x), \quad \text{где } \varphi(x) = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = 2.$$

Имеем:

$$\frac{d\ln\mu}{dx} = 2,$$

$$\Rightarrow \ln\mu = 2x + C \quad \text{или} \quad \mu(x) = Ce^{2x},$$

$$\Rightarrow \mu(x) = e^{2x} \quad (\text{при } C = 1).$$

Умножим обе части исходного уравнения на e^{2x} и получим

$$e^{2x}(x^2 + y^2 + x)dx + e^{2x}ydy = 0.$$

Тогда

$$du = e^{2x}(x^2 + y^2 + x)dx + e^{2x}ydy.$$

Для нахождения функции $u(x,y)$ применим формулу (9.3), выбрав в качестве точки (x_0, y_0) начало координат. В этом случае будем иметь

$$u(x,y) = \int_0^x e^{2x}(x^2 + x)dx + \int_0^y e^{2x}ydy + C = \frac{1}{2}x^2e^{2x}\Big|_0^x + \frac{1}{2}y^2e^{2x}\Big|_0^y + C =$$

$$= \frac{1}{2}x^2e^{2x} + \frac{1}{2}y^2e^{2x} + C = \frac{1}{2}e^{2x}\left(x^2 + y^2\right) + C.$$

Следовательно, общее решение уравнения имеет вид

$$\frac{1}{2}e^{2x}\left(x^2 + y^2\right) = \widetilde{C}$$

или

$$e^{2x}\left(x^2 + y^2\right) = C, \quad \text{где } C = 2\widetilde{C}. \ \diamond$$

ПРИМЕР 10.2. Найти общий интеграл уравнения

$$(x^3+xy^2)dx+(x^2y+y^3)dy+ydx-xdy=0$$

Если известно, что для него существует интегрирующий множитель вида $\mu=\mu(x^2+y^2)$.

РЕШЕНИЕ. Если $\mu=\mu(x^2+y^2)=\mu(t)$, то

$$\frac{\partial\mu}{\partial x}=\frac{d\mu}{dt}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}=\frac{d\mu}{dt}\cdot 2x, \qquad \frac{\partial\mu}{\partial y}=\frac{d\mu}{dt}\cdot\frac{\partial t}{\partial y}=\frac{d\mu}{dt}\cdot 2y.$$

Следовательно, из (10.2) получаем:

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{1}{\mu}\cdot\frac{d\mu}{dt}\cdot 2xN-\frac{1}{\mu}\cdot\frac{d\mu}{dt}\cdot 2yM,$$

$$\Rightarrow\ \frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{1}{\mu}\cdot\frac{d\mu}{dt}\cdot\left(2xN-2yM\right),$$

$$\Rightarrow\ \frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{d\ln\mu}{dt}\cdot\left(2xN-2yM\right),$$

$$\Rightarrow\ \frac{d\ln\mu}{dt}=\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{2xN-2yM}. \tag{10.6}$$

Таким образом, интегрирующий множитель $\mu=\mu(x^2+y^2)$ существует, если функция

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{2xN-2yM}$$

зависит только от $t=x^2+y^2$, и находится он в этом случае по формуле (10.6).

Для заданного уравнения

$$M(x,y)=x^3+xy^2+y, \qquad N(x,y)=x^2y+y^3-x,$$

$$\Rightarrow\ \frac{\partial M}{\partial y}=2xy+1, \qquad \frac{\partial N}{\partial x}=2xy-1, \qquad \frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=2,$$

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{2xN-2yM}=\frac{2}{2x(x^2y+y^3-x)-2y(x^3+xy^2+y)}=-\frac{1}{x^2+y^2}.$$

Следовательно, интегрирующий множитель $\mu=\mu(x^2+y^2)=\mu(t)$ существует. Из уравнения (10.6) находим:

$$\frac{d\ln\mu}{dt} = -\frac{1}{x^2+y^2} = -\frac{1}{t},$$

$$\Rightarrow \quad d\ln\mu = -\frac{dt}{t}$$

$$\Rightarrow \quad \ln\mu = -\ln t + C \qquad \text{или} \qquad \mu = \frac{C}{t},$$

$$\Rightarrow \quad \mu = \frac{1}{t} = \frac{1}{x^2+y^2} \qquad (\text{при } C = 1).$$

Умножив заданное дифференциальное уравнение на $\dfrac{1}{x^2+y^2}$, получим:

$$\frac{x^3+xy^2}{x^2+y^2}dx + \frac{x^2y+y^3}{x^2+y^2}dy + \frac{ydx}{x^2+y^2} - \frac{xdy}{x^2+y^2} = 0,$$

$$\Rightarrow \quad xdx + ydy + \frac{ydx}{x^2+y^2} - \frac{xdy}{x^2+y^2} = 0,$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{y}{x^2+y^2} + x\right)dx + \left(y - \frac{x}{x^2+y^2}\right)dy = 0.$$

По формуле (9.3) (полагая $x_0 = 1,\ y_0 = 0$) находим:

$$u(x,y) = \int_1^x \left(\frac{0}{x^2+0^2} + x\right)dx + \int_0^y \left(y - \frac{x}{x^2+y^2}\right)dy + C,$$

$$\Rightarrow \quad u(x,y) = \frac{x^2}{2}\bigg|_1^x + \left(\frac{y^2}{2} - x\cdot\frac{1}{x}\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)\right)\bigg|_0^y + C,$$

$$\Rightarrow \quad u(x,y) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{y^2}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + C.$$

Следовательно, общий интеграл заданного дифференциального уравнения имеет вид

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = \widetilde{C}$$

или

$$x^2 + y^2 - 2\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = C, \quad \text{где } C = 2\widetilde{C}. \ \diamond$$

§ 11. Дифференциальные уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной

До сих пор рассматривались дифференциальные уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной, то есть уравнения, которые можно было записать в виде

$$y' = f(x, y). \tag{11.1}$$

В общем случае дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид:

$$F(x, y, y') = 0, \tag{11.2}$$

причем непосредственный переход от уравнения вида (11.2) к уравнению вида (11.1) не удается. Такие уравнения называются ***не разрешенными относительно производной.***

Рассмотрим некоторые частные случаи уравнений, не разрешенных относительно производной, и укажем способы их интегрирования.

11.1. Уравнения, разрешаемые относительно y' неоднозначно

Пусть уравнение (11.2) таково, что его можно разрешить (в элементарных функциях) относительно y' неоднозначно. Т. е. уравнение (11.2) эквивалентно k различным уравнениям

$$y' = f_1(x, y), \quad y' = f_2(x, y), \quad y' = f_3(x, y), \quad \ldots, \quad y' = f_k(x, y). \tag{11.3}$$

Предположим, что для каждого из уравнений (11.3) найден общий интеграл:

$$\Phi_1(x, y, C) = 0, \quad \Phi_2(x, y, C) = 0, \quad \ldots, \quad \Phi_k(x, y, C) = 0. \tag{11.4}$$

Совокупность общих интегралов (11.4) называется общим интегралом уравнения, разрешаемого относительно y' неоднозначно. Эту совокупность можно записать в виде

$$\boxed{\Phi_1(x, y, C) \cdot \Phi_2(x, y, C) \cdot \ldots \cdot \Phi_k(x, y, C) = 0.}$$

Замечание. Если уравнение (11.2) разрешается относительно y' неоднозначно, то через каждую точку (x_0, y_0) области, в которой рассматривается это уравнение, будет проходить не менее k интегральных кривых. Однако условие единственности для этой точки будет считаться нарушенным только в том случае, когда хотя бы две кривые в этой точке будут иметь общую касательную. Т. е. если $f_i(x_0, y_0) \neq f_j(x_0, y_0)$ $(i \neq j)$ и через точку (x_0, y_0) не проходят особые кривые семейств $\Phi_i(x, y, C) = 0$ $(i = \overline{1, k})$, то решение уравнения, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$ считается единственным.

ПРИМЕР 11.1. Найти общий интеграл уравнения $(y')^2 - 4x^2 = 0$. Найти решение, удовлетворяющее условию а) $y(1) = 1$, б) $y(0) = 0$.

РЕШЕНИЕ. Разрешая уравнение относительно y', получаем:

$$y' = 2x, \qquad y' = -2x.$$

Интегрируя каждое из этих уравнений, находим:

$$y = x^2 + C, \qquad y = -x^2 + C.$$

Общий интеграл исходного уравнения имеет вид

$$\left(y - x^2 - C\right)\cdot\left(y + x^2 - C\right) = 0.$$

а) Найдем решение, удовлетворяющее условию $y(1) = 1$. Имеем:

$$y = x^2 + C \quad \Rightarrow \quad 1 = 1 + C \quad \Rightarrow \quad C = 0;$$

$$y = -x^2 + C \quad \Rightarrow \quad 1 = -1 + C \quad \Rightarrow \quad C = 2.$$

Таким, образом, искомое решение $y = x^2$ и $y = -x^2 + 2$. Решение единственное, так как указанные кривые имеют в точке $(1; 1)$ разные касательные (рис. 11.1).

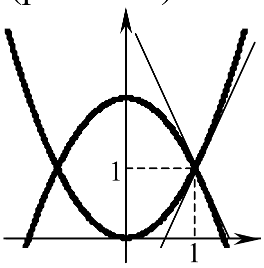

Рис. 11.1

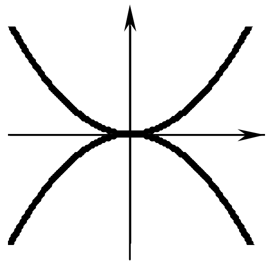

Рис. 11.2.

б) Найдем решение, удовлетворяющее условию $y(0) = 0$. Имеем:

$$y = x^2 + C \quad \Rightarrow \quad 0 = 0 + C \quad \Rightarrow \quad C = 0;$$

$$y = -x^2 + C \quad \Rightarrow \quad 0 = -0 + C \quad \Rightarrow \quad C = 0.$$

Таким, образом, искомое решение $y = x^2$ и $y = -x^2$. Кривые $y = x^2$ и $y = -x^2$ имеют в точке $(0; 0)$ общую касательную. Следовательно, единственности решения в точке $(0; 0)$ нет (рис. 11.2). $\diamond$

Если уравнение (11.2) не удается разрешить относительно y' даже неоднозначно, либо полученные в результате уравнения сложно интегрировать, то в ряде случаев все же можно найти общее решение в параметрическом виде. Рассмотрим этот метод на примере неполных уравнений, т. е. уравнений, не содержащих явно x или y.

11.2. Неполные уравнения

а) Уравнения, содержащие только производную

Пусть дифференциальное уравнение имеет вид

$$F(y')=0. \qquad (11.5)$$

Так как уравнение (11.5) не содержит x и y, то его корни тоже не будут зависеть от x и y, т. е. будут постоянными. Пусть существует хотя бы один вещественный корень $y'=k_i$ этого уравнения. Интегрируя уравнение $y'=k_i$, получаем:

$$y=k_i x+C \qquad \text{или} \qquad k_i=\frac{y-C}{x}.$$

Так как k_i – корень уравнения (11.5), то

$$F\left(\frac{y-C}{x}\right)=0.$$

Уравнению $F\left(\frac{y-C}{x}\right)=0$ удовлетворяют, очевидно, все решения дифференциального уравнения и, следовательно, оно является общим интегралом уравнения (11.5).

ПРИМЕР 11.2. Общим интегралом уравнения

$$(y')^4-2(y')^3+(y')^2-4y'+4=0$$

является выражение:

$$\left(\frac{y-C}{x}\right)^4-2\left(\frac{y-C}{x}\right)^3+\left(\frac{y-C}{x}\right)^2-4\left(\frac{y-C}{x}\right)+4=0$$

(вещественные корни уравнения существуют, например корнем будет $y'=1$). ◇

б) Уравнения, не содержащие искомой функции

Рассмотрим уравнение вида

$$F(x,y')=0, \qquad (11.6)$$

в котором отсутствует искомая функция y. Возможны 2 случая:

1) уравнение (11.6) разрешимо относительно y' неоднозначно;
2) уравнение (11.6) неразрешимо относительно y', но допускает параметрическое представление, т. е. может быть заменено двумя уравнениями вида

$$\boxed{x=\varphi(t), \qquad y'=\psi(t).}$$

Первый случай сводится к уравнению, рассмотренному в п. 11.1. Во втором случае можно попытаться найти его решение в параметрическом виде. Имеем:

$$dy = y'dx, \qquad dx = \varphi'(t)dt,$$

$$\Rightarrow \quad dy = \psi(t)\cdot\varphi'(t)dt,$$

$$\Rightarrow \quad y = \int \psi(t)\cdot\varphi'(t)dt + C.$$

Таким образом, интегральные кривые уравнения (11.6) определяются в параметрическом виде следующими уравнениями:

$$\boxed{\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \int \psi(t)\cdot\varphi'(t)dt + C. \end{cases}}$$

Исключая здесь (и далее в подобных ситуациях) из параметрических уравнений параметр t, получаем общий интеграл исходного уравнения.

Если уравнение (11.6) можно разрешить относительно x, т. е. записать в виде

$$\boxed{x = \varphi(y'),}$$

то в качестве параметра удобно взять $t = y'$. Тогда

$$x = \varphi(t), \qquad dy = y'dx = t\cdot\varphi'(t)dt,$$

$$\Rightarrow \quad y = \int t\cdot\varphi'(t)dt + C.$$

Общее решение уравнения в этом случае определяется в параметрическом виде уравнениями:

$$\boxed{\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \int t\cdot\varphi'(t)\,dt + C. \end{cases}}$$

ПРИМЕР 11.3. Проинтегрировать уравнение $x = (y')^3 + y'$.
РЕШЕНИЕ. Уравнение не содержит y и разрешено относительно x. Следовательно, его решения можно найти в параметрическом виде.

Полагаем $y' = t$. Тогда

$$x = t^3 + t, \qquad dx = \left(3t^2 + 1\right)dt,$$

$$dy = y'dx = t\cdot\left(3t^2 + 1\right)dt,$$

$$\Rightarrow \quad y = \int t\cdot\left(3t^2 + 1\right)dt + C = \frac{3}{4}t^4 + \frac{t^2}{2} + C.$$

Таким образом, уравнения $\begin{cases} x = t^3 + t, \\ y = \dfrac{3}{4}t^4 + \dfrac{t^2}{2} + C \end{cases}$ определяют в параметрическом виде общее решение заданного уравнения. ◇

ПРИМЕР 11.4. Проинтегрировать уравнение $y'(x - \ln y') = 1$.
РЕШЕНИЕ. Уравнение не содержит y и может быть разрешено относительно x:

$$x = \frac{1}{y'} + \ln y'.$$

Следовательно, его решения можно найти в параметрическом виде.

Полагаем $y' = t$. Тогда

$$x = \frac{1}{t} + \ln t, \qquad dx = \left(-\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t}\right)dt,$$

$$\Rightarrow \quad dy = y'dx = t \cdot \left(-\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t}\right)dt = \left(-\frac{1}{t} + 1\right)dt.$$

Интегрируя, получаем

$$y = \int\left(-\frac{1}{t} + 1\right)dt + C = -\ln|t| + t + C.$$

Таким образом, уравнения

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{t} + \ln t, \\ y = -\ln|t| + t + C \end{cases}$$

определяют общее решение уравнения в параметрической форме. ◇

в) Уравнения, не содержащие независимой переменной

Рассмотрим уравнение вида

$$F(y, y') = 0, \tag{11.7}$$

в котором отсутствует свободная переменная *x*. Возможны 2 случая:

1) уравнение (11.7) разрешимо относительно y' неоднозначно;
2) уравнение (11.7) неразрешимо относительно y', но допускает параметрическое представление, т. е. может быть заменено двумя уравнениями вида

$$\boxed{y = \varphi(t), \qquad y' = \psi(t).}$$

Первый случай мы рассмотрели выше в п.11.1. Во втором случае можно попытаться найти его решение в параметрическом виде. Имеем:

$$dy = \varphi' dt \quad \text{и} \quad \frac{dy}{dx} = \psi(t).$$

$$\Rightarrow \quad dx = \frac{dy}{\psi(t)} = \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)} dt \quad \text{и} \quad x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)} dt + C.$$

Таким образом, интегральные кривые уравнения (11.7) определяются в параметрическом виде следующими уравнениями:

$$\boxed{\begin{cases} x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)} dt + C, \\ y = \varphi(t). \end{cases}}$$

Если уравнение (11.7) можно разрешить относительно y, т. е. записать в виде

$$\boxed{y = \varphi(y'),}$$

то в качестве параметра удобно взять $t = y'$. Тогда

$$y = \varphi(t), \quad dy = \varphi' dt$$

$$\Rightarrow \quad dx = \frac{dy}{y'} = \frac{\varphi'(t)}{t} dt \quad \text{и} \quad x = \int \frac{\varphi'(t)}{t} dt + C.$$

Общее решение уравнения в этом случае определяется в параметрическом виде уравнениями:

$$\boxed{\begin{cases} x = \int \frac{\varphi'(t)}{t} dt + C, \\ y = \varphi(t). \end{cases}}$$

ПРИМЕР 11.5. Проинтегрировать уравнение $y = (y')^4 - 3(y')^3 + y' - 6$.
РЕШЕНИЕ. Уравнение не содержит x и разрешено относительно y. Найдем его решения в параметрическом виде. Полагаем $y' = t$. Тогда

$$y = t^4 - 3t^3 + t - 6 \quad \text{и} \quad dy = (4t^3 - 9t^2 + 1) dt.$$

Из $y' = \frac{dy}{dx}$ следует

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{4t^3 - 9t^2 + 1}{t} dt = \left(4t^2 - 9t + \frac{1}{t}\right) dt \quad (t \neq 0),$$

$$\Rightarrow \quad x = \int \left(4t^2 - 9t + \frac{1}{t}\right) dt + C = \frac{4}{3} t^3 - \frac{9}{2} t^2 + \ln|t| + C.$$

Таким образом, уравнения

$$\begin{cases} x = \frac{4}{3}t^3 - \frac{9}{2}t^2 + \ln|t| + C, \\ y = t^4 - 3t^3 + t - 6 \end{cases}$$

определяют общее решение уравнения в параметрическом виде.

Общее решение получено в предположении, что $t \neq 0$. При $t = 0$ получаем $y = -6$. Проверка показывает, что это тоже решение уравнения, которое не входит в общее решение.◇

ПРИМЕР 11.6. Проинтегрировать уравнение $y^{2/3} + (y')^{2/3} = 1$.

РЕШЕНИЕ. Уравнение не содержит x и допускает параметрическое представление

$$y = \cos^3 t, \quad y' = \sin^3 t \quad (\text{где } t \in [0; 2\pi]).$$

Следовательно, его решения можно найти в параметрическом виде.

Имеем:

$$y = \cos^3 t \quad \Rightarrow \quad dy = -3\cos^2 t \cdot \sin t dt.$$

Из $y' = \frac{dy}{dx} = \sin^3 t$ следует

$$dx = \frac{dy}{\sin^3 t} = \frac{-3\cos^2 t \cdot \sin t}{\sin^3 t} dt = -3 \cdot \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} dt \quad (\sin t \neq 0),$$

$$\Rightarrow \quad x = -3 \cdot \int \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} dt + C = -3 \cdot \int \frac{1 - \sin^2 t}{\sin^2 t} dt + C = 3\operatorname{ctg} t + 3t + C.$$

Таким образом, уравнения

$$\begin{cases} x = 3\operatorname{ctg} t + 3t + C, \\ y = \cos t \end{cases}$$

определяют общее решение уравнения в параметрическом виде.

Общее решение получено в предположении, что $\sin t \neq 0$. Уравнение $\sin t = 0$ имеет множество решений $t = \pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$), но только $t = 0$ и $t = \pi$ попадают в промежуток $[0; 2\pi]$. При $t = 0$ и $t = \pi$ получаем соответственно $y = 1$ и $y = -1$. Проверка показывает, что это тоже решения уравнения, которые не входят в общее решение.◇

Замечание. Уравнение в примере 11.6 можно было разрешить относительно y и проинтегрировать его также, как уравнение примера 11.5. Но тогда решение окажется более трудоемким, чем приведенное выше (убедитесь в этом самостоятельно).

11.3. Уравнения Лагранжа

Пусть уравнение $F(x, y, y') = 0$ не может быть разрешено относительно y', но является линейным относительно x и y. В этом случае его можно записать в виде

$$\boxed{y = x \cdot \varphi(y') + \psi(y')\,.} \tag{11.8}$$

Такое уравнение называется ***уравнением Лагранжа***.

Решение уравнения Лагранжа можно найти в параметрической форме.

Полагаем $y' = t$. Тогда уравнение (11.8) запишется в виде

$$y = x \cdot \varphi(t) + \psi(t)\,.$$

Дифференцируя это выражение по x, получаем:

$$y' = \varphi(t) + x\varphi'(t)\frac{dt}{dx} + \psi'(t)\frac{dt}{dx},$$

$$t - \varphi(t) = \left[x\varphi'(t) + \psi'(t)\right]\frac{dt}{dx},$$

$$\frac{dx}{dt}\left[t - \varphi(t)\right] - x\varphi'(t) = \psi'(t),$$

$$\frac{dx}{dt} - x \cdot \frac{\varphi'(t)}{t - \varphi(t)} = \frac{\psi'(t)}{t - \varphi(t)}, \quad (\text{где } \ t - \varphi(t) \neq 0). \tag{11.9}$$

Последнее уравнение является линейным относительно x и $\dfrac{dx}{dt}$ и, следовательно, легко интегрируется методом вариации постоянной или методом Бернулли. Пусть $x = \mu(t, C)$ – общее решение уравнения (11.9). Тогда общее решение уравнения Лагранжа в параметрическом виде

$$\boxed{\begin{cases} x = \mu(t, C), \\ y = \mu(t, C) \cdot \varphi(t) + \psi(t). \end{cases}}$$

Общее решение уравнения Лагранжа получено нами в предположении, что $t - \varphi(t) \neq 0$. Если уравнение $t - \varphi(t) = 0$ имеет действительные корни t_i, то к найденному общему решению уравнения Лагранжа надо еще добавить $y = x \cdot \varphi(t_i) + \psi(t_i)$. Непосредственная проверка показывает, что это будут решения, которые теряются в процессе интегрирования.

ПРИМЕР 11.6. Проинтегрировать уравнение $y = 2xy' - 4(y')^3$.
РЕШЕНИЕ. Данное уравнение является уравнением Лагранжа. Полагаем $y' = t$. Тогда уравнение запишется в виде

$$y = 2xt - 4t^3.$$

Дифференцируя это выражение по x, находим:

$$y' = 2t + 2x\frac{dt}{dx} - 12t^2\frac{dt}{dx},$$

$$\Rightarrow \quad t = 2t + \left[2x - 12t^2\right]\frac{dt}{dx},$$

$$\Rightarrow \quad t + \left[2x - 12t^2\right]\frac{dt}{dx} = 0,$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} + \frac{2x - 12t^2}{t} = 0 \quad (\text{где } t \neq 0),$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} + \frac{2}{t}x = 12t.$$

Получили линейное неоднородное уравнение относительно x и $\dfrac{dx}{dt}$. Найдем его решение методом Бернулли. Полагаем $x = u \cdot v$. Тогда $x' = u'v + uv'$. Подставим x и x' в уравнение и получим следующую систему для функций u и v:

$$\begin{cases} v' + \dfrac{2}{t}v = 0, \\ u'v = 12t. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем $v = \dfrac{1}{t^2}$, $u = 3t^4 + C$ и общее решение линейного неоднородного уравнения будет иметь вид

$$x = \frac{1}{t^2}\left(3t^4 + C\right) = 3t^2 + \frac{C}{t^2}.$$

Следовательно, интегральные кривые исходного уравнения определяются уравнениями:

$$\begin{cases} x = 3t^2 + \dfrac{C}{t^2}, \\ y = 2xt - 4t^3 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = 3t^2 + \dfrac{C}{t^2}, \\ y = 2t^3 + \dfrac{2C}{t}. \end{cases}$$

Это решение получено в предположении, что $t \neq 0$. При $t = 0$ получаем

$$y = 2x \cdot 0 - 4 \cdot 0^3 \quad \Rightarrow \quad y = 0.$$

Проверка показывает, что это тоже решение уравнения, которое не входит в общее. ◇

11.4. Уравнения Клеро

Получить уравнение (11.9) невозможно, когда $t - \varphi(t) \equiv 0$. В этом случае $t = \varphi(t)$ или $\varphi(y') = y'$ и уравнение Лагранжа принимает вид

$$\boxed{y = x \cdot y' + \psi(y').} \tag{11.10}$$

Уравнение вида (11.10) называется ***уравнением Клеро***.

Так же как для уравнения Лагранжа, для интегрирования уравнения Клеро применяют параметрический метод.

Полагаем $y' = t$. Тогда уравнение (11.10) запишется в виде

$$y = x \cdot t + \psi(t). \tag{11.11}$$

Дифференцируя обе части уравнения (11.11) по x, получаем:

$$y' = t + x\frac{dt}{dx} + \psi'(t)\frac{dt}{dx},$$

$$t = t + \left[x + \psi'(t)\right]\frac{dt}{dx},$$

$$\left[x + \psi'(t)\right]\frac{dt}{dx} = 0.$$

Последнее уравнение распадается на два уравнения:

$$\frac{dt}{dx} = 0 \qquad \text{или} \qquad x + \psi'(t) = 0.$$

В первом случае решение уравнения определяется системой

$$\begin{cases} \dfrac{dt}{dx} = 0, \\ y = xt + \psi(t). \end{cases}$$

Откуда находим $t = C$ и

$$\boxed{y = x \cdot C + \psi(C).} \tag{11.12}$$

Функция (11.12) является общим решением уравнения Клеро (однопараметрическое семейство прямых).

Замечание. Сравнивая выражения (11.10) и (11.12), замечаем, что для получения общего решения уравнения Клеро достаточно в исходном уравнении заменить производную y' на произвольную постоянную C.

Во втором случае решение определяется системой

$$\begin{cases} x + \psi'(t) = 0, \\ y = xt + \psi(t), \end{cases}$$

из которой находим решение

$$\begin{cases} x = -\psi'(t), \\ y = -\psi'(t) \cdot t + \psi(t). \end{cases} \tag{11.13}$$

Убедимся, что кривая (11.13) действительно является интегральной кривой уравнения Клеро.

Из (11.13) находим:

$$dx = -\psi''(t)dt,$$

$$dy = [-\psi''(t) \cdot t - \psi'(t) + \psi'(t)]dt = -\psi''(t) \cdot tdt,$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-\psi''(t) \cdot tdt}{-\psi''(t)dt} = t.$$

Следовательно, подставляя (11.13) в уравнение (11.10) получим тождество:

$$\underbrace{-\psi'(t) \cdot t + \psi(t)}_{y} = \underbrace{-\psi'(t)}_{x} \cdot \underbrace{t}_{y'} + \psi(\underbrace{t}_{y'}).$$

Более того, обычно решение (11.13) является особым. Действительно, пусть

$$\psi'(t) \neq const.$$

Тогда из уравнения $x + \psi'(t) = 0$ можно выразить t:

$$t = \chi(x).$$

Это позволит записать (11.13) в явном виде:

$$y = x \cdot \chi(x) + \psi(\chi(x)).$$

Предположим, что это решение получается из общего при некотором значении постоянной C_0:

$$x \cdot \chi(x) + \psi(\chi(x)) = C_0 x + \psi(C_0).$$

Тогда

$$\frac{d}{dx}\big(x \cdot \chi(x) + \psi(\chi(x))\big) = \frac{d}{dx}\big(C_0 x + \psi(C_0)\big),$$

$$\Rightarrow \quad \chi(x) + x \cdot \chi'(x) + \underbrace{\psi'(\chi(x))}_{-x} \cdot \chi'(x) = C_0,$$

$$\Rightarrow \quad \chi(x) = C_0.$$

Следовательно, решение (11.13) может быть получено из общего только если допустить, что $C = C(x)$. Но это означает, что решение является особым.

ПРИМЕР 11.7. Проинтегрировать уравнение $y = y'x + (y')^{-1}$.

РЕШЕНИЕ. Данное уравнения является уравнением Клеро. Полагаем $y' = t$. Тогда уравнение запишется в виде

$$y = tx + t^{-1}.$$

Дифференцируя обе части этого равенства по x, получаем:

$$y' = \frac{dt}{dx}x + t - t^{-2}\cdot\frac{dt}{dx},$$

$$\Rightarrow\ t = \frac{dt}{dx}x + t - t^{-2}\cdot\frac{dt}{dx} \quad \text{или} \quad \frac{dt}{dx}\left(x - t^{-2}\right) = 0.$$

$$\Rightarrow\ \frac{dt}{dx} = 0 \quad \text{или} \quad x - t^{-2} = 0.$$

В первом случае имеем:

$$\begin{cases} \dfrac{dt}{dx} = 0, \\ y = tx + t^{-1}. \end{cases}$$

Откуда получаем $t = C$ и общее решение уравнения Клеро (однопараметрическое семейство прямых)

$$y = x\cdot C + C^{-1}.$$

Во втором случае

$$\begin{cases} x - t^{-2} = 0, \\ y = tx + t^{-1}. \end{cases}$$

Откуда находим

$$\begin{cases} x = t^{-2}, \\ y = t\cdot t^{-2} + t^{-1} = 2t^{-1}. \end{cases}$$

Избавляясь от параметра t, получаем в итоге решение

$$y^2 = 4x.$$

Таким образом, парабола $y^2 = 4x$ есть огибающая семейства прямых $y = x\cdot C + C^{-1}$ (рис. 11.3) и является особым решением заданного уравнения Клеро. ◇

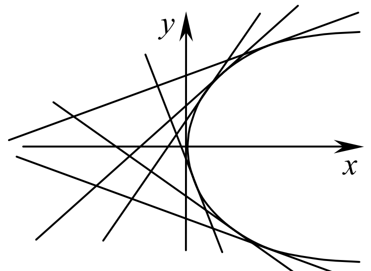

Рис. 11.3.

ГЛАВА II
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

§ 12. Основные понятия и определения

Дифференциальными уравнениями высшего порядка называют уравнения порядка выше первого. В общем случае такие уравнения имеют вид

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{12.1}$$

где $n > 1$.

Замечание. Функция F может не зависеть от некоторых из аргументов $x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$, но обязательно в уравнении (12.1) должна присутствовать производная n-го порядка.

В нашем курсе мы будем рассматривать в основном такие дифференциальные уравнения n-го порядка $(n > 1)$, которые можно записать в виде

$$\boxed{y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}).} \tag{12.2}$$

Уравнение (12.2) называют уравнением, ***разрешенным относительно старшей производной***.

Также как и дифференциальные уравнения первого порядка, дифференциальные уравнения высших порядков имеют, вообще говоря, бесчисленное множество решений. Каждое из этих решений изображается на плоскости xOy некоторой кривой (интегральной кривой). Чтобы из этого множества решений выбрать определенное, надо задать n условий, которым должно удовлетворять искомое решение. Обычно, задают значение искомой функции и всех ее производных до порядка $n-1$ включительно при некотором значении аргумента $x = x_0$:

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_{01},\ y''(x_0) = y_{02},\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{0n-1}. \tag{12.3}$$

Совокупность этих условий называется ***начальными условиями*** для дифференциального уравнения n-го порядка.

Нахождение решения уравнения (12.1) или (12.2), удовлетворяющего заданным начальным условиям (12.3), называется решением ***задачи Коши*** для этого уравнения. Достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши для уравнения, порядка n, разрешенного относительно старшей производной, дает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 12.1 (Коши). *Пусть в уравнении*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \qquad (12.2)$$

функция $f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$ *удовлетворяет двум условиям:*

1) $f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$ *непрерывна как функция* $(n+1)$*-ой переменной* $x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ *в некоторой области* D $(n+1)$*-мерного пространства*;
2) *ее частные производные по переменным* $y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ *в области* D *ограничены.*

Тогда для любой точки $(x_0, y_0, y_{01}, y_{02}, \dots, y_{0n-1}) \in D$ *существует единственное решение* $y = \varphi(x)$ *уравнения* (12.2), *определенное в некотором интервале* (a, b), *содержащем точку* x_0, *и удовлетворяющее начальным условиям*

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_{01},\ y''(x_0) = y_{02},\ \dots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{0n-1}.$$

Замечание. Единственность решения задачи Коши для уравнения n-го порядка $(n > 1)$ не означает, что через данную точку (x_0, y_0) плоскости xOy проходит одна интегральная кривая $y = \varphi(x)$, как это имело место для уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной. Кривых через эту точку проходит множество, а единственность означает, что они различаются набором значений $y'(x_0)$, $y''(x_0)$, …, $y^{(n-1)}(x_0)$ (т. е. через точку (x_0, y_0) не проходит двух кривых с одинаковыми значениями $y'(x_0), y''(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0)$). Например, для уравнения второго порядка $y'' = f(x, y, y')$ с начальными условиями $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_{01}$, единственность решения означает, что через точку (x_0, y_0) плоскости xOy проходит возможно бесконечное множество интегральных кривых, но только одна из них имеет в этой точке касательную с угловым коэффициентом y_{01}.

Из теоремы 12.1 следует, что, закрепляя значение x_0 и изменяя в некоторых пределах значения $y_0, y_{01}, y_{02}, \dots, y_{0n-1}$ (так, чтобы точка $(x_0, y_0, y_{01}, y_{02}, \dots, y_{0n-1})$ принадлежала области D), мы будем для каждой системы чисел $y_0, y_{01}, y_{02}, \dots, y_{0n-1}$ получать свое решение. Это подтверждает предположение о бесконечном множестве решений уравнения n-го порядка и говорит о том, что эта совокупность решений зависит от n произвольных постоянных.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Функция*

$$y=\varphi(x,C_1,C_2,\ldots,C_n),$$

зависящая от x *и* n *произвольных постоянных* $C_1,C_2,\ldots,C_n$*, называется общим решением дифференциального уравнения*

$$y^{(n)}=f(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n-1)}), \tag{12.2}$$

в некоторой области D *существования и единственности решения задачи Коши, если она удовлетворяет следующим двум условиям:*

1) *при любых допустимых значениях постоянных* $C_1,C_2,\ldots,C_n$ *она удовлетворяет уравнению* (12.2);

2) *каковы бы ни были начальные условия*

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_{01},\ y''(x_0)=y_{02},\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_{0n-1}, \tag{12.3}$$

где $(y_0,y_{01},y_{02},\ldots,y_{0n-1})\in D$*, можно так подобрать значения постоянных* C_{01}, C_{02}, …, C_{0n}*, что решение* $y=\varphi(x,C_{01},C_{02},\ldots,C_{0n})$ *будет удовлетворять заданным начальным условиям* (12.3).

Уравнение $\Phi(x,y,C_1,C_2,\ldots,C_n)=0$, задающее общее решение в неявном виде, называется ***общим интегралом уравнения.***

С геометрической точки зрения общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения (12.2) представляет собой семейство интегральных кривых, зависящих от n параметров. Решение уравнения, удовлетворяющее условиям (12.3) будет изображаться определенной кривой этого семейства. Начальных условий достаточно для того, чтобы выделить это решение из общего. Соответствующие ему значения постоянных $C_1,C_2,\ldots,C_n$ будут находиться из системы уравнений

$$\begin{cases} y_0=\varphi(x_0,C_1,C_2,\ldots,C_n), \\ y_{01}=\varphi'(x_0,C_1,C_2,\ldots,C_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{0n-1}=\varphi^{(n-1)}(x_0,C_1,C_2,\ldots,C_n). \end{cases}$$

Решение (интеграл) дифференциального уравнения (12.2) *называется* ***частным****, если в каждой его точке сохраняется единственность решения задачи Коши.* Любое частное решение (интеграл) получается из общего решения (интеграла) при конкретных значениях постоянных $C_1,C_2,\ldots,C_n$ (включая значения $C_i=\pm\infty$).

Решение (интеграл) дифференциального уравнения (12.2), в каждой точке которого нарушено условие единственности, называется ***особым***. Очевидно, что особое решение не может быть получено из общего решения. Оно будет среди тех решений, которые «теряются» в процессе преобразований.

Задача интегрирования дифференциальных уравнений n-го порядка является более сложной, чем интегрирование дифференциальных уравнений первого порядка. Одним из основных методов, применяемых при интегрировании дифференциальных уравнений высших порядков, является понижение порядка уравнения. В следующем параграфе мы рассмотрим несколько типов уравнений, которые можно проинтегрировать таким методом.

§ 13. Понижение порядка уравнения

13.1. Уравнения, содержащие только x и $y^{(n)}$

Пусть уравнение порядка n содержит только x и $y^{(n)}$, т. е. имеет вид

$$F(x, y^{(n)}) = 0. \tag{13.1}$$

Здесь возможны два случая:

1) уравнение разрешено относительно $y^{(n)}$;

2) уравнение нельзя разрешить относительно $y^{(n)}$.

Рассмотрим первый случай, когда уравнение разрешено относительно $y^{(n)}$, т. е. имеет вид

$$\boxed{y^{(n)} = f(x),}$$

причем $f(x)$ непрерывна на некотором интервале (a,b).

Общее решение такого уравнения получается в результате n-кратного последовательного интегрирования правой части уравнения. Действительно, так как

$$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)' = \frac{dy^{(n-1)}}{dx} = f(x),$$

то
$$dy^{(n-1)} = f(x)dx.$$

Интегрируя обе части, получим уравнение порядка $(n-1)$:

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1 .$$

Так как
$$y^{(n-1)} = \left(y^{(n-2)}\right)' = \frac{dy^{(n-2)}}{dx},$$

то
$$y^{(n-2)} = \int\left(\int f(x)dx + C_1\right)dx + C_2 = \int dx \int f(x)dx + C_1x + C_2 .$$

Продолжая этот процесс, мы будем каждый раз понижать порядок уравнения на единицу, и после n-кратного интегрирования получим

$$y = \int dx \int dx \ldots \int f(x)dx + C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + C_{n-1}x + C_n .$$

ПРИМЕР 13.1. Найти общее решение уравнения $y''' = -\frac{1}{x^2}$ и частное решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$y(1)=0, \quad y'(1)=0, \quad y''(1)=0.$$

РЕШЕНИЕ. Имеем

$$y''' = (y'')' = -\frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad y'' = \int\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx = \frac{1}{x} + C_1;$$

$$y'' = (y')' = \frac{1}{x} + C_1 \quad \Rightarrow \quad y' = \int\left(\frac{1}{x} + C_1\right)dx = \ln|x| + C_1 x + C_2.$$

Интегрируя третий раз, получаем общее решение уравнения

$$y = \int\left(\ln|x| + C_1 x + C_2\right)dx = x\ln|x| - x + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

Чтобы найти частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям, надо определить соответствующие значения C_1, C_2, C_3. Полагая $x=1$ имеем:

$$y = -1 + 0{,}5C_1 + C_2 + C_3 = 0,$$
$$y' = C_1 + C_2 = 0,$$
$$y'' = 1 + C_1 = 0.$$

Откуда находим

$$C_1 = -1, \quad C_2 = 1, \quad C_3 = 0{,}5.$$

Таким образом, искомое частное решение имеет вид

$$y = x\ln|x| - 0{,}5x^2 + 0{,}5. \ \diamond$$

Замечание. Если в задаче требуется найти только частное решение дифференциального уравнения, то целесообразно определять значения постоянных в процессе решения, а не после нахождения общего решения. Это ускоряет решение задачи, так как в результате подстановки конкретных значений C_i обычно упрощаются интегралы (см. пример 13.5).

Теперь рассмотрим второй случай, когда уравнение

$$F(x, y^{(n)}) = 0 \tag{13.1}$$

нельзя разрешить относительно $y^{(n)}$. Если оно допускает параметрическое представление,

$$\boxed{x = \varphi(t), \quad y^{(n)} = \psi(t),}$$

то его решение можно найти в параметрическом виде.

Действительно, из $dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx$ получим

$$dy^{(n-1)} = \psi(t)\cdot\varphi'(t)dt.$$

Тогда

$$y^{(n-1)} = \int \psi(t)\cdot\varphi'(t)dt + C_1 = \psi_1(t, C_1).$$

Из $dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}dx$ имеем

$$dy^{(n-2)} = \psi_1(t, C_1)\cdot\varphi'(t)dt,$$

$$\Rightarrow\quad y^{(n-2)} = \int \psi_1(t, C_1)\cdot\varphi'(t)dt + C_2 = \psi_2(t, C_1, C_2).$$

Аналогично найдем выражения для $y^{(n-3)}, y^{(n-4)}, \ldots, y', y$ и получим

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi_n(t, C_1, C_2, \ldots, C_n). \end{cases}$$

Эти уравнения определяют общее решение уравнения (13.1) в параметрическом виде.

ПРИМЕР 13.2. Проинтегрировать уравнение $y'' + e^{y''} = x$.

РЕШЕНИЕ. Данное уравнение не может быть разрешено относительно y''. Попытаемся найти его решение в параметрическом виде. Полагаем $y'' = t$. Тогда

$$x = t + e^t, \qquad dx = (1 + e^t)dt.$$

Поэтому

$$dy' = y''dx = t(1 + e^t)dt,$$

$$y' = \frac{t^2}{2} + \int te^t dt = \frac{t^2}{2} + e^t(t-1) + C_1.$$

Тогда

$$dy = y'dx = \left(\frac{t^2}{2} + e^t(t-1) + C_1\right)\cdot(1 + e^t)dt,$$

$$\Rightarrow\quad dy = \left(\frac{t^2}{2} + e^t(t-1) + C_1 + \frac{t^2}{2}e^t + e^{2t}(t-1) + C_1 e^t\right)dt,$$

$$\Rightarrow\quad y = \frac{t^3}{6} + \left(\frac{t}{2} - \frac{3}{4}\right)e^{2t} + \left(\frac{t^2}{2} + C_1 - 1\right)e^t + C_1 t + C_2.$$

Итак, общее решение уравнения в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = t + e^t, \\ y = \dfrac{t^3}{6} + \left(\dfrac{t}{2} - \dfrac{3}{4}\right)e^{2t} + \left(\dfrac{t^2}{2} + C_1 - 1\right)e^t + C_1 t + C_2. \end{cases} \diamond$$

13.2. Уравнения, не содержащие искомой функции и ее производных до порядка (k – 1) включительно

Пусть уравнение имеет вид

$$\boxed{F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0, \ (1 \le k < n),}$$

т. е. не содержит искомой функции и ее производных до порядка $(k-1)$ включительно. Это уравнение допускает понижение порядка на k единиц заменой $y^{(k)} = p(x)$. В результате такой замены получим уравнение

$$F(x, p, p', \ldots, p^{(n-k)}) = 0.$$

Предположим, что это уравнение интегрируется в квадратурах и $p = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k})$ есть его общее решение. Тогда неизвестную функцию y находим из уравнения $y^{(k)} = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k})$ k-кратным интегрированием правой части.

ПРИМЕР 13.3. Проинтегрировать уравнение $y''' x \ln x = y''$.
РЕШЕНИЕ. Полагая $y'' = p(x)$, имеем $y''' = p'$ и уравнение принимает вид

$$p' x \ln x = p.$$

Это уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Разделяя переменные и интегрируя, получим:

$$\frac{dp}{p} = \frac{dx}{x \ln x} \qquad (\text{где } \ p \ne 0, \ x \ln x \ne 0),$$

$$\Rightarrow \ \ln|p| = \ln|\ln x| + \ln C_1, \quad C_1 > 0$$

$$\Rightarrow \ p = C_1 \cdot \ln|x|, \quad C_1 \ne 0.$$

Условие $x \ln x \ne 0$ не приводит к потери решения уравнения $p' x \ln x = p$. Условие $p \ne 0$ приводит к потере решения $p = 0$. Но оно может быть включено в общее решение при $C_1 = 0$. Следовательно, получаем

$$p = C_1 \cdot \ln|x|, \ \forall C_1 \qquad \text{или} \qquad y'' = C_1 \cdot \ln|x|, \ \forall C_1.$$

Интегрируя дважды, находим

$$y' = C_1 \cdot \int \ln|x| dx = C_1 (x \ln|x| - x) + C_2, \ \ \forall C_1, C_2;$$

$$y = C_1 \int (x \ln|x| - x) dx + C_2 x + C_3,$$

$$\Rightarrow \ y = C_1 \left[x^2 \left(\frac{\ln|x|}{2} - \frac{1}{4} \right) \right] + C_2 x + C_3, \ \forall C_1, C_2, C_3.$$

Это и есть общее решение уравнения. ◇

13.3. Уравнения, не содержащие независимого переменного

Пусть уравнение имеет вид

$$\boxed{F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0,} \tag{13.2}$$

т. е. не содержит независимого переменного. Порядок такого уравнения можно понизить на единицу заменой $p = y'$, причем p рассматривается как новая неизвестная функция, аргументом которой является y, т. е. $p = p(y)$. Тогда

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot y' = \frac{dp}{dy} \cdot p = p' \cdot p,$$

$$y''' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dp}{dy} \cdot p\right) = \frac{d}{dy}\left(\frac{dp}{dy} \cdot p\right) \cdot \frac{dy}{dx} = \left(\frac{d^2 p}{dy^2} \cdot p + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2\right) \cdot p = p'' p^2 + (p')^2 \cdot p,$$

....

$$y^{(n)} = \omega\left(p, \frac{dp}{dy}, \frac{d^2 p}{dy^2}, \ldots, \frac{d^{(n-1)} p}{dy^{n-1}}\right) = \omega(p, p', p'', \ldots, p^{(n-1)}).$$

Подставляя эти выражения в (13.2), получаем уравнение $(n-1)$-го порядка.

Предположим, что $p = \varphi(y, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})$ является общим решением получившегося уравнения $(n-1)$-го порядка. Тогда

$$y' = \varphi(y, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}).$$

Разделим переменные:

$$\frac{dy}{\varphi(y, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})} = dx.$$

Интегрируя, получаем общий интеграл уравнения (13.2):

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})} = x + C_n.$$

ПРИМЕР 13.4. Найти общее решение уравнения $2(y')^2 = (y-1)y''$.

РЕШЕНИЕ. Полагаем $y' = p(y)$. Тогда $y'' = p' \cdot p$ и уравнение принимает вид

$$2p^2 = (y-1) \cdot p \cdot p' \quad \text{или} \quad p\left[2p - (y-1)\frac{dp}{dy}\right] = 0,$$

$$\Rightarrow\ p = 0 \quad \text{или} \quad 2p - (y-1)\frac{dp}{dy} = 0.$$

Из условия $p = 0$ находим:

$$p = y' = 0 \quad \Rightarrow \quad y = C.$$

Из условия $2p-(y-1)\dfrac{dp}{dy}=0$ находим:

$$2\frac{dy}{y-1}=\frac{dp}{p} \quad (\text{где } p\neq 0,\ y-1\neq 0);$$

$$\Rightarrow\ 2\ln|y-1|=\ln|p|-\ln C_1, \quad C_1>0;$$

$$\Rightarrow\ C_1(y-1)^2=p, \quad C_1\neq 0.$$

Условие $y-1\neq 0$ не приводит к потери решения уравнения $2p-(y-1)\dfrac{dp}{dy}=0$. Условие $p\neq 0$ приводит к потере решения $p=0$, но оно может быть включено в общее решение при $C_1=0$. Следовательно, получаем

$$C_1(y-1)^2=p,\ \forall C_1 \quad \text{или} \quad y'=C_1(y-1)^2,\ \forall C_1$$

$$\Rightarrow\ \frac{dy}{(y-1)^2}=C_1dx \quad (\text{где } y-1\neq 0).$$

После интегрирования будем иметь

$$-\frac{1}{(y-1)}=C_1x+C_2.$$

Откуда находим общее решение

$$y=1-\frac{1}{C_1x+C_2},$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные (полученные ранее решения $y=C$ получаются по этой формуле при $C_1=0$; предположение $y-1\neq 0$ не привело к потере решения, т. к. $y=1$ получается из общего решения при $C_2=\infty$).◇

ПРИМЕР 13.5. Найти решение уравнения $y''=128y^3$, удовлетворяющее условиям: $y(0)=1$, $y'(0)=8$.

РЕШЕНИЕ. Полагаем $y'=p(y)$. Тогда $y''=p'\cdot p$ и уравнение принимает вид

$$pp'=128y^3.$$

Тогда
$$pdp=128y^3dy.$$

Интегрируя, находим:

$$\frac{p^2}{2}=128\frac{y^4}{4}+C_1 \quad \text{или} \quad p^2=64y^4+C_1,$$

$$\Rightarrow\ p=\pm\sqrt{64y^4+C_1} \quad \text{или} \quad y'=\pm\sqrt{64y^4+C_1}.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными. Но его интегрирование приводит к неберущимуся интегралу:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{64y^4 + C_1}}.$$

Таким образом, общее решение в данном уравнении найти не удастся. Тем не менее, частное решение найти можно. Из начальных условий получаем

$$\left.\begin{array}{l} y(0)=1, \\ y'(0)=8, \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad 8=\sqrt{64+C_1} \quad \Rightarrow \quad C_1=0.$$

Тогда уравнение $y' = \pm\sqrt{64y^4 + C_1}$ примет вид:

$$y' = 8y^2.$$

Разделяя переменные и интегрируя, находим

$$\frac{dy}{y^2} = 8dx,$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{y} = 8x + C_2 \quad \text{или} \quad y = \frac{1}{C_2 - 8x}.$$

Из начальных условий получаем $C_2 = 1$. Таким образом, искомое частное решение имеет вид:

$$y = \frac{1}{1-8x}. \ \diamond$$

13.4. Уравнения, однородные относительно неизвестной функции и ее производных

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Уравнение

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

называется ***однородным относительно*** $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$**,** если при всех $t \neq 0$ выполняется тождество

$$F(x, ty, ty', ty'', \dots, ty^{(n)}) = t^m F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}).$$

Порядок такого уравнения может быть понижен на единицу подстановкой

$$\boxed{y' = yz,}$$

где $z = z(x)$ – новая неизвестная функция.

Действительно, пусть $t = \dfrac{1}{y}$. Тогда

$$F\left(x, ty, ty', ty'', \dots, ty^{(n)}\right) = F\left(x, 1, \frac{y'}{y}, \frac{y''}{y}, \dots, \frac{y^{(n)}}{y}\right)$$

и $$F\left(x,ty,ty',ty'',\ldots,ty^{(n)}\right)=\frac{1}{y^m}F\left(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)}\right).$$
Из этих двух равенств получаем:
$$F\left(x,1,\frac{y'}{y},\frac{y''}{y},\ldots,\frac{y^{(n)}}{y}\right)=\frac{1}{y^m}F\left(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)}\right),$$
$$\Rightarrow\quad F\left(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)}\right)=y^m\cdot F\left(x,1,\frac{y'}{y},\frac{y''}{y},\ldots,\frac{y^{(n)}}{y}\right).$$
Следовательно, однородное относительно $y,y',y'',\ldots,y^{(n)}$ уравнение может быть записано в виде
$$y^m\cdot F\left(x,1,\frac{y'}{y},\frac{y''}{y},\ldots,\frac{y^{(n)}}{y}\right)=0. \tag{13.3}$$
Далее, из $y'=yz$ находим
$$y''=y'z+yz'=y(z^2+z'),$$
$$y'''=y''z+2y'z'+yz''=y(z^3+3zz'+z''),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y^{(n)}=y\cdot\omega_n(z,z',z'',\ldots,z^{(n-1)}).$$
Откуда получаем:
$$\frac{y'}{y}=z,\qquad \frac{y''}{y}=z^2+z',\qquad \ldots,\qquad \frac{y^{(n)}}{y}=\omega_n\left(z,z',z'',\ldots,z^{(n-1)}\right).$$
Подставляя эти выражения в (13.3) получаем:
$$y^m\cdot\Phi\left(x,z,z',z'',\ldots,z^{(n-1)}\right)=0,$$
$$\Rightarrow\ \Phi\left(x,z,z',z'',\ldots,z^{(n-1)}\right)=0\ \text{(при условии } y\neq 0\text{)}.$$
Пусть $z=\varphi(x,C_1,C_2,\ldots,C_{n-1})$ – общее решение уравнения $\Phi\left(x,z,z',z'',\ldots,z^{(n-1)}\right)=0$. Тогда, из $y'=yz$ находим:
$$y'=y\cdot\varphi(x,C_1,C_2,\ldots,C_{n-1}),$$
$$\Rightarrow\quad \frac{dy}{y}=\varphi(x,C_1,C_2,\ldots,C_{n-1})dx\quad (y\neq 0),$$
$$\Rightarrow\quad \ln|y|=\int\varphi(x,C_1,C_2,\ldots,C_{n-1})dx+C_n,$$
$$\Rightarrow\quad y=C_n\cdot e^{\int\varphi(x,C_1,C_2,\ldots,C_{n-1})dx},\quad C_n\neq 0.$$
Условие $y\neq 0$ приводит к потере решения $y=0$. Но оно может быть включено в общее решение при $C_n=0$. Следовательно, окончательно получаем
$$y=C_n\cdot e^{\int\varphi(x,C_1,C_2,\ldots,C_{n-1})dx},\quad \forall C_n.$$

ПРИМЕР 13.6. Проинтегрировать уравнение $xyy'' - x(y')^2 = yy'$.
РЕШЕНИЕ. Проверим, будет ли данное уравнение однородным относительно y, y', y''. Имеем:

$$F(x, y, y', y'') = xyy'' - x(y')^2 - yy'.$$

Тогда

$$F(x,ty,ty',ty'') = x(ty)(ty'') - x(ty')^2 - (ty)(ty') =$$
$$= t^2(xyy'' - x(y')^2 - yy') = t^2 F(x, y, y', y'').$$

Т. е. уравнение действительно однородное относительно y, y', y''.

Полагаем $y' = yz$. Тогда для y'' будем иметь:

$$y'' = y'z + yz' = y(z^2 + z').$$

Подставляя y' и y'' в уравнение, получаем:

$$xy^2(z^2 + z') - xy^2z^2 = y^2z,$$
$$\Rightarrow \quad x(z^2 + z') - xz^2 = z \quad (y \neq 0),$$
$$\Rightarrow \quad xz' = z,$$
$$\Rightarrow \quad \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x} \quad (z \neq 0,\ x \neq 0),$$
$$\Rightarrow \quad \ln|z| = \ln|x| + \ln C_1, \quad C_1 > 0,$$
$$\Rightarrow \quad z = C_1 x, \quad C_1 \neq 0.$$

Условие $x \neq 0$ не приводит к потери решения уравнения $xz' = z$. Условие $z \neq 0$ приводит к потере решения $z = 0$. Но это решение может быть включено в общее решение при $C_1 = 0$. Следовательно, получаем

$$z = C_1 x, \ \forall C_1 \quad \text{или} \quad \frac{y'}{y} = C_1 x, \ \forall C_1;$$
$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = C_1 x dx;$$
$$\Rightarrow \quad \ln|y| = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 \quad \text{или} \quad y = e^{C_1 \frac{x^2}{2} + C_2};$$
$$\Rightarrow \quad y = C_2 \cdot e^{C_1 x^2}, \quad C_2 \neq 0.$$

Условие $y \neq 0$ приводит к потере решения $y = 0$, но оно может быть включено в общее решение при $C_2 = 0$.

Следовательно, окончательно, общее решение уравнения имеет вид

$$y = C_2 \cdot e^{C_1 x^2}, \quad \forall C_1, C_2. \ \diamond$$

13.5. Уравнения, левая часть которых является точной производной

Рассмотрим уравнение

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0, \qquad (13.4)$$

в котором левая часть является производной от некоторой функции переменных $x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$, т. е.

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = \frac{d}{dx}\Phi(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}). \qquad (13.5)$$

Такое уравнение называют иначе ***уравнением в точных производных***.

Если уравнение является уравнением в точных производных, то его порядок легко понизить на единицу. Действительно, из (13.5) получаем

$$\frac{d}{dx}\Phi(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}) = 0,$$

$$\Rightarrow \ \Phi(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}) = C.$$

Уравнение $(n-1)$-го порядка $\Phi(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}) = C$ называют ***первым интегралом уравнения*** (13.4).

Если уравнение (13.4) не является уравнением в точных производных, то можно попытаться подобрать такую функцию $\mu(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$, после умножения на которую уравнение станет уравнением в точных производных.

ПРИМЕР 13.7. Проинтегрировать уравнение $y'y''' - (y'')^2 = 0$.

РЕШЕНИЕ. Запишем уравнение в виде $\dfrac{y'''}{y''} - \dfrac{y''}{y'} = 0$ (полагаем $y' \neq 0$, $y'' \neq 0$). Отсюда

$$\left(\ln|y''|\right)' - \left(\ln|y'|\right)' = 0,$$

$$\Rightarrow \ \left(\ln|y''| - \ln|y'|\right)' = 0.$$

Таким образом, левая часть уравнения является точной производной от функции $\Phi(x, y, y', y'') = \ln|y''| - \ln|y'|$. Тогда

$$\ln|y''| - \ln|y'| = \ln C_1, \quad C_1 > 0$$

и первый интеграл заданного уравнения можно записать в виде

$$y'' = C_1 y', \text{ где } C_1 \neq 0.$$

Первый интеграл является дифференциальным уравнением второго порядка. Запишем его в виде

$$\frac{d(y')}{dx} = C_1 y' \quad \text{или} \quad \frac{dy'}{y'} = C_1 dx \ (y' \neq 0).$$

Отсюда находим

$$\ln|y'| = C_1 x + \widetilde{C}_2 \quad \text{или} \quad y' = \pm e^{C_1 x + \widetilde{C}_2},$$

$$\Rightarrow \quad y' = C_2 e^{C_1 x}, \ \text{где } C_2 = \pm e^{\widetilde{C}_2} \neq 0.$$

Из уравнения $y' = C_2 e^{C_1 x}$ находим

$$dy = C_2 e^{C_1 x} dx.$$

Интегрируя последнее равенство, получим общее решение исходного уравнения

$$y = C_2 \cdot \frac{1}{C_1} e^{C_1 x} + C_3 = \frac{C_2}{C_1} e^{C_1 x} + C_3, \ \text{где } C_1 \neq 0,\ C_2 \neq 0,\ \forall C_3.$$

В процессе интегрирования уравнения мы предполагали, что $y' \neq 0$ и $y'' \neq 0$. Условию $y' = 0$ удовлетворяют функции $y = C_3$, которые являются решениями уравнения и могут быть получены из общего решения при $C_2 = 0$. Условию $y'' = 0$ удовлетворяют функции $y = C_2 x + C_3$, которые тоже являются решениями уравнения, но из общего решения получены быть не могут. Следовательно, все решения дифференциального уравнения определяются равенствами:

$$y = C_2 \cdot \frac{1}{C_1} e^{C_1 x} + C_3 = \frac{C_2}{C_1} e^{C_1 x} + C_3, \quad y = C_2 x + C_3,$$

где $C_1 \neq 0$, $\forall C_2, C_3$. ◇

§ 14. Линейные однородные дифференциальные уравнения *n*-го порядка

14.1. Общие понятия и определения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Линейным дифференциальным уравнением*** n***-го порядка*** *называется уравнение, линейное относительно неизвестной функции* y *и ее производных* $y', y'', \ldots, y^{(n)}$*, т. е. уравнение вида*

$$p_0(x) y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x) y' + p_n(x) y = g(x), \qquad (14.1)$$

где $p_0(x), p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x)$ *и свободный член* $g(x)$ *– заданные функции аргумента* x *или постоянные, причем* $p_0(x) \neq 0$ *для всех* x *из той области, где рассматривается уравнение* (14.1).

Если правая часть $g(x) \equiv 0$, то уравнение (14.1) называется ***линейным однородным***, если $g(x) \not\equiv 0$, то уравнение (14.1) называется ***линейным неоднородным*** (или ***уравнением с правой частью***).

Если коэффициент $p_0(x)$ не равен нулю ни в одной точке некоторого отрезка $a \le x \le b$, то, разделив на $p_0(x)$, придем к так называемому ***приведенному уравнению***:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x), \quad (14.2)$$

где $a_1(x) = \dfrac{p_1(x)}{p_0(x)}, \quad a_2(x) = \dfrac{p_2(x)}{p_0(x)}, \quad \ldots, \quad a_n(x) = \dfrac{p_n(x)}{p_0(x)}, \quad f(x) = \dfrac{g(x)}{p_0(x)}$.

В дальнейшем будем работать только с этим уравнением. Также в дальнейшем будем предполагать, что функции $a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x), f(x)$ непрерывны на некотором отрезке $[a;b]$. Тогда в области

$$D = \{(x, y, y_1, \ldots, y_{n-1}) \,\big|\, x \in [a;b],\ \forall y, y_i \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

для уравнения (14.2) будут выполняться условия теоремы 12.1 существования и единственности решения и, следовательно, $\forall x_0 \in [a;b]$ и $\forall y_0, y_{0i} \in \mathbb{R}$ существует единственное решение уравнения (14.2), удовлетворяющее условию

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_{01},\ y''(x_0) = y_{02},\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{0n-1}.$$

Линейные дифференциальные уравнения обладают рядом свойств, которые значительно облегчают их интегрирование. Но чтобы эти свойства сформулировать, необходимо вспомнить понятие линейного пространства, введенное раннее в курсе линейной алгебры.

14.2. Линейное пространство: основные определения и утверждения

Пусть L – некоторое множество, элементы которого можно складывать и умножать на числа из $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$). Например, множество матриц одинакового размера, множество векторов, множество функций с одинаковой областью определения и т.д.

Договоримся элементы из L обозначать малыми латинскими буквами, а числа – малыми греческими буквами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Множество L называется* ***линейным пространством над*** $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) *если для любых элементов $a, b, c \in L$ и для любых чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ выполняются условия*:

1) $a + b = b + a$ (*коммутативность сложения элементов из* L);
2) $(a + b) + c = a + (b + c)$ (*ассоциативность сложения элементов из* L);
3) *во множестве L существует такой элемент o, что $a + o = a$* (*элемент o называют* ***нулевым элементом множества*** L);
4) *для любого элемента $a \in L$ существует элемент $-a \in L$ такой, что $a + (-a) = o$* (*элемент $-a$ называют* ***противоположным к*** a);

5) $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$ (*ассоциативность относительно умножения чисел*);
6) $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$ (*дистрибутивность умножения на элемент из* L *относительно сложения чисел*);
7) $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$ (*дистрибутивность умножения на число относительно сложения элементов из* L);
8) $1a = a$.

Наряду с термином «линейное пространство» используется также термин «*векторное пространство*», элементы линейного пространства принято называть ***векторами***. Линейное пространство над $\mathbb{R}$ называют ***вещественным*** *(действительными) линейным пространством*, а над $\mathbb{C}$ – ***комплексным***. В нашем курсе мы будем иметь дело с вещественными линейными пространствами.

В курсе линейной алгебры было показано, что линейными пространствами над $\mathbb{R}$ являются:
1) множество $M(m \times n, \mathbb{R})$ матриц размера $m \times n$ с элементами из $\mathbb{R}$;
2) множество $V^{(3)}$ ($V^{(2)}$) свободных векторов пространства (плоскости);
3) множество $\mathbb{R}^{n}$ последовательностей n действительных чисел (его называют ***арифметическим линейным пространством***, элементы множества $\mathbb{R}^{n}$ называют n***-мерными векторами***);
4) множество $\mathbb{R}[x]$ многочленов с коэффициентами из $\mathbb{R}$;
5) множество $C[a,b]$ функций, непрерывных на $[a,b]$.

Пусть L – линейное пространство над $\mathbb{R}(\mathbb{C})$, L_1 – непустое подмножество в L .
ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Говорят, что* L_1 является **подпространством линейного пространства** L (*или линейным подпространством*), если *оно само образует линейное пространство относительно операций, определенных на* L .

Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 14.1 (критерий подпространства). *Пусть* L *– линейное пространство над* $\mathbb{R}(\mathbb{C})$*,* L_1 *– непустое подмножество в* L *.* L_1 *является подпространством линейного пространства* L *тогда и только тогда, когда для любых элементов* $a,b \in L_1$ *и любого* $\alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ *выполняются два условия*: 1) $a - b \in L_1$; 2) $\alpha \cdot a \in L_1$.

С помощью теоремы 14.1 легко показать, например, что

1) множество $V^{(2)}$ свободных векторов плоскости является подпространством линейного пространства $V^{(3)}$ свободных векторов пространства;
2) множество $\mathbb{R}^{n}[x]$ многочленов с коэффициентами из $\mathbb{R}$ и имеющих степень меньше n является подпространством линейного пространства $\mathbb{R}[x]$ многочленов с коэффициентами из $\mathbb{R}$;
3) если система линейных однородных уравнений $\mathbf{AX}=\mathbf{O}$ имеет нетривиальные решения, то множество $\mathcal{H}$ ее решений является подпространством арифметического линейного пространства $\mathbb{R}^{n}$;
4) множество $C^{(n)}[a,b]$ n-раз непрерывно дифференцируемых на $[a;b]$ функций является подпространством линейного пространства $C[a,b]$.

Очень важными понятиями в теории линейных пространств являются понятия линейной зависимости и линейной независимости векторов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Векторы a_1, a_2, …, a_k называются **линейно зависимыми**, если существуют числа α_1, α_2, …, α_k, не все равные нулю и такие, что линейная комбинация $\alpha_1\cdot a_1+\alpha_2\cdot a_2+\ldots+\alpha_k\cdot a_k$ равна нулевому элементу o линейного пространства L.*

*Если же равенство $\alpha_1\cdot a_1+\alpha_2\cdot a_2+\ldots+\alpha_k\cdot a_k=o$ возможно только при условии $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_k=0$, то векторы a_1, a_2, …, a_k называют **линейно независимыми**.*

Справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 14.2 (необходимое и достаточное условие линейной зависимости векторов). *Векторы a_1, a_2, …, a_k линейно зависимы тогда и только тогда, когда хотя бы один из них линейно выражается через оставшиеся.*

> *Замечание*. Часто в качестве определения линейно зависимых векторов берут формулировку леммы 14.2.

Рассматривая линейно независимые системы векторов, например, в пространстве $\mathbb{R}^{n}$, легко доказать, что они могут содержать не более n элементов. Это замечание приводит к следующему важному понятию в теории линейных пространств.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Максимальная линейно независимая система векторов линейного пространства называется **базисом** этого линейного пространства.*

Иначе говоря, векторы e_1, e_2, …, $e_n\in L$ образуют базис в линейном пространстве L если выполняются два условия:

1) e_1, e_2, …, e_n – линейно независимы;
2) e_1, e_2, …, e_n, a – линейно зависимы для любого вектора a из L.

Очевидно, что в линейном пространстве существует не единственный базис (например, легко доказать, что если e_1, e_2, …, e_n образуют базис в линейном пространстве L и α_1, α_2, …, α_n – отличные от нуля действительные числа, то векторы $\alpha_1 e_1$, $\alpha_2 e_2$, …, $\alpha_n e_n$ тоже будут базисом). Но справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 14.3. *Любые два базиса линейного пространства состоят из одного и того же числа векторов.*

Если в линейном пространстве L существует базис из n векторов, то пространство называют ***конечномерным***, n называют ***размерностью*** *линейного пространства* (пишут: $\dim L = n$).

Если в линейном пространстве L для любого натурального n можно найти линейно независимую систему из n векторов, то пространство называют ***бесконечномерным*** (пишут: $\dim L = \infty$).

Конечномерными являются, например, линейные пространства $V^{(3)}$, $M(m \times n, \mathbb{R})$, $\mathbb{R}^n$ (размерности: $\dim V^{(3)} = 3$, $\dim M(m \times n, \mathbb{R}) = m \cdot n$, $\dim \mathbb{R}^n = n$). Примером бесконечномерных линейных пространств являются $\mathbb{R}[x]$ и $C[a;b]$.

Роль базиса в линейном пространстве характеризует следующая теорема.

ТЕОРЕМА 14.4 (о базисе). *Каждый вектор линейного пространства линейно выражается через любой его базис, причем единственным образом.*

Из теоремы 14.4 следует, что если в конечномерном линейном пространстве известен базис, то мы можем получить любой его вектор, т. е. дать полное описание этого линейного пространства.

Итак, мы вспомнили некоторые определения и утверждения теории линейных пространств. Теперь покажем, что множество решений линейного однородного уравнения порядка n образует конечномерное линейное пространство и определим его размерность.

14.3. Интегрирование линейных однородных уравнений n-го порядка

Рассмотрим линейное однородное уравнение порядка n, т. е. уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0. \qquad (14.3)$$

Для его решений справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 14.5. *Если* $y_1(x)$ *и* $y_2(x)$ *являются решениями линейного однородного уравнения* (14.3), *то* $y_1(x) + y_2(x)$ *и* $C \cdot y_1(x)$ $(\forall C \in \mathbb{R})$ *тоже является решениями уравнения* (14.3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставив функцию y_1+y_2 в уравнение (14.3) получим:

$$(y_1+y_2)^{(n)}+p_1(x)\cdot(y_1+y_2)^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}(x)\cdot(y_1+y_2)'+p_n(x)\cdot(y_1+y_2)=$$
$$=[y_1^{(n)}+p_1y_1^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}y_1'+p_ny_1]+$$
$$+[y_2^{(n)}+p_1y_2^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}y_2'+p_ny_2]\equiv$$
$$\equiv 0+0\equiv 0.$$

Следовательно, функция y_1+y_2 также является решением уравнения (14.3).

Аналогично доказывается, что решением уравнения (14.3) будет и функция Cy_1, где C – произвольная постоянная. ■

СЛЕДСТВИЕ 14.6. *Если* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *– решения уравнения* (14.3), *то их линейная комбинация*

$$C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ky_n=\sum_{i=1}^{n}C_iy_i \tag{14.4}$$

тоже является решением уравнения (14.3) *для любых постоянных* $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Пусть $S[a;b]$ – множество решений линейного однородного уравнения (14.3). Так как любое решение уравнения (14.3) является n раз непрерывно дифференцируемой функцией, определенной на $[a;b]$, то

$$S[a;b]\subset C^{(n)}[a;b],$$

где $C^{(n)}[a;b]$ – множество функций, n раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a;b]$. Более того, в силу теоремы 14.1, $S[a;b]$ является подпространством линейного пространства $C^{(n)}[a;b]$. Оказалось также, что линейное пространство $S[a;b]$ конечномерное (докажем это утверждение позднее).

Рассмотрим систему функций $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$, $(n-1)$ раз дифференцируемых на некотором отрезке $[a;b]$. Составим для них определитель порядка n следующего вида

$$W=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & y_3' & \cdots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' & \cdots & y_n'' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & y_3^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}. \tag{14.5}$$

Определитель (14.5) является функцией переменой x. Он обозначается $W(x)=W[y_1, y_2, \ldots, y_n]=W$ и называется ***определителем Вронского*** (или ***вронскианом***) функций $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$. Определитель Вронского играет важную роль при изучении линейной зависимости системы функций. А именно, справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 14.7 (необходимое условие линейной зависимости функций). *Если функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ $n-1$ раз дифференцируемы и линейно зависимы на $[a;b]$, то их определитель Вронского на $[a;b]$ тождественно равен нулю.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ $n-1$ раз дифференцируемы и линейно зависимы на $[a;b]$. Тогда, по определению, существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, среди которых хотя бы одно отлично от нуля, такие, что

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n = 0, \quad \forall x \in [a;b].$$

Пусть, для определенности, $\alpha_1 \neq 0$. Тогда

$$y_1 = \beta_2 y_2 + \ldots + \beta_n y_n, \quad \text{где } \beta_i = -\frac{\alpha_i}{\alpha_1}.$$

Откуда получаем:

$$W[y_1, y_2, \ldots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \beta_2 y_2 + \ldots + \beta_n y_n & y_2 & y_3 & \cdots & y_n \\ \beta_2 y_2' + \ldots + \beta_n y_n' & y_2' & y_3' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_2 y_2^{(n-1)} + \ldots + \beta_n y_n^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & y_3^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \equiv 0$$

(так как первый столбец определителя является линейной комбинацией остальных столбцов). ■

Теорема 14.7 дает необходимое условие линейной зависимости системы функций. Достаточным это условие для произвольной системы функций не будет, т. е. если $W[y_1, y_2, \ldots, y_n] \equiv 0$, то система функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$ может оказаться как линейно зависимой, так и линейно независимой. Так, например, легко проверить, что функции

$$y_1(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad y_2(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0; \\ 0, & x \geq 0 \end{cases}$$

являются линейно независимыми, и их вронскиан

$$W[y_1, y_2] = y_1 y_2' - y_1' y_2 \equiv 0.$$

Но ситуация меняется, если $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – решения линейного однородного уравнения. Здесь справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 14.8 (условие линейной независимости решений линейного однородного дифференциального уравнения). *Если* n *решений* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *линейного однородного уравнения* (14.3) *линейно независимы на* $[a;b]$, *то определитель Вронского* $W[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ *не может обратиться в нуль ни в одной точке этого промежутка.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Пусть $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейно независимы на $[a;b]$ и существует $x_0 \in [a;b]$ такое, что

$$W[y_1, y_2, \ldots, y_n](x_0) = 0.$$

Обозначим

$$\begin{array}{lll} y_1(x_0) = y_{10}, & y_2(x_0) = y_{20}, & \ldots,\ y_n(x_0) = y_{n0}; \\ y_1'(x_0) = y_{10}^{(1)}, & y_2'(x_0) = y_{20}^{(1)}, & \ldots,\ y_n'(x_0) = y_{n0}^{(1)}; \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) = y_{10}^{(n-1)}, & y_2^{(n-1)}(x_0) = y_{20}^{(n-1)}, & \ldots,\ y_n^{(n-1)}(x_0) = y_{n0}^{(n-1)}. \end{array}$$

Рассмотрим систему линейных однородных уравнений, матрицу которой составляют числа $y_{i0}, y_{i0}^{(k)}$:

$$\begin{cases} C_1 y_{10} & + & C_2 y_{20} & + \ldots + & C_n y_{n0} & = & 0, \\ C_1 y_{10}^{(1)} & + & C_2 y_{20}^{(1)} & + \ldots + & C_n y_{n0}^{(1)} & = & 0, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & & \ldots\ldots \\ C_1 y_{10}^{(n-1)} & + & C_2 y_{20}^{(n-1)} & + \ldots + & C_n y_{n0}^{(n-1)} & = & 0. \end{cases} \qquad (14.6)$$

Определитель матрицы $\mathbf{M}$ системы (14.6)

$$\det \mathbf{M} = W[y_1, y_2, \ldots, y_n](x_0) = 0.$$

Следовательно, система (14.6) имеет ненулевые решения.

Пусть $\widetilde{C}_1, \widetilde{C}_2, \ldots, \widetilde{C}_n$ – одно из ненулевых решений системы (14.6). Функция $\widetilde{y} = \widetilde{C}_1 y_1 + \widetilde{C}_2 y_2 + \ldots + \widetilde{C}_n y_n$ в силу следствия (14.2) будет являться решением уравнения (14.3), причем

$\widetilde{y}(x_0) = 0$ (из 1-го уравнения системы (14.6)),

$\widetilde{y}'(x_0) = 0$ (из 2-го уравнения системы (14.6)),

……………………………………………….

$\widetilde{y}^{(n-1)}(x_0) = 0$ (из n-го уравнения системы (14.6)).

Но начальным условиям

$$y(x_0) = 0,\ y'(x_0) = 0,\ y''(x_0) = 0,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = 0$$

удовлетворяет и тривиальное решение $y(x) \equiv 0$.

Поскольку, по теореме существования и единственности решения, начальные условия для линейного уравнения определяют единственное решение, получаем:

$$\widetilde{y} = \widetilde{C}_1 y_1 + \widetilde{C}_2 y_2 + \ldots + \widetilde{C}_n y_n \equiv 0,$$

причем среди коэффициентов $\widetilde{C}_1, \widetilde{C}_2, \ldots, \widetilde{C}_n$ есть ненулевые. Но это означает, что $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейно зависимы на $[a;b]$, что противоречит условию теоремы.

Следовательно, предположение было неверным и

$$W[y_1, y_2, \ldots, y_n](x) \neq 0, \quad \forall x \in [a;b]. \blacksquare$$

СЛЕДСТВИЕ 14.9 (теоремы 14.7 и 14.8). *Пусть* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *решения уравнения* (14.3). *Тогда их определитель Вронского либо тождественно равен нулю, и это означает, что решения* y_i *линейно зависимы; либо не обращается в нуль ни в одной точке* $x \in [a,b]$, *и это означает, что решения* y_i *линейно независимы.*

В свою очередь, следствие 14.9 позволяет доказать утверждение о конечномерности пространства $S[a;b]$.

ТЕОРЕМА 14.10. *Пространство решений* $S[a;b]$ *линейного однородного уравнения* (14.3) *конечномерно и его размерность совпадает с порядком дифференциального уравнения, т. е.*

$$\dim S[a;b] = n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Покажем, что для уравнения (14.3) можно найти n линейно независимых решений.

Пусть $\forall x_0 \in [a;b]$. Возьмем любой определитель порядка n, отличный от нуля. Например,

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix}.$$

По теореме существования и единственности решения имеем:

1) существует единственное решение $y_1(x)$, определенное в некоторой окрестности точки x_0, удовлетворяющее условию

$$y_1(x_0) = 1,\ y_1'(x_0) = 0,\ y_1''(x_0) = 0,\ \ldots,\ y_1^{(n-1)}(x_0) = 0$$

(где $1, 0, \ldots, 0$ – числа из первого столбца определителя Δ_n);

2) существует единственное решение $y_2(x)$, удовлетворяющее условию

$$y_2(x_0) = 0,\ y_2'(x_0) = 1,\ y_2''(x_0) = 0,\ \ldots,\ y_2^{(n-1)}(x_0) = 0$$

(где $0, 1, \ldots, 0$ – числа из второго столбца определителя Δ_n);

....

n) существует единственное решение $y_n(x)$, удовлетворяющее условию

$$y_n(x_0) = 0,\ y_n'(x_0) = 0,\ y_n''(x_0) = 0,\ \ldots,\ y_n^{(n-1)}(x_0) = 1$$

(где $0, 0, \ldots, 1$ – числа из n-го столбца определителя Δ_n).

Для найденных таким образом функций $y_1, y_2, \dots, y_n$ имеем:

$$W[y_1, y_2, \dots, y_n](x_0) = \Delta_n \neq 0,$$

и, следовательно, по следствию 14.9, $y_1, y_2, \dots, y_n$ – линейно независимы.

2) Покажем, что любое решение линейного однородного дифференциального уравнения (14.3) может быть представлено как линейная комбинация n линейно независимых решений.

Пусть $y_1, y_2, \dots, y_n$ – некоторые линейно независимые решения уравнения (14.3), $\hat{y}(x)$ – решение уравнения (14.3), удовлетворяющее условиям

$$\hat{y}(x_0) = y_0, \quad \hat{y}'(x_0) = y_0^{(1)}, \quad \hat{y}''(x_0) = y_0^{(2)}, \quad \dots, \quad \hat{y}^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Рассмотрим систему n линейных уравнений вида:

$$\begin{cases} C_1 y_{10} + C_2 y_{20} + \dots + C_n y_{n0} = y_0, \\ C_1 y_{10}^{(1)} + C_2 y_{20}^{(1)} + \dots + C_n y_{n0}^{(1)} = y_0^{(1)}, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \dots \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ C_1 y_{10}^{(n-1)} + C_2 y_{20}^{(n-1)} + \dots + C_n y_{n0}^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}, \end{cases} \tag{14.7}$$

где $y_{i0} = y_i(x_0)$, $y_{i0}^{(k)} = y_i^{(k)}(x_0)$ $(i = \overline{1,n},\ k = \overline{1,n-1})$.

Так как $y_1, y_2, \dots, y_n$ – линейно независимые решения уравнения (14.3), то для матрицы $\mathbf{M}$ системы имеем:

$$\det \mathbf{M} = W[y_1, y_2, \dots, y_n](x_0) \neq 0.$$

Следовательно, система (14.7) имеет единственное решение $\widetilde{C}_1, \widetilde{C}_2, \dots, \widetilde{C}_n$.

Рассмотрим функцию $\widetilde{y} = \widetilde{C}_1 y_1 + \widetilde{C}_2 y_2 + \dots + \widetilde{C}_n y_n$. В силу следствия (14.6) она будет являться решением уравнения (14.3), причем

$\widetilde{y}(x_0) = y_0$ (из 1-го уравнения системы (14.7)),

$\widetilde{y}'(x_0) = y_0^{(1)}$ (из 2-го уравнения системы (14.7)),

……………………………………………….

$\widetilde{y}^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$ (из n-го уравнения системы (14.7)).

Но тем же самым начальным условиям удовлетворяет и решение $\hat{y}(x)$.

Поскольку, по теореме существования и единственности решения, начальные условия для линейного дифференциального уравнения определяют единственное решение, получаем:

$$\widetilde{y} = \widetilde{C}_1 y_1 + \widetilde{C}_2 y_2 + \dots + \widetilde{C}_n y_n = \hat{y}(x). \ \blacksquare$$

Система n линейно независимых решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка (базис пространства S[a;b]) называется его ***фундаментальной системой решений****.*

Таким образом, задача интегрирования линейного однородного уравнения n-го порядка сводится к отысканию фундаментальной системы его решений. Но сделать это для произвольного уравнения очень сложно. Фундаментальные системы решений удается найти лишь для некоторых простейших типов линейных однородных уравнений. Одним из таких типов являются линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами.

14.4. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами

Пусть линейное однородное уравнение имеет вид

$$\boxed{y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0,} \qquad (14.8)$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – некоторые действительные числа. Уравнение (14.8) называется ***линейным однородным уравнением n–го порядка с постоянными коэффициентами.*** Класс однородных уравнений с постоянными коэффициентами замечателен тем, что для него нахождение фундаментальной системы решений сводится к решению алгебраического уравнения n-й степени.

Вид уравнения (14.8) наводит на мысль, что решения этого уравнения следует искать прежде всего среди таких функций, производные которых «похожи» на сами функции. Среди элементарных функций таким свойством обладает показательная функция. Поэтому решения уравнения (14.8) будем искать в виде

$$\boxed{y = e^{\lambda x},} \qquad (14.9)$$

где λ – неизвестная постоянная, которую нужно выбрать так, чтобы функция (14.9) обращала уравнение (14.8) в тождество.

Для функции (14.9) имеем:

$$y' = \lambda e^{\lambda x}, \quad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}, \quad y''' = \lambda^3 e^{\lambda x}, \quad \ldots, \quad y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}.$$

Подставим $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$ в уравнение (14.8) и получим

$$e^{\lambda x}(\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n) = 0.$$

Поскольку $e^{\lambda x} \neq 0$, то решение (14.9) удовлетворяет уравнению, если

$$\boxed{\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0.} \qquad (14.10)$$

Уравнение (14.10) называется ***характеристическим уравнением*** для уравнения (14.8), многочлен слева – ***характеристическим многочленом***, корни характеристического уравнения (14.10) – ***характеристическими корнями*** уравнения (14.8).

Замечание. Формально характеристическое уравнение получается из уравнения (14.8) заменой производных искомой функции на соответствующие степени λ, а самой функции – на $\lambda^0 = 1$.

Характеристическое уравнение (14.10) есть алгебраическое уравнение *n*-й степени. В алгебре доказывается, что такое уравнение имеет *n* корней, среди которых есть как действительные, так и комплексные числа (каждый корень считается столько раз, какова его кратность). Доказывается также, что комплексные корни такого уравнения попарно сопряжены. Следовательно, функции вида $e^{\lambda x}$ в общем случае не дадут всю фундаментальную систему решений уравнения (14.8). «Недостающие» решения позволяет найти следующая теорема.

ТЕОРЕМА 14.11. *Пусть* λ *– характеристический корень уравнения* (14.8). *Тогда*

1) *если* λ *– простой действительный корень уравнения* (14.10), *то решением уравнения* (14.8) *является функция* $e^{\lambda x}$;
2) *если* λ *– действительный корень кратности* k *уравнения* (14.10), *то решениями уравнения* (14.8) *являются функции*
$$e^{\lambda x},\quad xe^{\lambda x},\quad x^2e^{\lambda x},\quad \ldots\quad x^{k-1}e^{\lambda x};$$
3) *если* $\lambda = \alpha + \beta i$ *– простой комплексный корень уравнения* (14.10), *то число* $\overline{\lambda} = \alpha - \beta i$ *тоже является простым корнем характеристического уравнения, а решениями уравнения* (14.8) *будут функции*
$$e^{\alpha x}\cdot\cos\beta x,\quad e^{\alpha x}\cdot\sin\beta x;$$
4) *если* $\lambda = \alpha + \beta i$ *– комплексный корень кратности* k *уравнения* (14.10), *то число* $\overline{\lambda} = \alpha - \beta i$ *тоже является корнем характеристического уравнения кратности* k, *а решениями уравнения* (14.8) *будут функции*
$$e^{\alpha x}\cdot\cos\beta x,\quad xe^{\alpha x}\cdot\cos\beta x,\quad x^2e^{\alpha x}\cdot\cos\beta x,\quad \ldots,\quad x^{k-1}e^{\alpha x}\cdot\cos\beta x.$$
$$e^{\alpha x}\cdot\sin\beta x,\quad xe^{\alpha x}\cdot\sin\beta x,\quad x^2e^{\alpha x}\cdot\sin\beta x,\quad \ldots,\quad x^{k-1}e^{\alpha x}\cdot\sin\beta x.$$

Решения, относящиеся к различным характеристическим корням, линейно независимы и найденные таким образом n *решений уравнения* (14.8) *будут образовывать его фундаментальную систему решений.*

Для удобства запоминания этой теоремы и применения ее при интегрировании дифференциальных уравнений, составим таблицу, в которой отражается зависимость частных решений от вида характеристических корней.

Таблица 14.1

Вид корня	Решения из фундаментальной системы
$\lambda \in \mathbb{R}$ кратность 1	$y = e^{\lambda x}$
$\lambda = \alpha \pm \beta i \in \mathbb{C}$ кратность 1	$y_1 = e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x$, $\quad y_2 = e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x$
$\lambda \in \mathbb{R}$ кратность k	$y_1 = e^{\lambda x}$, $\quad y_2 = xe^{\lambda x}$, $\quad y_3 = x^2 e^{\lambda x}$, $\quad \ldots \quad y_1 = x^{k-1} e^{\lambda x}$
$\lambda = \alpha \pm \beta i \in \mathbb{C}$ кратность k	$y_1 = e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x$, $\quad y_2 = e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x$, $y_3 = xe^{\alpha x} \cdot \cos\beta x$, $\quad y_4 = xe^{\alpha x} \cdot \sin\beta x$, ………, $\quad$ ………, $y_{2k-1} = x^{k-1} e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x$, $\quad y_{2k} = x^{k-1} e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x$.

Итак, чтобы найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами необходимо:

1) записать его характеристическое уравнение;
2) найти характеристические корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$;
3) с помощью теоремы 14.11 (таблицы 14.1) найти частные линейно независимые решения $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$;
4) записать общее решение $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x)$.

ПРИМЕР 14.1. Найти общее решение уравнения

$$y''' + 4y'' - 3y' - 18y = 0.$$

РЕШЕНИЕ. Характеристическое уравнение

$$\lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda - 18 = 0$$

имеет корни $\quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_{2,3} = -3.$

Им соответствуют решения

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{2x}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{-3x}, \quad y_3 = xe^{\lambda_3 x} = xe^{-3x}.$$

Так как это будет фундаментальная система решений, то общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x} + C_3 xe^{-3x}. \diamond$$

ПРИМЕР 14.2. Найти общее решение уравнения

$$y''' - 2y'' + 4y' - 8y = 0.$$

РЕШЕНИЕ. Характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 + 4\lambda - 8 = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = 2, \quad \lambda_{2,3} = \pm 2i$.

Тогда частными линейно независимыми решениями будут

$$y_1 = e^{2x}, \quad \underbrace{y_2 = \cos 2x, \quad y_3 = \sin 2x}_{\text{так как } \alpha=0, \quad \beta=2}.$$

Следовательно, общее решение уравнения будет иметь вид

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 \cos 2x + C_2 \sin 2x . \diamond$$

ПРИМЕР 14.3. Найти общее решение уравнения

$$y^{(5)} + 4y^{(4)} + 8y''' + 8y'' + 4y' = 0 .$$

РЕШЕНИЕ. Характеристическое уравнение

$$\lambda^5 + 4\lambda^4 + 8\lambda^4 + 8\lambda^2 + 4\lambda = 0$$

или $\lambda \cdot (\lambda^2 + 2\lambda + 2)^2 = 0$.

Его корни $\lambda_{1,2} = \lambda_{3,4} = -1 \pm i, \; \lambda_5 = 0$.

Тогда фундаментальная система решений состоит из функций

$$y_1 = e^{-x} \cos x , \quad y_2 = xe^{-x} \cos x ,$$

$$y_3 = e^{-x} \sin x , \quad y_4 = xe^{-x} \sin x ,$$

$$y_5 = e^{0 \cdot x} = 1.$$

Следовательно, общее решение имеет вид

$$y = e^{-x}\left(C_1 \cos x + C_2 x \cos x + C_3 \sin x + C_4 x \sin x\right) + C_5 . \diamond$$

14.5. Уравнения Эйлера

Еще одним типом линейных однородных дифференциальных уравнений, для которых можно найти фундаментальную систему решений, являются уравнения Эйлера.

Линейное однородное уравнение вида

$$\boxed{a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0} \qquad (14.11)$$

(где $a_i \in \mathbb{R}$), называется ***уравнением Эйлера***.

Уравнение Эйлера заменой $x = e^t$ сводится к линейному однородному уравнению с постоянными коэффициентами.

Действительно, если $x = e^t$, то $y(x) = \tilde{y}(t)$ и

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\tilde{y}'_t}{x'_t} = \frac{\tilde{y}'_t}{e^t} = \tilde{y}'_t \cdot e^{-t} ;$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{(\tilde{y}'_t \cdot e^{-t})'}{e^t} = \frac{\tilde{y}''_t \cdot e^{-t} - \tilde{y}'_t \cdot e^{-t}}{e^t} = (\tilde{y}''_t - \tilde{y}'_t) \cdot e^{-2t} ;$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{(y''_x)'_t}{x'_t} = \frac{((\widetilde{y}''_t - \widetilde{y}'_t)\cdot e^{-2t})'}{e^t} = \frac{(\widetilde{y}'''_t - \widetilde{y}''_t)\cdot e^{-2t} + (\widetilde{y}''_t - \widetilde{y}'_t)\cdot(-2e^{-2t})}{e^t} =$$

$$= (\widetilde{y}'''_t - 3\widetilde{y}''_t + 2\widetilde{y}'_t)\cdot e^{-3t};$$

....

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \varphi\left(\widetilde{y}_t^{(n)}, \widetilde{y}_t^{(n-1)}, \ldots, \widetilde{y}'_t\right)\cdot e^{-nt}.$$

Подставим $x = e^t$ и найденные выражения для $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, … , $\frac{d^n y}{dx^n}$ в (14.11) и получим уравнение

$$a_0\widetilde{y}_t^{(n)} + b_1\widetilde{y}_t^{(n-1)} + \ldots + b_{n-1}\widetilde{y}'_t + b_n\widetilde{y}(t) = 0. \qquad (14.12)$$

где $a_0, b_i \in \mathbb{R}$.

Так как (14.12) – линейное однородное с постоянными коэффициентами, то, согласно теореме 14.11, его фундаментальная система решений может содержать лишь функции вида

$$e^{\lambda t},\quad t^{\ell}e^{\lambda t},\quad e^{\alpha t}\cos\beta t,\quad e^{\alpha t}\sin\beta t,\quad t^{\ell}e^{\alpha t}\cos\beta t,\quad t^{\ell}e^{\alpha t}\sin\beta t.$$

Значит, фундаментальная система решений уравнения (14.11) будет состоять из функций вида:

$$e^{\lambda t} = x^{\lambda},\quad t^{\ell}e^{\lambda t} = (\ln^{\ell} x)\cdot x^{\lambda},$$

$$e^{\alpha t}\cos\beta t = x^{\alpha}\cos(\beta\ln x),\quad e^{\alpha t}\sin\beta t = x^{\alpha}\sin(\beta\ln x),$$

$$t^{\ell}e^{\alpha t}\cos\beta t = (\ln^{\ell} x)\cdot x^{\alpha}\cos(\beta\ln x),\quad t^{\ell}e^{\alpha t}\sin\beta t = (\ln^{\ell} x)\cdot x^{\alpha}\sin(\beta\ln x).$$

З а м е ч а н и е . На практике, при решении уравнения Эйлера, уравнение (14.12) не записывают. Записывают сразу его характеристическое уравнение. Это достаточно легко сделать. Действительно, характеристическое уравнение для (14.12) – это условие для λ, при котором функция $\widetilde{y} = e^{\lambda t}$ является решением уравнения (14.12). Но $e^{\lambda t} = x^{\lambda}$. Следовательно, то же самое условие для λ получим, если потребуем, чтобы функция $y = x^{\lambda}$ являлась решением уравнения (14.11).

ПРИМЕР 14.4. Найти общее решение уравнения

$$x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0.$$

РЕШЕНИЕ. Введем новую переменную по формуле

$$x = e^t \quad\Rightarrow\quad t = \ln x.$$

В результате получим линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами. Найдем его характеристическое уравнение. Полагаем

$$y = x^{\lambda}.$$

Тогда:

$$y' = \lambda x^{\lambda-1}, \quad y'' = \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}, \quad y''' = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)x^{\lambda-3}.$$

Подставляя выражения для y, y', y'', y''' в исходное уравнение, получаем:

$$x^3 \underbrace{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)x^{\lambda-3}}_{y'''} - 3x^2 \underbrace{\lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}}_{y''} + 6x\underbrace{\lambda x^{\lambda-1}}_{y'} - 6\underbrace{x^{\lambda}}_{y} = 0,$$

$$\Rightarrow \quad x^{\lambda}[\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) - 3\lambda(\lambda-1) + 6\lambda - 6] = 0,$$

$$\Rightarrow \quad \lambda(\lambda-1)(\lambda-2) - 3\lambda(\lambda-1) + 6\lambda - 6 = 0,$$

$$\Rightarrow \quad (\lambda-1)[\lambda(\lambda-2) - 3\lambda + 6] = 0,$$

$$\Rightarrow \quad (\lambda-1)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = 0.$$

Полученное характеристическое уравнение имеет корни

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 3.$$

Им соответствуют решения

$$\widetilde{y}_1(t) = e^t, \quad \widetilde{y}_2(t) = e^{2t}, \quad \widetilde{y}_3(t) = e^{3t},$$

$$\Rightarrow \quad y_1(x) = x, \quad y_2(x) = x^2, \quad y_3(x) = x^3.$$

Тогда общее решение уравнения будет иметь вид

$$y = C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3. \diamond$$

14.6. Линейные однородные уравнения 2-го порядка с произвольными коэффициентами

Еще один случай, когда удается найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения – уравнение второго порядка, для которого известно одно из решений.

Действительно, рассмотрим уравнение

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0. \tag{14.13}$$

Пусть $y_1(x)$ любое ненулевое решение уравнения (14.13). Тогда его общее решение имеет вид

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2.$$

$$\Rightarrow \quad y = y_1\left(C_1 + C_2 \frac{y_2}{y_1}\right) = y_1 \cdot u(x).$$

Найдем функцию $u(x)$. Имеем:

$$y' = y_1'u + y_1u', \quad y'' = y_1''u + 2y_1'u' + y_1u''.$$

Подставив эти выражения в уравнение (14.13) получим:

$$\underbrace{y_1''u + 2y_1'u' + y_1u''}_{y''} + a_1(x)\cdot\underbrace{(y_1'u + y_1u')}_{y'} + a_2(x)\cdot\underbrace{y_1u}_{y} = 0,$$

$$\Rightarrow\ u''\cdot y_1 + u'\cdot(2y_1' + a_1(x)y_1) + u\cdot\underbrace{(y_1'' + a_1(x)y_1' + a_2(x)y_1)}_{0,\ \text{т.к. } y_1 \text{ – решение (14.13)}} = 0,$$

$$\Rightarrow\ u''\cdot y_1 + u'\cdot(2y_1' + a_1(x)y_1) = 0. \qquad (14.14)$$

Уравнение (14.14) не содержит искомой функции. Для его интегрирования введем новую функцию $z(x) = u'$. Тогда

$$z'\cdot y_1 + z\cdot(2y_1' + a_1(x)y_1) = 0,$$

$$\Rightarrow\ \frac{dz}{z} = -\frac{2y_1' + a_1(x)y_1}{y_1}dx \quad (\text{где } z \neq 0),$$

$$\Rightarrow\ \ln|z| = -\int\left(\frac{2y_1'}{y_1} + a_1(x)\right)dx + \widetilde{C}_1,$$

$$\Rightarrow\ \ln|z| = -2\ln|y_1| - \int a_1(x)dx + \widetilde{C}_1,$$

$$\Rightarrow\ z = \pm\frac{1}{(y_1)^2}\cdot e^{-\int a_1(x)dx + \widetilde{C}_1},$$

$$\Rightarrow\ z = \frac{C_1}{(y_1)^2}\cdot e^{-\int a_1(x)dx}, \quad \text{где } C_1 = \pm e^{\widetilde{C}_1} \neq 0.$$

В процессе преобразований было потеряно решение $z = 0$. Оно может быть получено из общего при $C_1 = 0$. Следовательно,

$$z = \frac{C_1}{(y_1)^2}\cdot e^{-\int a_1(x)dx}, \quad \forall C_1.$$

$$\Rightarrow\ u' = \frac{C_1}{(y_1)^2}\cdot e^{-\int a_1(x)dx} \qquad \text{или} \qquad du = \left[\frac{C_1}{(y_1)^2}\cdot e^{-\int a_1(x)dx}\right]dx,$$

$$\Rightarrow\ u = \int\left[\frac{C_1}{(y_1)^2}\cdot e^{-\int a_1(x)dx}\right]dx + C_2.$$

Таким образом, общее решение уравнения (14.13) имеет вид:

$$y = y_1 u = y_1\cdot\left(\int\left[\frac{C_1}{(y_1)^2}\cdot e^{-\int a_1(x)dx}\right]dx + C_2\right).$$

ПРИМЕР 14.5. Найти общее решение уравнения $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$, если известно, что его решением является функция $y_1 = \frac{\sin x}{x}$.

РЕШЕНИЕ. Имеем: $y = y_1\cdot u = \frac{\sin x}{x}\cdot u$. Тогда

$$y'=\left(\frac{\sin x}{x}\right)'\cdot u+\frac{\sin x}{x}\cdot u'=\left(\frac{\cos x}{x}-\frac{\sin x}{x^2}\right)\cdot u+\frac{\sin x}{x}\cdot u';$$

$$y''=\left(\frac{\sin x}{x}\right)''\cdot u+2\left(\frac{\sin x}{x}\right)'\cdot u'+\frac{\sin x}{x}\cdot u''=$$

$$=\left(-\frac{\sin x}{x}-2\frac{\cos x}{x^2}+2\frac{\cos x}{x^3}\right)\cdot u+2\left(\frac{\cos x}{x}-\frac{\sin x}{x^2}\right)\cdot u'+\frac{\sin x}{x}\cdot u''.$$

Подставим выражения для y, y', y'' в исходное уравнение и получим:

$$\underbrace{\left(-\frac{\sin x}{x}-2\frac{\cos x}{x^2}+2\frac{\cos x}{x^3}\right)\cdot u+2\left(\frac{\cos x}{x}-\frac{\sin x}{x^2}\right)\cdot u'+\frac{\sin x}{x}\cdot u''}_{y''}+$$

$$+\frac{2}{x}\underbrace{\left[\left(\frac{\cos x}{x}-\frac{\sin x}{x^2}\right)\cdot u+\frac{\sin x}{x}\cdot u'\right]}_{y'}+\underbrace{\frac{\sin x}{x}\cdot u}_{y}=0,$$

$$\Rightarrow\ \frac{\sin x}{x}\cdot u''+2\frac{\cos x}{x}\cdot u'=0,$$

$$\Rightarrow\ \sin x\cdot u''+2\cos x\cdot u'=0.$$

Так как полученное уравнение не содержит искомой функции, то его порядок можно понизить, сделав замену $z(x)=u'$. Тогда

$$\sin x\cdot z'+2\cos x\cdot z=0,$$

$$\Rightarrow\ \frac{dz}{z}=-2\operatorname{ctg}x dx\quad(\text{где } z\neq 0),$$

$$\Rightarrow\ \ln|z|=-2\ln|\sin x|+\ln\overline{C}_1,\quad \overline{C}_1>0,$$

$$\Rightarrow\ z=\frac{\widetilde{C}_1}{\sin^2 x},\ \text{ где } \widetilde{C}_1=\pm\overline{C}_1\neq 0.$$

В процессе преобразований было потеряно решение $z=0$, которое может быть получено из общего при $\widetilde{C}_1=0$. Следовательно,

$$z=\frac{\widetilde{C}_1}{\sin^2 x},\ \ \forall\widetilde{C}_1.$$

Учитывая, что $z(x)=u'$, получаем уравнение

$$u'=\frac{\widetilde{C}_1}{\sin^2 x}\quad\text{или}\quad du=\frac{\widetilde{C}_1 dx}{\sin^2 x},$$

$$\Rightarrow\ u=-\widetilde{C}_1\operatorname{ctg}x+C_2=C_1\operatorname{ctg}x+C_2,\ \text{ где }\ C_1=-\widetilde{C}_1;$$

и общее решение уравнения будет иметь вид:

$$y=y_1\cdot u=\frac{\sin x}{x}\cdot(\widetilde{C}_1\operatorname{ctg}x+C_2)\quad\text{или}\quad y=\widetilde{C}_1\frac{\cos x}{x}+C_2\frac{\sin x}{x}.\diamond$$

§ 15. Линейные неоднородные уравнения *n*-го порядка

15.1. Метод вариации произвольных постоянных

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+a_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x). \quad (15.1)$$

Если известно общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+a_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0, \quad (15.2)$$

то можно найти и общее решение неоднородного уравнения (15.1).

Действительно, пусть $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – фундаментальная система решений уравнения (15.2). Тогда его общее решение будет иметь вид

$$y=C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n, \quad (15.3)$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – произвольные постоянные.

Далее полагаем, что решение неоднородного уравнения по структуре совпадает с решением соответствующего линейного однородного уравнения, т. е. имеет вид

$$y=C_1(x)y_1+C_2(x)y_2+\ldots+C_n(x)y_n=\sum_{i=1}^{n}C_i(x)y_i, \quad (15.4)$$

где $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ – некоторые пока неизвестные функции.

Для определения *n* неизвестных $C_i(x)$ есть пока только одно обязательное условие – функция (15.4) должна удовлетворять неоднородному уравнению (15.1). Следовательно, $(n-1)$ условие для выбора функций $C_i(x)$ можно задать произвольно, лишь бы полученная система условий оказалась совместной. Например, можно потребовать, чтобы *производные* $y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ *функции* (15.4) *структурно совпадали с производными функции* (15.3), *т. е. чтобы они получались из соответствующих производных функции* (15.3) *заменой констант* C_i *функциями* $C_i(x)$. Так как для функции (15.3)

$$y'=C_1y_1'+C_2y_2'+\ldots+C_ny_n'=\sum_{i=1}^{n}C_iy_i',$$

а для функции (15.4)

$$y'=\left[C_1'(x)y_1+C_1(x)y_1'\right]+\ldots+\left[C_n'(x)y_n+C_n(x)y_n'\right]=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}C_i'(x)y_i+\sum_{i=1}^{n}C_i(x)y_i',$$

то такое требование приведет к первому произвольному условию

$$\sum_{i=1}^{n}C_i'(x)y_i=C_1'(x)y_1+C_2'(x)y_2+\ldots+C_n'(x)y_n=0. \quad (\mathrm{a}_1)$$

Далее, для функции (15.3)

$$y'' = C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + \ldots + C_n y_n'' = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i'',$$

а для функции (15.4) (при условии а$_1$)

$$y'' = \left[C_1'(x) y_1' + C_1(x) y_1''\right] + \ldots + \left[C_n'(x) y_n' + C_n(x) y_n''\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i' + \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i'',$$

что приводит ко второму произвольному условию

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i' = C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' + \ldots + C_n'(x) y_n' = 0. \qquad (\text{a}_2)$$

Продолжая этот процесс, в качестве $(n-1)$-го произвольного условия получим

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i^{(n-2)} = C_1'(x) y_1^{(n-2)} + C_2'(x) y_2^{(n-2)} + \ldots + C_n'(x) y_n^{(n-2)} = 0. \qquad (\text{a}_{\text{n-1}})$$

Так как согласно нашим предположениям производные $y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ функции (15.4) имеют вид

$$y^{(k)} = C_1(x) y_1^{(k)} + \ldots + C_n(x) y_n^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i^{(k)} \ \ (k = \overline{1, n-1}),$$

то $$y^{(n)} = \left[C_1'(x) y_1^{(n-1)} + C_1(x) y_1^{(n)}\right] + \ldots + \left[C_n'(x) y_n^{(n-1)} + C_n(x) y_n^{(n)}\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i^{(n-1)} + \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i^{(n)},$$

и из обязательного условия получаем:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i^{(n-1)} + \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i^{(n)}}_{y^{(n)}} + a_1(x) \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i^{(n-1)}}_{y^{(n-1)}} + \ldots + a_n(x) \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i}_{y} = f(x),$$

$$\Rightarrow \ \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i^{(n-1)} + \sum_{i=1}^{n} C_i(x) \underbrace{\left[y_i^{(n)} + a_1(x) y_i^{(n-1)} + \ldots + a_n(x) y_i\right]}_{0} = f(x),$$

$$\Rightarrow \ \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i^{(n-1)} = f(x). \qquad (\text{a}_\text{n})$$

Итак, требование, чтобы производные $y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ функции (15.4) получались из соответствующих производных функции (15.3) заменой констант C_i функциями $C_i(x)$ дало для функций $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ условия (а$_1$), (а$_2$), …, (а$_\text{n}$), т. е. систему

$$\left\{\begin{array}{lllllll}
C_1'(x)y_1 & + & C_2'(x)y_2 & + \dots + & C_n'(x)y_n & = & 0, \\
C_1'(x)y_1' & + & C_2'(x)y_2' & + \dots + & C_n'(x)y_n' & = & 0, \\
C_1'(x)y_1'' & + & C_2'(x)y_2'' & + \dots + & C_n'(x)y_n'' & = & 0, \\
\dots & \dots & \dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots & \dots \\
C_1'(x)y_1^{(n-2)} & + & C_2'(x)y_2^{(n-2)} & + \dots + & C_n'(x)y_n^{(n-2)} & = & 0, \\
C_1'(x)y_1^{(n-1)} & + & C_2'(x)y_2^{(n-1)} & + \dots + & C_n'(x)y_n^{(n-1)} & = & f(x).
\end{array}\right. \tag{15.5}$$

Система (15.5) – система n линейных уравнений с n неизвестными. Ее определитель – определитель Вронского $W[y_1, y_2, \dots, y_n]$. Так как функции $y_1, y_2, \dots, y_n$ образуют фундаментальную систему решений однородного уравнения, то по теореме 14.8 их определитель Вронского отличен от нуля при любом x. Поэтому система (15.5) совместна и имеет единственное решение. Решая ее, находим

$$C_i'(x) = \psi_i(x), \quad (i = \overline{1, n}).$$

Откуда получаем

$$C_i(x) = \int \psi_i(x)dx = \varphi_i(x) + \widetilde{C}_i,$$

где $\widetilde{C}_i$ – произвольные постоянные. Общее решение неоднородного уравнения тогда имеет вид

$$y = \sum_{i=1}^{n} \left(\varphi_i(x) + \widetilde{C}_i\right) y_i . \tag{15.6}$$

Изложенный выше метод нахождения решения линейного неоднородного уравнения n-го порядка получил название ***метода вариации произвольных постоянных***.

ПРИМЕР 15.1. Найти общее решение уравнения $y'' + y = tg^2 x$.

РЕШЕНИЕ. Рассмотрим сначала соответствующее однородное уравнение. Его характеристическое уравнение $\lambda^2 + 1 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = \pm i$. Поэтому общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x .$$

Теперь рассмотрим неоднородное уравнение. Его общее решение может быть записано в виде

$$y = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x .$$

Система для нахождения неизвестных функций $C_1(x), C_2(x)$ будет для данного уравнения иметь вид

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x \;+\; C_2'(x)\sin x \;=\; 0, \\ C_1'(x)(-\sin x) \;+\; C_2'(x)\cos x \;=\; tg^2 x. \end{cases}$$

Из этой системы находим (например, по формулам Крамера)

$$C_1'(x) = -\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}, \qquad C_2'(x) = tg^2 x \cdot \cos x = \frac{\sin^2 x}{\cos x}.$$

Интегрируя, получаем

$$C_1(x) = -\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx = -\frac{1}{\cos x} - \cos x + C_1,$$

$$C_2(x) = \int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx = \ln\left| tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| - \sin x + C_2,$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные. Подставим $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в общее решение неоднородного уравнения и получим

$$y = \left(-\frac{1}{\cos x} - \cos x + C_1\right)\cos x + \left(\ln\left| tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| - \sin x + C_2\right)\sin x$$

или

$$y = (C_1 \cos x + C_2 \sin x) + \left(\sin x \cdot \ln\left| tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| - 2\right). \diamond$$

ПРИМЕР 15.2. Найти общее решение уравнения $x^2 y'' - xy' + y = 6x \ln x$.

РЕШЕНИЕ. Рассмотрим сначала соответствующее однородное уравнение

$$x^2 y'' - xy' + y = 0.$$

Это уравнение Эйлера. Введем новую переменную по формуле

$$x = e^t \quad \Rightarrow \quad t = \ln x.$$

В результате получим линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами. Найдем его характеристическое уравнение. Полагаем

$$y = x^\lambda,$$

$$\Rightarrow \quad y' = \lambda x^{\lambda - 1}, \qquad y'' = \lambda(\lambda - 1)x^{\lambda - 2}.$$

Подставив y, y', y'' в однородное уравнение и сократив на x^λ, получим:

$$\lambda(\lambda - 1) - \lambda + 1 = 0,$$

$$\Rightarrow \quad \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0.$$

Полученное характеристическое уравнение имеет корни $\lambda_{1,2} = 1$. Им соответствуют решения

$$\tilde{y}_1(t) = e^t, \qquad \tilde{y}_2(t) = te^t,$$

$$\Rightarrow \quad y_1(x) = x, \qquad y_2(x) = x \ln x.$$

Тогда общее решение однородного уравнения будет иметь вид

$$y = C_1 x + C_2 x \ln x .$$

Теперь рассмотрим неоднородное уравнение. Прежде всего, запишем его в виде

$$y'' - \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = \frac{6\ln x}{x}$$

(так как система (15.5) была получена для приведенного уравнения). Общее решение этого уравнения можно представить в виде

$$y = C_1(x)\cdot x + C_2(x)\cdot x\ln x ,$$

где $C_1(x), C_2(x)$ – функции, удовлетворяющие системе

$$\begin{cases} C_1'(x)\cdot x & + & C_2'(x)\cdot x\ln x & = & 0, \\ C_1'(x) & + & C_2'(x)\cdot(\ln x + 1) & = & \dfrac{6\ln x}{x}. \end{cases}$$

Решая эту систему по формулам Крамера, находим

$$D = \begin{vmatrix} x & x\ln x \\ 1 & (\ln x + 1) \end{vmatrix} = x ,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & x\ln x \\ \dfrac{6\ln x}{x} & (\ln x + 1) \end{vmatrix} = -6\ln^2 x ,\quad D_2 = \begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & \dfrac{6\ln x}{x} \end{vmatrix} = 6\ln x ,$$

$$\Rightarrow\quad C_1'(x) = \frac{D_1}{D} = -\frac{6\ln^2 x}{x}, \qquad C_2'(x) = \frac{D_2}{D} = \frac{6\ln x}{x}.$$

Интегрируя, получаем

$$C_1(x) = -\int \frac{6\ln^2 x}{x}\,dx = -2\ln^3 x + C_1 ,$$

$$C_2(x) = \int \frac{6\ln x}{x}\,dx = 3\ln^2 x + C_2 ,$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Подставим $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в общее решение неоднородного уравнения и получим

$$y = (-2\ln^3 x + C_1)\cdot x + (3\ln^2 x + C_2)\cdot x\ln x$$

или

$$y = C_1 x + C_2 x\ln x + x\ln^3 x . \diamond$$

15.2. Линейные неоднородные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида

Раскроем скобки в (15.6) и сгруппируем слагаемые следующим образом:

$$y=\sum_{i=1}^{n}\left(\varphi_i(x)+\widetilde{C}_i\right)y_i=\sum_{i=1}^{n}\widetilde{C}_i y_i+\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(x)y_i .$$

Заметим, что первая получившаяся сумма – общее решение соответствующего однородного уравнения, вторая – частное решение неоднородного уравнения (получается из общего решения при $\widetilde{C}_i=0$). Более того, оказалось, что в общем случае справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 15.1 (О структуре общего решения линейного неоднородного уравнения). *Общее решение линейного неоднородного уравнения n-го порядка равно сумме общего решения* $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\ldots+C_ny_n(x)$ *соответствующего ему однородного уравнения и любого частного решения* $\widetilde{y}$ *неоднородного уравнения, т. е. имеет вид*

$$y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\ldots+C_ny_n(x)+\widetilde{y}(x). \qquad (15.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуется доказать, что

1) функция (15.7) является решением линейного неоднородного уравнения n-го порядка при любых значениях констант $C_1,\ldots,C_n$;
2) любое решение $\hat{y}(x)$ линейного неоднородного уравнения n-го порядка может быть получено из (15.7) при некоторых значениях констант $C_1,\ldots,C_n$.

Чтобы убедиться в справедливости первого утверждения, достаточно подставить (15.7) в линейное неоднородное уравнение:

$$\left[\sum_{i=1}^{n}C_iy_i(x)+\widetilde{y}(x)\right]^{(n)}+a_1(x)\left[\sum_{i=1}^{n}C_iy_i(x)+\widetilde{y}(x)\right]^{(n-1)}+\ldots+a_n(x)\left[\sum_{i=1}^{n}C_iy_i(x)+\widetilde{y}(x)\right]=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}C_i\underbrace{\left[y_i^{(n)}(x)+a_1(x)\cdot y_i^{(n-1)}(x)+\ldots+a_n(x)\cdot y_i(x)\right]}_{\substack{0\\ \text{(т.к. } y_i-\text{решение однородного уравнения)}}}+$$

$$+\underbrace{\left[\widetilde{y}^{(n)}(x)+a_1(x)\cdot\widetilde{y}^{(n-1)}(x)+\ldots+a_n(x)\cdot\widetilde{y}(x)\right]}_{\substack{f(x)\\ \text{(т.к. } \widetilde{y}-\text{решение неоднородного уравнения)}}}=$$

$$=0+f(x)=f(x).$$

Докажем второе утверждение. Рассмотрим разность $\hat{y}(x)-\widetilde{y}(x)$. Эта функция будет являться решением однородного уравнения. Действительно,

$$[\hat{y}(x)-\tilde{y}(x)]^{(n)}+a_1(x)[\hat{y}(x)-\tilde{y}(x)]^{(n-1)}+\ldots+a_n(x)[\hat{y}(x)-\tilde{y}(x)]=$$
$$=\left[\hat{y}^{(n)}(x)+a_1(x)\cdot\hat{y}^{(n-1)}(x)+\ldots+a_n(x)\cdot\hat{y}(x)\right]-$$
$$-\left[\tilde{y}^{(n)}(x)+a_1(x)\cdot\tilde{y}^{(n-1)}(x)+\ldots+a_n(x)\cdot\tilde{y}(x)\right]=$$
$$=f(x)-f(x)=0$$

Но если $\hat{y}(x)-\tilde{y}(x)$ является решением линейного однородного уравнения, то она является линейной комбинацией фундаментальной системы решений этого однородного уравнения. Т. е. существуют такие значения $\hat{C}_1,\ldots,\hat{C}_n$, что

$$\hat{y}(x)-\tilde{y}(x)=\hat{C}_1y_1(x)+\hat{C}_2y_2(x)+\ldots+\hat{C}_ny_n(x),$$
$$\Rightarrow\ \hat{y}(x)=\hat{C}_1y_1(x)+\hat{C}_2y_2(x)+\ldots+\hat{C}_ny_n(x)+\tilde{y}(x).\ \blacksquare$$

Таким образом, интегрирование линейного неоднородного дифференциального уравнения можно свести к интегрированию соответствующего однородного уравнения и нахождению какого-либо частного решения неоднородного уравнения. Однако обычно нахождение частного решения неоднородного уравнения представляет собой достаточно трудную задачу. Исключение составляют дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью вида

$$f(x)=e^{\alpha x}[P_s(x)\cos\beta x+P_k(x)\sin\beta x],\tag{15.8}$$

где $P_s(x), P_k(x)$ – многочлены степени s и k соответственно, α и β – некоторые числа. Функцию (15.8) принято называть ***функцией специального вида.*** Для таких уравнений удалось выяснить структуру частного решения. А именно, была доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 15.2 (о структуре общего решения линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами и правой часть специального вида). *Если правая часть $f(x)$ линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами имеет специальный вид* (15.8), *то частное решение такого уравнения может быть найдено в виде*

$$\tilde{y}=x^{\ell}e^{\alpha x}[R_m(x)\cos\beta x+T_m(x)\sin\beta x],\tag{15.9}$$

где $R_m(x)$ и $T_m(x)$ – некоторые многочлены степени m (*где m – большая из степеней многочленов $P_s(x), P_k(x)$ в правой части $f(x)$*), *ℓ – кратность характеристического корня $\alpha\pm\beta i$* (*$\ell=0$, если число $\alpha\pm\beta i$ не является характеристическим корнем*).

ПРИМЕРЫ.

1. Если линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами имеет правую часть $f(x) = P_s(x)$, то частное решение такого уравнения имеет вид:
   а) $\widetilde{y} = R_s(x)$, если число $\lambda = 0$ не является корнем характеристического уравнения;
   б) $\widetilde{y} = x^{\ell} \cdot R_s(x)$, если число $\lambda = 0$ является корнем кратности ℓ характеристического уравнения.
2. Если $f(x) = P_s(x)e^{\alpha x}$, то частное решение имеет вид:
   а) $\widetilde{y} = R_s(x)e^{\alpha x}$, если число α не является корнем характеристического уравнения;
   б) $\widetilde{y} = x^{\ell} R_s(x)e^{\alpha x}$, если число α является корнем кратности ℓ характеристического уравнения.
3. Если $f(x) = P_s(x)\cos\beta x + P_k(x)\sin\beta x$, (где один из многочленов $P_s(x)$ или $P_k(x)$ может быть равен нулю), то частное решение имеет вид:
   а) $\widetilde{y} = R_m(x)\cos\beta x + T_m(x)\sin\beta x$, если число $\pm\beta i$ не является характеристическим корнем уравнения;
   б) $\widetilde{y} = x^{\ell}\left[R_m(x)\cos\beta x + T_m(x)\sin\beta x\right]$, если число $\pm\beta i$ является корнем кратности ℓ характеристического уравнения.

Находя частное решение по теореме 15.2, многочлены $R_m(x)$ *и* $T_m(x)$ записывают с неопределенными коэффициентами, а затем определяют их, подставляя решение в дифференциальное уравнение.

ПРИМЕР 15.2. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 2y' + y = 8e^{3x}.$$

РЕШЕНИЕ. Сначала рассмотрим соответствующее однородное уравнение

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

Так как его характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = 1$, то общее решение однородного уравнения будет иметь вид

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x.$$

Теперь найдем частное решение неоднородного уравнения. Правая часть является произведением числа и показательной функции e^{3x}:

$$f(x) = 8e^{3x} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 3, \ \beta = 0, \ s = 0.$$

При этом число $\alpha \pm \beta i = 3$ не является корнем характеристического уравнения. Поэтому частное решение $\tilde{y}$ неоднородного уравнения надо искать в виде
$$\tilde{y} = Ae^{3x},$$
где A – неизвестный коэффициент.

Имеем:
$$\tilde{y}' = 3Ae^{3x}, \qquad \tilde{y}'' = 9Ae^{3x}.$$

Подставим $\tilde{y}, \tilde{y}', \tilde{y}''$ в неоднородное уравнение и получим
$$9Ae^{3x} - 2\cdot 3Ae^{3x} + Ae^{3x} = 8e^{3x},$$
$$\Rightarrow \ 4Ae^{3x} = 8e^{3x},$$
$$\Rightarrow \ 4A = 8 \quad \text{или} \quad A = 2.$$

Таким образом, $\tilde{y} = 2e^{3x}$ – частное решение неоднородного уравнения, а его общее решение имеет вид
$$y = (C_1 e^x + C_2 x e^x) + 2e^{3x}. \diamond$$

ПРИМЕР 15.3. Найти общее решение уравнения
$$y'' - 3y' + 2y = e^x(3 - 4x).$$

РЕШЕНИЕ. Сначала рассмотрим соответствующее однородное уравнение
$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

Так как его характеристическое уравнение $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = 2$, то общее решение однородного уравнения будет иметь вид
$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

Теперь найдем частное решение неоднородного уравнения. Правая часть уравнения является произведением многочлена первой степени и показательной функции e^x:
$$f(x) = e^x(3 - 4x) \quad \Rightarrow \ \alpha = 1, \ \beta = 0, \ s = 1.$$

При этом число $\alpha \pm \beta i = 1$ является корнем характеристического уравнения кратности 1. Поэтому частное решение $\tilde{y}$ неоднородного уравнения надо искать в виде
$$\tilde{y} = xe^x(Ax + B) = e^x(Ax^2 + Bx),$$
где A и B – неизвестные коэффициенты.

Имеем:
$$\tilde{y}' = e^x\left[Ax^2 + (B + 2A)x + B\right],$$
$$\tilde{y}'' = e^x\left[Ax^2 + (B + 4A)x + (2A + 2B)\right].$$

Подставим $\tilde{y}, \tilde{y}', \tilde{y}''$ в неоднородное уравнение и получим
$$e^x\left[Ax^2 + (B+4A)x + (2A+2B)\right] - 3e^x\left[Ax^2 + (B+2A)x + B\right] + 2e^x\left[Ax^2 + Bx\right] = e^x(3-4x),$$

$$\Rightarrow \; e^x\Big[(A-3A+2A)x^2+(4A+B-6A-3B+2B)x+(2A+2B-3B)\Big]=e^x(3-4x),$$

$$\Rightarrow \; -2A\cdot x+(2A-B)=3-4x\,,$$

$$\Rightarrow \; \begin{cases} -2A=-4, \\ 2A-B=3; \end{cases}$$

$$\Rightarrow \; A=2, \quad B=1.$$

Таким образом, $\widetilde{y}=e^x\cdot x(2x+1)$ – частное решение неоднородного уравнения, а его общее решение имеет вид

$$y=(C_1e^x+C_2e^{2x})+xe^x(2x+1).\diamond$$

ПРИМЕР 15.4. Найти общее решение уравнения

$$y''+2y'+5y=4\cos 2x+\sin 2x.$$

РЕШЕНИЕ. Рассмотрим соответствующее однородное уравнение

$$y''+2y'+5y=0.$$

Характеристическое уравнение $\lambda^2+2\lambda+5=0$ имеет корни $\lambda_{1,2}=-1\pm 2i$. Поэтому общее решение этого однородного уравнения имеет вид

$$y=C_1e^{-x}\cos 2x+C_2e^{-x}\sin 2x.$$

Правая часть уравнения $f(x)=4\cos 2x+\sin 2x$, т. е. $\alpha=0$, $\beta=2$, степени многочленов при синусе и косинусе $s=k=0$. Так как число $\alpha\pm\beta i=\pm 2i$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение неоднородного уравнения следует искать в виде

$$\widetilde{y}=A\cos 2x+B\sin 2x.$$

Имеем

$$\widetilde{y}'=2B\cos 2x-2A\sin 2x, \qquad \widetilde{y}''=-4A\cos 2x-4B\sin 2x.$$

Подставим $\widetilde{y},\widetilde{y}',\widetilde{y}''$ в неоднородное уравнение и получим

$$(-4A\cos 2x-4B\sin 2x)+2(2B\cos 2x-2A\sin 2x)+5(A\cos 2x+B\sin 2x)=$$
$$=4\cos 2x+\sin 2x,$$

$$\Rightarrow \; (-4A+4B+5A)\cdot\cos 2x+(-4B-4A+5B)\cdot\sin 2x=4\cos 2x+\sin 2x,$$

$$\Rightarrow \; (A+4B)\cdot\cos 2x+(-4A+B)\cdot\sin 2x=4\cos 2x+\sin 2x,$$

$$\Rightarrow \; \begin{cases} A+4B=4, \\ -4A+B=1; \end{cases}$$

$$\Rightarrow \; A=0, \quad B=1.$$

Таким образом $\widetilde{y}=\sin 2x$ – частное решение неоднородного уравнения, а его общее решение имеет вид

$$y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)+\sin 2x.\diamond$$

ПРИМЕР 15.5. Найти общее решение уравнения

$$y'' - y = \cos x .$$

РЕШЕНИЕ. Рассмотрим соответствующее однородное уравнение

$$y'' - y = 0 .$$

Так как его характеристическое уравнение $\lambda^2 - 1 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = \pm 1$, то общее решение однородного уравнения будет иметь вид

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} .$$

Теперь найдем частное решение неоднородного уравнения. Правая часть уравнения является произведением многочлена нулевой степени (число 1) и тригонометрической функции $\cos x$:

$$f(x) = \cos x \qquad \Rightarrow \quad \alpha = 0,\ \beta = 1,\ s = 0 .$$

При этом число $\alpha \pm \beta i = \pm i$ не является корнем характеристического уравнения. Поэтому частное решение $\tilde{y}$ неоднородного уравнения надо искать в виде

$$\tilde{y} = A\cos x + B\sin x ,$$

где A и B – неизвестные коэффициенты.

Имеем:

$$\tilde{y}' = -A\sin x + B\cos x ,$$

$$\tilde{y}'' = -A\cos x - B\sin x .$$

Подставим $\tilde{y}, \tilde{y}', \tilde{y}''$ в неоднородное уравнение и получим:

$$[-A\cos x + B\sin x] - [A\cos x + B\sin x] = \cos x ,$$

$$\Rightarrow \ -2A\cos x - 2B\sin x = \cos x ,$$

$$\Rightarrow \ \begin{cases} -2A = 1, \\ \ \ 2B = 0; \end{cases} \qquad \Rightarrow \ A = -\frac{1}{2}, \quad B = 0 .$$

Таким образом, $\tilde{y} = -\frac{1}{2}\cos x$ – частное решение неоднородного уравнения, а его общее решение имеет вид

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2}\cos x . \ \diamond$$

ПРИМЕР 15.6. Найти общее решение уравнения

$$y'' + y = \cos x .$$

РЕШЕНИЕ. Рассмотрим соответствующее однородное уравнение

$$y'' + y = 0 .$$

Так как его характеристическое уравнение $\lambda^2 + 1 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = \pm i$, то общее решение однородного уравнения будет иметь вид

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x .$$

Теперь найдем частное решение неоднородного уравнения. Правая часть уравнения является произведением многочлена нулевой степени (число 1) и тригонометрической функции $\cos x$:

$$f(x) = \cos x \quad \Rightarrow \ \alpha = 0\,,\ \beta = 1\,,\ s = 0\,.$$

При этом число $\alpha \pm \beta i = \pm i$ является корнем характеристического уравнения кратности 1. Поэтому частное решение $\widetilde{y}$ неоднородного уравнения надо искать в виде

$$\widetilde{y} = x(A\cos x + B\sin x)\,,$$

где A и B – неизвестные коэффициенты.

Имеем: $$\widetilde{y}' = [A\cos x + B\sin x] + x\cdot[-A\sin x + B\cos x]\,,$$

$$\widetilde{y}'' = 2\cdot[-A\sin x + B\cos x)] + x\cdot[-A\cos x - B\sin x]\,.$$

Подставим $\widetilde{y}, \widetilde{y}', \widetilde{y}''$ в неоднородное уравнение и получим:

$$2\cdot[-A\sin x + B\cos x)] + x\cdot[-A\cos x - B\sin x] + x\cdot[A\cos x + B\sin x] = \cos x\,,$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot[-A\sin x + B\cos x)] = \cos x\,,$$

$$\Rightarrow\ \begin{cases} -2A = 0, \\ \ \ 2B = 1; \end{cases} \quad \Rightarrow\ A = 0,\quad B = \frac{1}{2}\,.$$

Таким образом, $\widetilde{y} = \dfrac{x}{2}\sin x$ – частное решение неоднородного уравнения, а его общее решение имеет вид

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{x}{2}\sin x\,. \ \diamond$$

При нахождении частных решений линейного неоднородного уравнения часто оказывается полезной следующая теорема.

ТЕОРЕМА 15.3 (о наложении решений). *Если $\widetilde{y}_1(x)$ и $\widetilde{y}_2(x)$ – частные решения уравнений*

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f_1(x)\,,$$

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f_2(x)$$

соответственно, то функция $\widetilde{y}(x) = \widetilde{y}_1(x) + \widetilde{y}_2(x)$ будет являться решением уравнения

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f_1(x) + f_2(x)\,. \quad (15.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Чтобы убедится в справедливости теоремы, достаточно подставить функцию $\widetilde{y}(x) = \widetilde{y}_1(x) + \widetilde{y}_2(x)$ в уравнение (15.10):

$$[\widetilde{y}_1 + \widetilde{y}_2]^{(n)} + a_1(x)[\widetilde{y}_1 + \widetilde{y}_2]^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)[\widetilde{y}_1 + \widetilde{y}_2]' + a_n(x)[\widetilde{y}_1 + \widetilde{y}_2] =$$

$$= \left[\tilde{y}_1^{(n)} + a_1(x)\cdot\tilde{y}_1^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\cdot\tilde{y}_1' + a_n(x)\cdot\tilde{y}_1\right] +$$
$$+ \left[\tilde{y}_2^{(n)} + a_1(x)\cdot\tilde{y}_2^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\cdot\tilde{y}_2' + a_n(x)\cdot\tilde{y}_2\right] =$$
$$= f_1(x) + f_2(x). \blacksquare$$

ПРИМЕР 15.7. Найти общее решение уравнения
$$y''' - 2y'' + 4y' - 8y = e^{2x}\sin 2x + 2x^2.$$

РЕШЕНИЕ. Характеристическое уравнение $\lambda^3 - 2\lambda^2 + 4\lambda - 8 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_{2,3} = \pm 2i$. Поэтому общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид
$$y = C_1 e^{2x} + C_2\cos 2x + C_3\sin 2x.$$

Правая часть $f(x)$ не имеет специального вида, но она состоит из двух слагаемых, каждое из которых имеет специальный вид. Обозначим $f_1(x) = e^{2x}\sin 2x$, $f_2(x) = 2x^2$ и найдем частные решения $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2$ неоднородных уравнений
$$y''' - 2y'' + 4y' - 8y = f_1(x) \quad \text{и} \quad y''' - 2y'' + 4y' - 8y = f_2(x).$$
Тогда частное решение $\tilde{y}$ исходного уравнения будет равно сумме этих частных решений, т. е.
$$\tilde{y} = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2.$$

1) $f_1(x) = e^{2x}\sin 2x$, т. е. $s = 0$, $\alpha = 2$, $\beta = 2$, $\alpha \pm \beta i = 2 \pm 2i$. Так как число $\alpha \pm \beta i = 2 \pm 2i$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение неоднородного уравнения с правой частью $f_1(x)$ следует искать в виде
$$\tilde{y}_1 = e^{2x}(A\cos 2x + B\sin 2x).$$
Имеем:
$$\tilde{y}_1' = 2e^{2x}\left[(A+B)\cos 2x + (B-A)\sin 2x\right],$$
$$\tilde{y}_1'' = 8e^{2x}\left[B\cos 2x - A\sin 2x\right],$$
$$\tilde{y}_1''' = 16e^{2x}\left[(B-A)\cos 2x + (-A-B)\sin 2x\right].$$
Подставим $\tilde{y}_1, \tilde{y}_1', \tilde{y}_1'', \tilde{y}_1'''$ в уравнение, и после приведения подобных слагаемых, получим
$$e^{2x}\cdot\left[(8B-16A)\cos 2x + (-8A-16B)\sin 2x\right] = e^{2x}\sin 2x,$$
$$\Rightarrow\ (8B-16A)\cos 2x + (-8A-16B)\sin 2x = 0\cdot\cos 2x + \sin 2x,$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 8B - 16A = 0, \\ -16B - 8A = 1; \end{cases} \quad \Rightarrow\ B = -\frac{1}{20}, \quad A = -\frac{1}{40},$$
$$\Rightarrow\ \tilde{y}_1 = e^{2x}\left(-\frac{1}{40}\cos 2x - \frac{1}{20}\sin 2x\right) = -\frac{1}{40}e^{2x}\left(\cos 2x + 2\sin 2x\right).$$

2) $f_2(x)=2x^2$, т. е. правая часть представляет собой многочлен степени $s=2$, $\alpha=\beta=0$. Так как число $\alpha\pm\beta i=0$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение неоднородного уравнения с правой частью $f_2(x)$ следует искать в виде

$$\tilde{y}_2=Ax^2+Bx+C.$$

Имеем $\tilde{y}_2'=2Ax+B$, $\quad \tilde{y}_2''=2A$, $\quad \tilde{y}_2'''=0$.

Подставим $\tilde{y}_2, \tilde{y}_2', \tilde{y}_2'', \tilde{y}_2'''$ в неоднородное уравнение, и после приведения подобных слагаемых, получим:

$$-8Ax^2+8(A-B)x-4(A-B+2C)=2x^2,$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -8A=2, \\ A-B=0, \\ A-B+2C=0; \end{cases} \qquad \Rightarrow\ A=-\frac{1}{4},\quad B=-\frac{1}{4},\quad C=0.$$

$$\Rightarrow\ \tilde{y}_2=-\frac{1}{4}(x^2+x).$$

Итак, частное решение исходного неоднородного уравнения имеет вид

$$\tilde{y}=\tilde{y}_1+\tilde{y}_2=-\frac{1}{40}e^{2x}\left(\cos 2x+2\sin 2x\right)-\frac{1}{4}(x^2+x),$$

а его общее решение

$$y=\left(C_1e^{2x}+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x\right)-\frac{1}{40}e^{2x}\left(\cos 2x+2\sin 2x\right)-\frac{1}{4}(x^2+x).\diamond$$

§ 16. Понятие краевой задачи

Решая дифференциальные уравнения, мы получаем множество решений. Чтобы выделить из этого множества одно решение, дополнительно задают условия. До сих пор мы имели дело лишь с задачей Коши, т.е. условием выбора решения являлось значение функции и ее производных в некоторой точке. Но в дифференциальных уравнениях, наряду с задачей Коши приходится решать и так называемые краевые (или граничные) задачи. В этих задачах условием выбора решения является значение искомой функции (или значение линейной комбинации искомой функции и ее производных) на концах отрезка, на котором это решение рассматривается.

Если удается найти общее решение дифференциального уравнения, отвечающего краевой задаче, то для решения самой задачи надо из граничных условий определить значения произвольных постоянных, входящих в общее решение. При этом решение не всегда существует, а если существует, то не всегда единственное.

ПРИМЕР 16.1. На отрезке $[0; x_1]$ найти решение уравнения

$$y'' + y = 0, \tag{16.1}$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$y(0) = 0, \ y(x_1) = y_1.$$

РЕШЕНИЕ. Общее решение уравнения (16.1) имеет вид

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Из первого граничного условия получаем $C_1 = 0$, поэтому

$$y = C_2 \sin x.$$

Второе граничное условие для функции $y = C_2 \sin x$ дает равенство

$$y_1 = C_2 \sin x_1. \tag{16.2}$$

Рассмотри равенство (16.2). Возможны три случая.

1) Если $x_1 \neq n\pi$, где n – целое число, то $\sin x_1 \neq 0$, и из (16.2), находим

$$C_2 = \frac{y_1}{\sin x_1}.$$

Следовательно, при $x_1 \neq n\pi$ существует единственное решение краевой задачи, а именно

$$y = \frac{y_1}{\sin x_1} \sin x.$$

2) Если $x_1 = n\pi$ и $y_1 = 0$, то равенство (16.2) справедливо при любом C_2. Значит, в этом случае имеется бесконечно много решений $y = C_2 \sin x$ рассматриваемой краевой задачи.
3) Если $x_1 = n\pi$ и $y_1 \neq 0$, то равенство (16.2) невозможно ни при каком C_2. Следовательно, в этом случае решения краевой задачи не существует. ◇

Помимо граничных условий, рассмотренных в этом примере 16.1, могут быть и другие граничные условия. Например,

$$y'(x_1) = y_1, \quad y'(x_2) = y_2$$

или

$$\alpha_1 y(x_1) + \beta_1 y'(x_1) = y_1, \quad \alpha_2 y(x_2) + \beta_2 y'(x_2) = y_2,$$

где x_i, y_i, α_i, β_i – заданные числа, причем $\alpha_i^2 + \beta_i^2 \neq 0$ ($i = 1,2$).

Рассмотрим еще одну краевую задачу, которая может иметь различные решения в зависимости от входящего в нее параметра.

ПРИМЕР 16.2. На отрезке $[0;\ \ell]$ требуется найти решение уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\lambda y=0, \qquad (16.3)$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$y(0)=0,\ y(\ell)=0$$

(ℓ – фиксированное число).

РЕШЕНИЕ. При любом λ эта задача имеет очевидное решение $y\equiv 0$ (его называют ***тривиальным решением***). Поэтому логично задать вопрос: существуют ли такие значения параметра λ, при которых рассматриваемая краевая задача имеет нетривиальные решения? Выясним это.

Уравнение (16.3) – линейное однородное с постоянными коэффициентами. Его характеристическое уравнение

$$k^2+\lambda=0. \qquad (16.4)$$

Такое уравнение может иметь корни трех видов. Они соответствуют случаям: а) $\lambda<0$; б) $\lambda=0$; в) $\lambda>0$.

Пусть $\lambda<0$. Тогда характеристическое уравнение (16.4) имеет два простых действительных корня $k_1=-\sqrt{-\lambda}$, $k_2=\sqrt{-\lambda}$ и общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y=C_1e^{-\sqrt{-\lambda}x}+C_2e^{\sqrt{-\lambda}x}.$$

Потребовав выполнения граничных условий, получим систему

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1e^{-\sqrt{-\lambda}\ell} + C_2e^{\sqrt{-\lambda}\ell} = 0. \end{cases}$$

Определитель этой системы

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{-\sqrt{-\lambda}\ell} & e^{\sqrt{-\lambda}\ell} \end{vmatrix} = e^{\sqrt{-\lambda}\ell}-e^{-\sqrt{-\lambda}\ell}\neq 0.$$

Следовательно, система имеет единственное решение $C_1=C_2=0$ и рассматриваемая краевая задача имеет только тривиальное решение $y\equiv 0$.

Пусть $\lambda=0$. Тогда характеристическое уравнение (16.4) имеет кратный действительный корень $k_{1,2}=0$ и общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y=C_1+C_2x.$$

Граничные условия дают систему

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_1 + C_2\ell = 0. \end{cases}$$

Такая система имеет единственное решение $C_1=C_2=0$ и рассматриваемая краевая задача снова имеет только тривиальное решение $y\equiv 0$.

Пусть $\lambda > 0$. В этом случае характеристическое уравнение (16.4) имеет комплексно-сопряженные корни $k_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}i$ и общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y = C_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}x).$$

Граничные условия дают систему

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_1 \cos(\sqrt{\lambda}\ell) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}\ell) = 0. \end{cases}$$

Определитель этой системы

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cos(\sqrt{\lambda}\ell) & \sin(\sqrt{\lambda}\ell) \end{vmatrix} = \sin(\sqrt{\lambda}\ell).$$

Так как этот определитель может обращаться в ноль, то система может иметь нетривиальные решения. Имеем:

$$\sin(\sqrt{\lambda}\ell) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\lambda}\ell = \pi k,\ k = 1,2,3,\ldots$$

(k – натуральное, а не целое, так как $\sqrt{\lambda}\ell > 0$),

$$\Rightarrow \quad \lambda_k = \left(\frac{\pi k}{\ell}\right)^2,\ k = 1,2,3,\ldots$$

Найденным таким образом значениям λ_k будут соответствовать нетривиальные решения

$$y_k = C_2 \sin\left(\frac{\pi k}{\ell}x\right), \quad \forall C_2.$$

Рассмотренная нами задача нахождения значений параметра λ и соответствующих им нетривиальных решений краевой задачи для уравнения (16.3) представляет собой частный случай так называемой задачи Штурма – Лиувилля, которая часто возникает в уравнениях математической физики.

Уравнением Штурма – Лиувилля *называется дифференциальное уравнение вида*

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] - q(x)\cdot y = -\lambda \cdot \rho(x)\cdot y, \tag{16.5}$$

где функции $p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$, $\rho(x) > 0$ *всюду на некотором интервале* $(x_1; x_2)$, *причём* $\rho(x)$ *является ограниченной функцией.*

Говорят, что *решение* $y(x)$ *уравнения* (16.4) *удовлетворяет на конце интервала* $(x_1; x_2)$ *краевому (или граничному) условию первого, второго, третьего или четвёртого рода, если функция* $y(x)$ *удовлетворяет в точке* $x = x_i$ $(i = 1,2)$ *соответственно условию*:

1) $y(x_i)=0$;
2) $y'(x_i)=0$;
3) $y'(x_i)+\beta y(x_i)=0, \quad \beta>0$;
4) *функция* $y(x)$ *ограничена при* $x\to x_1+o$ (*при* $x\to x_2-o$).

Краевые условия первого, второго или третьего рода ставятся в точке x_i только тогда, когда функции $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$, $\rho(x)$ определены и непрерывны не только на интервале $(x_1;x_2)$, но и в точке x_i, причём $p(x_i)\neq 0$. Краевое условие четвёртого рода ставится в точке $x_1(x_2)$ только тогда, когда $\rho(x)\to 0$ при $x\to x_1+o\,(x\to x_2-o)$.

Значения λ, *для которых уравнение Штурма – Лиувилля имеет нетривиальные решения, удовлетворяющие заданным краевым условиям, называют* ***собственными значениями*** (*или* ***собственными числами***) *данной краевой задачи. Нетривиальные (отличные от* $y\equiv 0$*) решения, соответствующие собственным значениям* λ, *называются* ***собственными функциями*** (*или* ***собственными решениями***).

Задача нахождения всех собственных чисел и собственных функций уравнения Штурма – Лиувилля при краевых условиях 1-го, 2-го, 3-го или 4-го типов на концах интервала $(x_1;x_2)$ *называется* ***задачей Штурма – Лиувилля***.

В связи с тем, что задача Штурма – Лиувилля играет важную роль в уравнениях математической физики, отметим некоторые интересные свойства ее собственных чисел и собственных функций. А именно, справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 16.1. *Пусть для уравнения* (16.4) *на интервале* $(x_1;x_2)$ *заданы краевые условия 1-го, 2-го, 3-го или 4-го типа. Тогда собственные числа и собственные функции этой краевой задачи обладают следующими свойствами:*

1) *собственные числа образуют бесконечную возрастающую последовательность:* $\lambda_1<\lambda_2<\ldots<\lambda_n<\ldots$;
2) *все собственные числа неотрицательны; каждому собственному числу соответствует только одна (с точностью до постоянного множителя) собственная функция; каждой собственной функции отвечает только одно собственное число;*
3) *собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны на интервале* $(x_1;x_2)$ *с весом* $\rho(x)$, *т. е.*

$$\int_{x_1}^{x_2}\rho(x)\cdot y_k(x)\cdot y_m(x)dx=0, \quad k\neq m.$$

ПРИМЕР 16.3. Найти такие λ, при которых существуют нетривиальные решения уравнения $y'' + \lambda y = 0$ $\left(\frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{2}\right)$, удовлетворяющие граничным условиям $y\left(\frac{1}{2}\right) = y'\left(\frac{3}{2}\right) = 0$.

РЕШЕНИЕ. Так как характеристическое уравнение в данной задаче такое же как и в примере 16.2, выделяем три случая: а) $\lambda < 0$; б) $\lambda = 0$; в) $\lambda > 0$. В первых двух случаях получаем только тривиальные решения $y \equiv 0$. В последнем случае ($\lambda > 0$) общее дифференциального уравнения

$$y(x) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda} x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda} x).$$

Тогда

$$y'(x) = -C_1 \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}\, x) + C_2 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}\, x).$$

Потребовав выполнения граничных условий, получим систему

$$\begin{cases} 0 \; = \;\; C_1 \cos \dfrac{\sqrt{\lambda}}{2} \;\; + \; C_2 \sin \dfrac{\sqrt{\lambda}}{2}, \\ 0 \; = \; -C_1 \sqrt{\lambda} \sin \dfrac{3\sqrt{\lambda}}{2} \; + \; C_2 \sqrt{\lambda} \cos \dfrac{3\sqrt{\lambda}}{2}. \end{cases} \tag{16.6}$$

Система (16.6) будет иметь нетривиальные решения, если ее определитель равен нулю. Имеем

$$\begin{vmatrix} \cos\dfrac{\sqrt{\lambda}}{2} & \sin\dfrac{\sqrt{\lambda}}{2} \\ -\sqrt{\lambda}\sin\dfrac{3\sqrt{\lambda}}{2} & \sqrt{\lambda}\cos\dfrac{3\sqrt{\lambda}}{2} \end{vmatrix} =$$

$$= \sqrt{\lambda}\left[\cos\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\cos\frac{3\sqrt{\lambda}}{2} + \sin\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\sin\frac{3\sqrt{\lambda}}{2}\right] = 0,$$

$$\Rightarrow \;\; \cos\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right)\sqrt{\lambda} = 0,$$

$$\Rightarrow \;\; \cos\sqrt{\lambda} = 0 \quad (\text{так как } \sqrt{\lambda} > 0)$$

$$\Rightarrow \;\; \sqrt{\lambda} = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k = 1,2,3,\ldots$$

Откуда находим собственные значения

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^2, \quad k = 1,2,3,\ldots$$

Найдем собственные функции, соответствующие найденным собственным значениям. Для этого необходимо найти общее решение системы

(16.6) если $\lambda = \lambda_k$. В качестве свободной переменной можно выбрать, например, C_2. Тогда из первого уравнения системы (16.6) находим:

$$C_1 \cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right) = 0,$$

$$\Rightarrow \quad C_1 = -C_2 \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right)} = -C_2 tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right).$$

Подставляем выражение для C_1 в общее решение и получаем, что собственные функции, соответствующие собственным значениям λ_k имеют вид

$$y_k(x) = -C_2 tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right)\cos(\sqrt{\lambda_k}\, x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda_k}\, x)$$

или

$$y_k(x) = C\left[-tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)x + \sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)x\right], \quad \forall C. \diamond$$

ПРИМЕР 16.4. Найти такие λ, при которых существуют нетривиальные решения уравнения $y'' + \lambda^2 y = 0$ $(0 \le x \le 1)$, удовлетворяющие граничным условиям $y(1) = y'(0) = 0$.

РЕШЕНИЕ. Из характеристического уравнения получаем, что необходимо рассмотреть два случая: а) $\lambda = 0$, б) $\lambda > 0$.

а) Если $\lambda = 0$, то общее решение уравнения $y(x) = C_1 + C_2 x$. Потребовав выполнения граничных условий, получим систему

$$\begin{cases} 0 = C_1 + C_2, \\ 0 = C_2; \end{cases} \quad \Rightarrow \quad C_1 = C_2 = 0.$$

Следовательно, при $\lambda = 0$ существует только тривиальное решение $y \equiv 0$.

б) Если $\lambda > 0$, то общее решение уравнения

$$y(x) = C_1 \cos(\lambda x) + C_2 \sin(\lambda x).$$

Тогда

$$y'(x) = -C_1 \lambda \sin(\lambda x) + C_2 \lambda \cos(\lambda x).$$

Граничные условия дают систему

$$\begin{cases} 0 = C_1 \cos\lambda + C_2 \sin\lambda, \\ 0 = -C_1 \cdot \lambda \cdot 0 + C_2 \cdot \lambda \cdot 1. \end{cases}$$

Так как $\lambda > 0$ отсюда находим

$$\begin{cases} 0 = C_1 \cos\lambda, \\ 0 = C_2. \end{cases}$$

Нетривиальные решения эта система будет иметь если $\cos\lambda = 0$.

$$\Rightarrow \quad \lambda_k = \frac{\pi}{2} + \pi k\,, \quad k = 1,2,3,\ldots \text{ – собственные значения.}$$

Подставляем найденные λ_k и $C_2 = 0$ в общее решение и получаем, что соответствующие собственные функции имеют вид

$$y_k(x) = C \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)x\,, \quad \forall C\,. \diamond$$

ПРИМЕР 16.5. Найти такие λ, при которых существуют нетривиальные решения уравнения $y'' + 4y' + \lambda y = 0$ $(0 \le x \le \ell)$, удовлетворяющие граничным условиям $y'(0) = y'(\ell) = 0$.

РЕШЕНИЕ. Запишем характеристическое уравнение, найдем его корни:

$$k^2 + 4k + \lambda = 0 \;\Rightarrow\; k = -2 \pm \sqrt{4-\lambda}\,.$$

Следовательно, необходимо рассматривать три случая: а) $\lambda < 4$, б) $\lambda = 4$, в) $\lambda > 4$.

а) Если $\lambda < 4$, то общее решение уравнения имеет вид

$$y(x) = C_1 e^{(-2-\sqrt{4-\lambda})x} + C_2 e^{(-2+\sqrt{4-\lambda})x}.$$

Тогда

$$y'(x) = (-2-\sqrt{4-\lambda})C_1 e^{(-2-\sqrt{4-\lambda})x} + (-2+\sqrt{4-\lambda})C_2 e^{(-2+\sqrt{4-\lambda})x}$$

Потребовав выполнения граничных условий, получим систему

$$\begin{cases} 0 = (-2-\sqrt{4-\lambda})C_1 + (-2+\sqrt{4-\lambda})C_2\,, \\ 0 = (-2-\sqrt{4-\lambda})e^{(-2-\sqrt{4-\lambda})\ell}C_1 + (-2+\sqrt{4-\lambda})e^{(-2+\sqrt{4-\lambda})\ell}C_2\,. \end{cases}$$

Эта система имеет только тривиальное решение, так как ее определитель не равен нулю:

$$\begin{vmatrix} (-2-\sqrt{4-\lambda}) & (-2+\sqrt{4-\lambda}) \\ (-2-\sqrt{4-\lambda})\cdot e^{(-2-\sqrt{16-\lambda})\ell} & (-2+\sqrt{4-\lambda})\cdot e^{(-2+\sqrt{16-\lambda})\ell} \end{vmatrix} =$$

$$= \underbrace{(-2-\sqrt{4-\lambda})\cdot(-2+\sqrt{4-\lambda})}_{4-(\sqrt{4-\lambda})^2 = \lambda > 4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{-2-\sqrt{4-\lambda}\cdot\ell} & e^{-2+\sqrt{4-\lambda}\cdot\ell} \end{vmatrix} \ne 0\,.$$

Следовательно, при $\lambda < 4$ существует только тривиальное решение $y \equiv 0$.

б) Если $\lambda = 4$, то общее решение уравнения имеет вид

$$y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}.$$

Тогда

$$y'(x) = -2C_1 e^{-2x} - 2C_2 x e^{-2x} + C_2 e^{-2x}.$$

Граничные условия дают систему

$$\begin{cases} 0 = -2C_1 - 2C_2, \\ 0 = -2C_1e^{-2\ell} - 2C_2e^{-2\ell} + C_2e^{-2\ell}; \end{cases}$$

которая имеет только тривиальное решение $C_1 = C_2 = 0$. Следовательно, при $\lambda = 4$ существует только тривиальное решение $y \equiv 0$.

в) Пусть $\lambda > 4$. В этом случае $k = -2 \pm \sqrt{4-\lambda} = -2 \pm i\sqrt{\lambda - 4}$ и общее решение уравнения имеет вид

$$y(x) = C_1e^{-2x}\cos(\sqrt{\lambda-4}\,x) + C_2e^{-2x}\sin(\sqrt{\lambda-4}\,x).$$

Тогда

$$y'(x) = -2C_1e^{-2x}\cos(\sqrt{\lambda-4}\,x) - C_1\sqrt{\lambda-4}e^{-2x}\sin(\sqrt{\lambda-4}\,x) - \\ -2C_2e^{-2x}\sin(\sqrt{\lambda-4}\,x) + C_2\sqrt{\lambda-4}e^{-2x}\cos(\sqrt{\lambda-4}\,x)$$

или, перегруппировав слагаемые,

$$y'(x) = [-2C_1 + C_2\sqrt{\lambda-4}]\cdot e^{-2x}\cos(\sqrt{\lambda-4}\cdot x) + [-2C_2 - C_1\sqrt{\lambda-4}]\cdot e^{-2x}\sin(\sqrt{\lambda-4}\cdot x).$$

Граничные условия дают систему

$$\begin{cases} 0 = -2C_1 + C_2\sqrt{\lambda-4}, \\ 0 = (-2C_1 + C_2\sqrt{\lambda-4})\cos(\ell\sqrt{\lambda-4}) + (-2C_2 - C_1\sqrt{\lambda-4})\sin(\ell\sqrt{\lambda-4}). \end{cases} \quad (16.8)$$

(Во втором уравнении сократили на общий множитель $e^{-2\ell}$).

Заметим, что во втором уравнении системы (16.8) слагаемое

$$(-2C_1 + \sqrt{\lambda-4}C_2)\cos(\ell\cdot\sqrt{\lambda-4}) = 0$$

(из первого уравнения системы). Тогда

$$(-2C_2 - C_1\sqrt{\lambda-4})\cdot\sin(\sqrt{\lambda-4}\cdot\ell) = 0,$$

$$-2C_2 - C_1\sqrt{\lambda-4} = 0 \quad \text{или} \quad \sin(\sqrt{\lambda-4}\cdot\ell) = 0.$$

Следовательно, система (16.8) распадается на две:

$$\begin{cases} 0 = -2C_1 + C_2\sqrt{\lambda-4}, \\ 0 = -2C_2 - C_1\sqrt{\lambda-4} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 0 = -2C_1 + C_2\sqrt{\lambda-4}, \\ 0 = \sin(\sqrt{\lambda-4}\cdot\ell). \end{cases}$$

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} 0 = -2C_1 + C_2\sqrt{\lambda-4}, \\ 0 = -2C_2 - C_1\sqrt{\lambda-4}. \end{cases}$$

Ее определитель

$$\begin{vmatrix} -2 & \sqrt{\lambda-4} \\ -\sqrt{\lambda-4} & -2 \end{vmatrix} = 4 + (\sqrt{\lambda-4})^2 = \lambda \neq 0$$

и, следовательно, она имеет только тривиальное решение $C_1 = C_2 = 0$.

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} 0 = -2C_1 + C_2\sqrt{\lambda-4}, \\ 0 = \sin(\sqrt{\lambda-4}\cdot\ell). \end{cases}$$

Из ее второго уравнения находим

$$\sqrt{\lambda-4}\cdot\ell=\pi k\,,\quad k=1,2,3,\ldots$$

$$\Rightarrow\quad \lambda_k=\frac{\pi^2k^2}{\ell^2}+4\,,\quad k=1,2,3,\ldots \text{ – собственные значения.}$$

Тогда из первого уравнения системы

$$C_1=C_2\frac{\sqrt{\lambda-4}}{2}\,,$$

$$\Rightarrow\quad C_1=C_2\cdot\frac{\pi k}{2\ell}\,.$$

Таким образом, найденным собственным значениям $\lambda_k=\dfrac{\pi^2k^2}{\ell^2}+4$ ($k=1,2,3,\ldots$) соответствуют собственные функции

$$y_k(x)=C_2\cdot\frac{\pi k}{2\ell}\cdot e^{-2x}\cos(\sqrt{\lambda_k-4}\,x)+C_2e^{-2x}\sin(\sqrt{\lambda_k-4}\,x)$$

или

$$y_k(x)=C\left[\frac{\pi k}{2\ell}\cos\frac{\pi kx}{\ell}+\sin\frac{\pi kx}{\ell}\right]\cdot e^{-2x}\,,\quad \forall C\,.\ \diamond$$

ПРИМЕР 16.6. Найти такие λ, при которых существуют нетривиальные решения уравнения $y''-8y'-\lambda y=0$ $(0\le x\le 1)$, удовлетворяющие граничным условиям $y'(0)=y'(1)=0$.

Замечание. Уравнение в примере 16.6 не является уравнением Штурма – Лиувилля, т.к. оно получено из уравнения вида

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-8x}\cdot\frac{dy}{dx}\right)=\lambda\cdot y\,.$$

РЕШЕНИЕ. Запишем характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$k^2-8k-\lambda=0\qquad\Rightarrow\qquad k_{1,2}=4\pm\sqrt{16+\lambda}\,.$$

Следовательно, необходимо рассматривать три случая: а) $\lambda>-16$, б) $\lambda=-16$, в) $\lambda<-16$.

а) Если $\lambda>-16$, то общее решение уравнения имеет вид

$$y(x)=C_1e^{(4-\sqrt{16+\lambda})x}+C_2e^{(4+\sqrt{16+\lambda})x}\,.$$

Тогда

$$y'(x)=(4-\sqrt{16+\lambda})C_1e^{(4-\sqrt{16+\lambda})x}+(4+\sqrt{16+\lambda})C_2e^{(4+\sqrt{16+\lambda})x}\,.$$

Потребовав выполнения граничных условий, получим систему

$$\begin{cases}0\ =\ (4-\sqrt{16+\lambda})C_1+(4+\sqrt{16+\lambda})C_2\,,\\ 0\ =\ (4-\sqrt{16+\lambda})e^{4-\sqrt{16+\lambda}}C_1+(4+\sqrt{16+\lambda})e^{4+\sqrt{16+\lambda}}C_2\,.\end{cases}$$

Ее определитель:

$$\begin{vmatrix} (4-\sqrt{16+\lambda}) & (4+\sqrt{16+\lambda}) \\ (4-\sqrt{16+\lambda})\cdot e^{4-\sqrt{16+\lambda}} & (4+\sqrt{16+\lambda})\cdot e^{4+\sqrt{16+\lambda}} \end{vmatrix} =$$

$$= (4-\sqrt{16+\lambda})\cdot(4+\sqrt{16+\lambda})\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{4-\sqrt{16+\lambda}} & e^{4+\sqrt{16+\lambda}} \end{vmatrix} =$$

$$= \left[16-(\sqrt{16+\lambda})^2\right]\cdot\left(e^{4+\sqrt{16+\lambda}}-e^{4-\sqrt{16+\lambda}}\right) = -\lambda\cdot\underbrace{\left(e^{4+\sqrt{16+\lambda}}-e^{4-\sqrt{16+\lambda}}\right)}_{\neq 0}.$$

Следовательно, нетривиальное решение система имеет только при $\lambda = 0$.

Полагая $\lambda = 0$, находим:

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{8x},$$

$$\Rightarrow\quad y'(x) = 8C_2 e^{8x}.$$

Потребовав выполнения граничных условий, получим

$$\begin{cases} y'(0) = 8C_2 e^0 = 0, \\ y'(1) = 8C_2 e^8 = 0. \end{cases}$$

Откуда получаем $C_2 = 0$ и, следовательно, искомое нетривиальное решение имеет вид

$$y_0(x) = C,\quad \forall C \neq 0.$$

б) Если $\lambda = 16$, то общее решение уравнения имеет вид

$$y(x) = C_1 e^{4x} + C_2 x e^{4x}.$$

Тогда

$$y'(x) = 4C_1 e^{4x} + 4C_2 x e^{4x} + C_2 e^{4x}.$$

Граничные условия дают систему

$$\begin{cases} 0 = 4C_1 + 4C_2, \\ 0 = 4C_1 e^4 + 4C_2 e^4 + C_2 e^4; \end{cases}$$

которая имеет только тривиальное решение $C_1 = C_2 = 0$. Следовательно, при $\lambda = 16$ существует только тривиальное решение $y \equiv 0$.

в) Пусть $\lambda < -16$. В этом случае $k = 4 \pm \sqrt{16+\lambda} = 4 \pm i\sqrt{-\lambda-16}$ и общее решение уравнения имеет вид

$$y(x) = C_1 e^{4x}\cos(\sqrt{-\lambda-16}\,x) + C_2 e^{4x}\sin(\sqrt{-\lambda-16}\,x).$$

Тогда

$$y'(x) = 4C_1 e^{4x}\cos(\sqrt{-\lambda-16}\,x) - C_1\sqrt{-\lambda-16}e^{4x}\sin(\sqrt{-\lambda-16}\,x) +$$
$$+ 4C_2 e^{4x}\sin(\sqrt{-\lambda-16}\,x) + C_2\sqrt{-\lambda-16}e^{4x}\cos(\sqrt{-\lambda-16}\,x)$$

или, перегруппировав слагаемые,

$$y'(x) = [4C_1 + C_2\sqrt{-\lambda-16}]e^{4x}\cos(\sqrt{-\lambda-16}x) + [4C_2 - C_1\sqrt{-\lambda-16}]e^{4x}\sin(\sqrt{-\lambda-16}x).$$

Граничные условия дают систему

$$\begin{cases} 0 = 4C_1 + C_2\sqrt{-\lambda-16}, \\ 0 = (4C_1 + C_2\sqrt{-\lambda-16})\cos\sqrt{-\lambda-16} + (4C_2 - C_1\sqrt{-\lambda-16})\sin\sqrt{-\lambda-16}. \end{cases} \quad (16.7)$$

(Во втором уравнении сократили на общий множитель e^4).

Заметим, что во втором уравнении системы (16.7) слагаемое

$$(4C_1 + C_2\sqrt{-\lambda-16})\cos\sqrt{-\lambda-16} = 0$$

(из первого уравнения системы). Тогда

$$(4C_2 - C_1\sqrt{-\lambda-16}) \cdot \sin\sqrt{-\lambda-16} = 0,$$

$$4C_2 - C_1\sqrt{-\lambda-16} = 0 \quad \text{или} \quad \sin\sqrt{-\lambda-16} = 0.$$

Следовательно, система (16.7) распадается на две:

$$\begin{cases} 0 = 4C_1 + C_2\sqrt{-\lambda-16}, \\ 0 = 4C_2 - C_1\sqrt{-\lambda-16} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 0 = 4C_1 + C_2\sqrt{-\lambda-16}, \\ 0 = \sin\sqrt{-\lambda-16}. \end{cases}$$

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} 0 = 4C_1 + C_2\sqrt{-\lambda-16}, \\ 0 = 4C_2 - C_1\sqrt{-\lambda-16}. \end{cases}$$

Ее определитель

$$\begin{vmatrix} 4 & \sqrt{-\lambda-16} \\ -\sqrt{-\lambda-16} & 4 \end{vmatrix} = 16 + (\sqrt{-\lambda-16})^2 = -\lambda \neq 0$$

и, следовательно, она имеет только тривиальное решение $C_1 = C_2 = 0$.

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} 0 = 4C_1 + C_2\sqrt{-\lambda-16}, \\ 0 = \sin\sqrt{-\lambda-16}. \end{cases}$$

Из ее второго уравнения находим

$$\sqrt{-\lambda-16} = \pi k, \quad k = 1,2,3,\ldots$$

$$\Rightarrow \ \lambda_k = -(\pi^2 k^2 + 16), \quad k = 1,2,3,\ldots \text{ – собственные значения.}$$

Тогда из первого уравнения системы

$$C_1 = -C_2\frac{\sqrt{-\lambda-16}}{4}, \quad \Rightarrow \ C_1 = -C_2 \cdot \frac{\pi k}{4}.$$

Таким образом, найденным собственным значениям $\lambda_k = -(\pi^2 k^2 + 16)$ ($k = 1,2,3,\ldots$) соответствуют собственные функции

$$y_k(x) = -C_2 \cdot \frac{\pi k}{4} \cdot e^{4x}\cos(\sqrt{-\lambda_k - 16}\,x) + C_2 e^{4x}\sin(\sqrt{-\lambda_k - 16}\,x)$$

или
$$y_k(x) = C\left[-\frac{\pi k}{4}\cos\pi k x + \sin\pi k x\right] \cdot e^{4x}, \quad \forall C. \ \diamond$$

ГЛАВА III. СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 17. Задачи, приводящие к понятию систем дифференциальных уравнений

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(m_2)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(m_n)}) & = & 0, \\ F_2(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(m_2)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(m_n)}) & = & 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ F_n(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(m_2)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(m_n)}) & = & 0, \end{cases} \tag{17.1}$$

где x – независимая переменная, $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ – искомые функции, $F_1, F_2, \ldots, F_n$ – известные функции. Система (17.1) называется ***системой обыкновенных дифференциальных уравнений***.

Системы дифференциальных уравнений применяются для описания многих процессов реальной действительности. В частности, к ним относятся различного рода физические и химические процессы, процессы нефте- и газодобычи, геологии, экономики и т. д. Действительно, если некоторые физические величины (перемещение тела, пластовое давление жидкости в фиксированной точке с тремя координатами, концентрация веществ, объемы продаж продуктов) оказываются меняющимися со временем под воздействием тех или иных факторов, то, как правило, закон их изменения по времени описывается именно системой дифференциальных уравнений, т. е. системой, связывающей исходные переменные как функции времени и производные этих функций. Независимой переменной в системе дифференциальных уравнений может выступать не только время, но и другие физические величины: координата, цена продукта и т.д. Рассмотрим две задачи, в ходе решения которых возникают системы дифференциальных уравнений.

Задача 1. Некоторое вещество A разлагается на два вещества P и Q. Скорость образования каждого из этих веществ пропорциональна количеству неразложившегося вещества. Пусть x и y – количества вещества P и Q, образовавшихся к моменту t. Определить закон их изменений, зная, что в начальный момент $x = 0$, $y = 0$, а через 1 час $x = \frac{3c}{8}$, $y = \frac{c}{8}$, где c – первоначальное количество вещества A.

Решение. К моменту t количество неразложившегося вещества A равно $(c - x - y)$. Тогда, согласно условиям задачи, скорости образования веществ P и Q:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = k_1(c - x - y), \\ \dfrac{dy}{dt} = k_2(c - x - y), \end{cases}$$

где k_1 и k_2 – коэффициенты пропорциональности скорости образования каждого из веществ P и Q, $x = x(t)$, $y = y(t)$ – искомые функции, описывающие закон изменения количества веществ P и Q.

Не останавливаясь подробно на процессе решения этой системы и нахождении коэффициентов k_1, k_2 запишем окончательный ответ:

$$\begin{cases} x = \dfrac{c}{4}\left(1 - 2^{-t}\right), \\ y = \dfrac{3c}{4}\left(1 - 2^{-t}\right). \end{cases}$$

График искомых функций $x(t)$ и $y(t)$ (рис. 3.1) демонстрирует характер образования веществ P и Q в процессе химической реакции разложения вещества A.

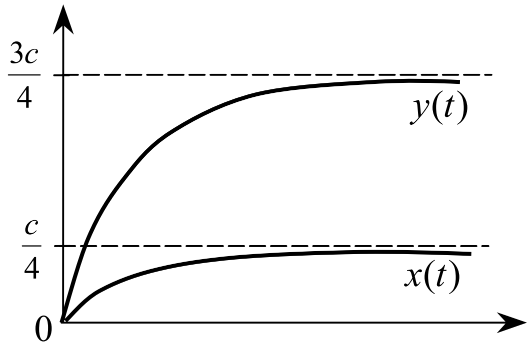

Рис. 3.1.

Задача 2 (о движении материальной точки в пространстве под действием переменной силы). Пусть $\vec{r} = \vec{r}(t)$ – закон движения материальной точки в пространстве, где t – время, $\vec{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$ (т.е. в момент времени t точка имеет координаты $\{x(t), y(t), z(t)\}$). Если точка движется под действием силы $\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}})$, где $\dot{\vec{r}} = \left\{\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}, \dfrac{dz}{dt}\right\} = \{\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\}$ – скорость, то по II закону Ньютона вектор $\vec{r}(t)$ должен удовлетворять уравнению движения

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}).$$

Это векторное уравнение эквивалентно системе трех скалярных уравнений

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = X(t,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}), \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = Y(t,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}), \\ m\dfrac{d^2z}{dt^2} = Z(t,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}), \end{cases}$$

где $\vec{F} = \{X,Y,Z\}$. Если считать неизвестными еще и проекции скорости $\dot{x} = u, \dot{y} = v, \dot{z} = w$, то система перепишется в виде

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = u(t), \\ \dfrac{dy}{dt} = v(t), \\ \dfrac{dz}{dt} = w(t), \\ m\dfrac{du}{dt} = X(t,x,y,z,u,v,w), \\ m\dfrac{dv}{dt} = Y(t,x,y,z,u,v,w), \\ m\dfrac{dw}{dt} = Z(t,x,y,z,u,v,w). \end{cases}$$

Или, в более компактной форме:

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}, \\ m\dfrac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}(t,\vec{r},\vec{V}), \end{cases}$$

где $\vec{V}$ – вектор с проекциями (u,v,w).

Таким образом, мы убедились, что физические задачи приводят нас к необходимости рассмотрения систем дифференциальных уравнений. Причем, в зависимости от постановки задачи, число уравнений может быть достаточно большим. В таких случаях удобнее использовать более компактные формы записи (например, векторную, матричную).

§ 18. Нормальные системы дифференциальных уравнений. Метод исключения

Пусть дана система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} F_1(x,y_1,y_1',\ldots,y_1^{(m_1)},y_2,y_2',\ldots,y_2^{(m_2)},\ldots,y_n,y_n',\ldots,y_n^{(m_n)}) & = & 0, \\ F_2(x,y_1,y_1',\ldots,y_1^{(m_1)},y_2,y_2',\ldots,y_2^{(m_2)},\ldots,y_n,y_n',\ldots,y_n^{(m_n)}) & = & 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ F_n(x,y_1,y_1',\ldots,y_1^{(m_1)},y_2,y_2',\ldots,y_2^{(m_2)},\ldots,y_n,y_n',\ldots,y_n^{(m_n)}) & = & 0, \end{cases} \qquad (18.1)$$

где x – независимая переменная, $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ – искомые функции, $F_1, F_2, \ldots, F_n$ – известные функции.

Совокупность n функций $y_1 = y_1(x),\ y_2 = y_2(x),\ \ldots,\ y_n = y_n(x)$ называется ***решением системы*** (18.1) *на интервале (a,b), если она обращает на (a,b) каждое уравнение этой системы в тождество.*

Замечание. Всегда будем предполагать, что число уравнений системы равно числу неизвестных функций. На практике встречаются системы, в которых число уравнений меньше числа неизвестных. Такие системы дифференциальных уравнений называются уравнениями Монжа. В нашем курсе мы их рассматривать не будем.

Система, которая может быть разрешена относительно старших производных всех входящих в нее функций, называется ***канонической:***

$$\begin{cases} y_1^{(m_1)} & = & f_1(x,y_1,y_1',\ldots,y_1^{(m_1-1)},y_2,y_2',\ldots,y_2^{(m_2-1)},\ldots,y_n,y_n',\ldots,y_n^{(m_n-1)}), \\ y_2^{(m_2)} & = & f_2(x,y_1,y_1',\ldots,y_1^{(m_1-1)},y_2,y_2',\ldots,y_2^{(m_2-1)},\ldots,y_n,y_n',\ldots,y_n^{(m_n-1)}), \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n^{(m_n)} & = & f_n(x,y_1,y_1',\ldots,y_1^{(m_1-1)},y_2,y_2',\ldots,y_2^{(m_2-1)},\ldots,y_n,y_n',\ldots,y_n^{(m_n-1)}), \end{cases} \qquad (18.2)$$

где x – независимая переменная, $y_i(x)$ – искомые функции, $f_i(x)$ – заданные в некоторой области функции.

Класс систем дифференциальных уравнений, решение которых можно найти аналитическим путем, достаточно узок. Поэтому мы будем изучать главным образом системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка, для которых существует законченная теория построения общего решения, и несложные системы нелинейных уравнений, для которых, как правило, можно подобрать интегрируемые комбинации. Для всех остальных случаев на практике используют численные методы, которые выходят за рамки нашего курса.

Частный случай канонической системы – *система уравнений первого порядка, разрешенных относительно производной всех искомых функций, т. е. система вида:*

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n). \end{cases}} \tag{18.3}$$

Система (18.3) *называется* ***нормальной.*** Если известные функции f_i системы (18.3) не зависят от свободной переменной x, то она называется ***автономной*** (стационарной).

Число уравнений системы (18.3) называется ее ***порядком***. В дальнейшем будем рассматривать только нормальные системы, т. к. каноническую систему (18.2) всегда можно заменить эквивалентной ей нормальной системой $k = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ уравнений. Для этого достаточно ввести k новых функций

$$y_{i0},\ y_{i1},\ y_{i2},\ \ldots,\ y_{i\,m_i-1} \quad (i = 1,2,\ldots,n)$$

полагая, что

$$y_{i0} = y_i,\ y_{i1} = y_i',\ y_{i2} = y_i'',\ \ldots,\ y_{i\,m_i-1} = y_i^{(m_i-1)} \quad (i = 1,2,\ldots,n).$$

ПРИМЕР. Рассмотрим систему трех уравнений второго порядка

$$\begin{cases} y_1'' = f_1(x, y_1, y_2, y_3, y_1', y_2', y_3'), \\ y_2'' = f_2(x, y_1, y_2, y_3, y_1', y_2', y_3'), \\ y_3'' = f_3(x, y_1, y_2, y_3, y_1', y_2', y_3'). \end{cases}$$

Введем новые функции

$$y_{10} = y_1, y_{20} = y_2, y_{30} = y_3, y_{11} = y_1',\ y_{21} = y_2', y_{31} = y_3'.$$

Тогда исходная система будет эквивалентна следующей системе:

$$\begin{cases} y_{11}' = f_1(x, y_{10}, y_{20}, y_{30}, y_{11}, y_{21}, y_{31}), \\ y_{21}' = f_2(x, y_{10}, y_{20}, y_{30}, y_{11}, y_{21}, y_{31}), \\ y_{31}' = f_3(x, y_{10}, y_{20}, y_{30}, y_{11}, y_{21}, y_{31}), \\ y_{10}' = y_{11}, \\ y_{20}' = y_{21}, \\ y_{30}' = y_{31}. \end{cases} \quad \diamond$$

Дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{d\,y_1}{d\,x} = f_1(x, y_1)$$

можно рассматривать как частный случай системы дифференциальных уравнений. Ее решением будет функция $y_1(x) = \varphi(x)$, которая с геометрической точки зрения представляет собой кривую на плоскости (в двумерном пространстве). Для системы 2-го порядка

$$\begin{cases} \dfrac{d\,y_1}{d\,x} = f_1(x, y_1, y_2), \\ \dfrac{d\,y_2}{d\,x} = f_2(x, y_1, y_2) \end{cases}$$

решением будет пара функций $\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x), \\ y_2 = \varphi_2(x), \end{cases}$ которые можно рассматривать как уравнения кривой в пространстве трех измерений. Обобщая геометрическую терминологию, будем считать, что решение $y_1 = \varphi_1(x),\ y_2 = \varphi_2(x), ..., y_n = \varphi_n(x)$ системы (18.3) представляет собой интегральную кривую $(n+1)$-мерного пространства переменных $x, y_1, y_2, ..., y_n$.

Задача Коши для систем дифференциальных уравнений ставится также, как для одного уравнения: найти решение системы, удовлетворяющее ***начальным условиям***

$$\boxed{y_1(x_0) = y_{10},\ \ y_2(x_0) = y_{20},\ \ \ldots,\ \ y_n(x_0) = y_{n0}.} \tag{18.4}$$

Справедлива следующая теорема

ТЕОРЕМА 18.1 (о существовании и единственности решения задачи Коши). *Пусть в системе* (18.3) *функции* $f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *удовлетворяют двум условиям*:

1) *функции* $f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *непрерывны как функции* $(n+1)$*-ой переменной* $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$ *в некоторой области* D $(n+1)$*-мерного пространства*;
2) *их частные производные по переменным* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *в области* D *ограничены* (*т. е.* $\exists\ M > 0$ *такое, что* $\left|\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}\right| \le M$, $i, j = \overline{1, n}$).

Тогда для любой фиксированной точки $M_0(x_0, y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0})$ *области* D *существует, и притом единственное, решение*

$$y_1 = \varphi_1(x),\ \ y_2 = \varphi_2(x),\ \ \ldots,\ \ y_n = \varphi_n(x)$$

системы (18.3), *определенное в некоторой окрестности точки* x_0, *и удовлетворяющее начальным условиям* (18.4).

Из теоремы 18.1 следует, что, закрепляя значение x_0 и изменяя в некоторых пределах значения $y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0}$ (так, чтобы точка $(x_0, y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0})$ принадлежала области D), мы будем для каждой системы чисел $y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0}$ получать свое решение. Следовательно, в области D система (18.3) имеет бесчисленное множество решений и эта совокупность решений зависит от n произвольных постоянных.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Совокупность n функций*

$$\begin{aligned} y_1 &= \varphi_1(x, C_1, \ldots, C_n), \\ y_2 &= \varphi_2(x, C_1, \ldots, C_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= \varphi_n(x, C_1, \ldots, C_n), \end{aligned} \tag{18.5}$$

зависящих от x *и* n *произвольных постоянных* $C_1, C_2, \ldots, C_n$, *называется общим решение системы* (18.3), *если:*

1) *при любых допустимых значениях постоянных* $C_1, C_2, \ldots, C_n$ *она обращает все уравнения системы* (18.3) *в тождество, т. е. определяет решение системы;*
2) *для любых допустимых начальных условий найдутся такие значения констант, при которых функции совокупности* (18.5) *удовлетворяют заданным начальным условиям.*

Любое решение, которое получается из общего при конкретных постоянных C_i, будем называть ***частным.***

Для нормальных систем справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 18.2. *Всякое дифференциальное уравнение n-го порядка*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$$

может быть заменено эквивалентной ему нормальной системой порядка n.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$y = z_1,\ y' = z_2,\ y'' = z_3,\ \ldots,\ y^{(n-1)} = z_n.$$

Тогда

$$y' = \frac{dz_1}{dx} = z_2,\ y'' = \frac{dz_2}{dx} = z_3,\ \ldots,\ y^{(n-1)} = \frac{dz_{n-1}}{dx} = z_n,\ y^{(n)} = \frac{dz_n}{dx} = f(x, z_1, \ldots z_n),$$

т. е. получили нормальную систему

$$\begin{cases} z_1' = z_2, \\ z_2' = z_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_{n-1}' = z_n, \\ z_n' = f(x, z_1, z_2, \ldots, z_n), \end{cases}$$

эквивалентную заданному уравнению. ■

Справедливо также и обратное утверждение.

ТЕОРЕМА 18.3. *Всякая нормальная система n-го порядка может быть заменена эквивалентным ей дифференциальным уравнением порядка n.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть дана нормальная система

$$\begin{cases} y_1' &= f_1(x, y_1, \dots, y_n), \\ y_2' &= f_2(x, y_1, \dots, y_n), \\ \dots & \dots \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, \dots, y_n). \end{cases} \qquad (18.6)$$

Дифференцируем по x обе части первого уравнения системы:

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot \frac{dy_1}{dx} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \cdot \frac{dy_n}{dx}.$$

Заменим $\frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \dots, \frac{dy_n}{dx}$ их выражениями через $x, y_1, \dots, y_n$ из системы (18.6) и получим

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot f_1 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \cdot f_n$$

или, переобозначая правую часть, имеем:

$$y_1'' = F_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Дифференцируя полученное уравнение по x и, заменяя производные их выражениями из системы (18.6), будем иметь

$$y_1''' = F_3(x, y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Продолжая этот процесс, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ y_1'' &= F_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dots & \dots \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_1^{(n)} &= F_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{cases} \qquad (18.7)$$

Из первых $(n-1)$ уравнений системы (18.7) находим $y_2, y_3, \dots, y_n$, которые будут выражаться через $x, y_1, y_1', y_1'', \dots, y_1^{(n-1)}$:

$$\begin{cases} y_2 &= \psi_2(x, y_1, y_1', y_1'', \dots, y_1^{(n-1)}), \\ y_3 &= \psi_3(x, y_1, y_1', y_1'', \dots, y_1^{(n-1)}), \\ \dots & \dots \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n &= \psi_n(x, y_1, y_1', y_1'', \dots, y_1^{(n-1)}). \end{cases} \qquad (18.8)$$

Подставляя эти выражения в последнее уравнение системы (18.7), приходим к дифференциальному уравнению n-го порядка относительно переменной y_1:

$$y_1^{(n)} = F(x, y_1, y_1', y_1'', \dots, y_1^{(n-1)}). \ \blacksquare \qquad (18.9)$$

Теорема 18.3 позволяет найти решения систем дифференциальных уравнений, сведя ее, по сути, к решению одного дифференциального уравнения порядка *n*. Действительно, решив уравнение (18.9) мы получим

$$y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2, \ldots, C_n).$$

Дифференцируя найденную функцию y_1 $(n-1)$ раз и, подставляя $y_1^{(i)}$ $(i = \overline{1, n-1})$ в (18.8), находим искомое решение нормальной системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{array}{l} y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ y_2 = \varphi_2(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = \varphi_n(x, C_1, C_2, \ldots, C_n). \end{array}$$

Интегрирование системы дифференциальных уравнений путем сведения ее к одному уравнению порядка n, *называется* ***методом исключения***.

Замечание. Уравнение (18.9) было получено в предположении, что из системы (18.8) можно выразить $y_2, y_3, \ldots, y_n$ как функции $x, y_1, y_1', y_1'', \ldots, y_1^{(n-1)}$. Но в ряде случаев это сделать невозможно (например, если первое уравнение имеет вид $y_1' = f(x, y_1)$). Тогда следует получить систему вида (18.8) для *i*-го $(i \neq 1)$ уравнения системы и заменить систему уравнением порядка *n* относительно функции y_i. Для системы дифференциальных уравнений нельзя получить эквивалентного ей уравнения порядка *n* только тогда, когда система распадается на отдельные уравнения, т.е. является не системой, а совокупностью уравнений.

ПРИМЕР 18.1. Найти методом исключения общее решение системы

$$\begin{cases} y_1' = 4y_1 - 5y_2 + 4x - 1, \\ y_2' = y_1 - 2y_2 + x. \end{cases}$$

Указать решение, удовлетворяющее условиям $y_1(0) = 11$, $y_2(0) = 3$.

РЕШЕНИЕ. Продифференцируем второе уравнение системы:

$$y_2'' = y_1' - 2y_2' + 1.$$

Заменим y_1' ее выражением из первого уравнения системы:

$$y_2'' = 4y_1 - 5y_2 + 4x - 1 - 2y_2' + 1. \qquad (18.10)$$

Из второго уравнения системы находим:

$$y_1 = y_2' + 2y_2 - x.$$

Подставляя выражение для y_1 в (18.10) получим уравнение:

$$y_2'' - 2y_2' - 3y_2 = 0.$$

Его общее решение:

$$y_2 = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}.$$

Дифференцируя y_2 и подставляя y_2 и y_2' в выражение для y_1 находим:

$$y_1 = 5C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} - x.$$

Таким образом, общее решение системы имеет вид

$$\begin{cases} y_1 = 5\,C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} - x, \\ y_2 = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}. \end{cases}$$

Найдем значение постоянных C_1 и C_2, при которых частное решение будет удовлетворять начальным условиям $y_1(0) = 11,\ y_2(0) = 3$. Подставив в общее решение $x_0 = 0$, $y_1 = 11$, $y_2 = 3$, будем иметь

$$\begin{cases} 11 = 5C_1 + C_2, \\ \ 3 = C_1 + C_2; \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} C_1 = 2, \\ C_2 = 1. \end{cases}$$

Следовательно, решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям, имеет вид

$$\begin{cases} y_1 = 10e^{3x} + e^{-x} - x, \\ y_2 = 2e^{3x} + e^{-x}. \end{cases} \diamond$$

ПРИМЕР 18.2. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} y_1' = y_2 + y_3, \\ y_2' = y_1 + y_2 - y_3, \\ y_3' = y_2 + y_3. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. 1) Дифференцируем первое уравнение системы по x два раза, каждый раз заменяя y_2' и y_3' их выражениями из второго и третьего уравнений системы:

$$y_1' = y_2 + y_3;$$

$$y_1'' = y_2' + y_3' = \underbrace{(y_1 + y_2 - y_3)}_{y_2'} + \underbrace{(y_2 + y_3)}_{y_3'},$$

$$\Rightarrow \quad y_1'' = y_1 + 2y_2.$$

$$y_1''' = y_1' + 2y_2' = (y_2 + y_3) + 2(y_1 + y_2 - y_3),$$

$$\Rightarrow \quad y_1''' = 2y_1 + 3y_2 - y_3. \tag{18.11}$$

Получили систему:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 + y_3, \\ y_1'' = y_1 + 2y_2, \\ y_1''' = 2y_1 + 3y_2 - y_3. \end{cases}$$

Из системы уравнений $\begin{cases} y_1' = y_2 + y_3, \\ y_1'' = y_1 + 2y_2 \end{cases}$ находим y_2 и y_3:

$$y_2 = 0{,}5 \cdot \left(y_1'' - y_1\right),$$
$$y_3 = y_1' - 0{,}5 \cdot \left(y_1'' - y_1\right).$$

Подставляя выражения для y_2 и y_3 в уравнение (18.11) получим

$$y_1''' = 2y_1 + 1{,}5 \cdot \left(y_1'' - y_1\right) - y_1' + 0{,}5 \cdot \left(y_1'' - y_1\right),$$
$$\Rightarrow \quad y_1''' - 2y_1'' + y_1' = 0\,.$$

Это линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами. Его характеристическое уравнение $\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = 1$. Следовательно, общее решение этого уравнения имеет вид:

$$y_1 = C_1 + e^x (C_2 + C_3 x)\,.$$

2) Теперь найдем y_2 и y_3. Имеем:

$$y_2 = 0{,}5 \cdot \left(y_1'' - y_1\right),$$
$$y_3 = y_1' - 0{,}5 \cdot \left(y_1'' - y_1\right).$$

Из $y_1 = C_1 + e^x (C_2 + C_3 x)$ находим

$$y_1' = e^x (C_2 + C_3 + C_3 x) \quad \text{и} \quad y_1'' = e^x (C_2 + 2C_3 + C_3 x)\,.$$

Тогда

$$y_2 = 0{,}5 \cdot \left[e^x (C_2 + 2C_3 + C_3 x) - C_1 - e^x (C_2 + C_3 x)\right],$$
$$\Rightarrow \quad y_2 = 0{,}5 \cdot \left[e^x (C_2 + 2C_3 + C_3 x - C_2 - C_3 x) - C_1\right],$$
$$\Rightarrow \quad y_2 = -0{,}5 \cdot C_1 + C_3 e^x;$$
$$y_3 = e^x (C_2 + C_3 + C_3 x) - \left(-0{,}5 \cdot C_1 + C_3 e^x\right),$$
$$\Rightarrow \quad y_3 = 0{,}5 \cdot C_1 + e^x (C_2 + C_3 x)\,.$$

Таким образом, общее решение системы имеет вид:

$$\begin{cases} y_1 = C_1 + e^x (C_2 + C_3 x), \\ y_2 = -0{,}5 \cdot C_1 + C_3 e^x, \\ y_3 = 0{,}5 \cdot C_1 + e^x (C_2 + C_3 x). \end{cases} \qquad \diamond$$

§ 19. Метод интегрируемых комбинаций

Пусть решение системы дифференциальных уравнений

$$y_i' = f_i (x, y_1, \ldots, y_n) \quad (i = \overline{1, n}) \tag{19.1}$$

имеет вид:

$$y_i = \varphi_i (x, C_1, \ldots, C_n) \quad (i = \overline{1, n}). \tag{19.2}$$

Можно доказать, что в области $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, в которой выполняются условия теоремы существования и единственности решения, система (19.2) может быть однозначно разрешена относительно C_1, C_2, …, C_n. Т. е. в области D справедливы равенства

$$\begin{cases} \psi_1(x, y_1, \ldots, y_n) = C_1, \\ \psi_2(x, y_1, \ldots, y_n) = C_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \psi_n(x, y_1, \ldots, y_n) = C_n. \end{cases} \tag{19.3}$$

Совокупность равенств (19.3) называют ***общим интегралом системы*** (19.1), а каждое из равенств системы (19.3) называют ***первым интегралом системы*** (19.1).

Иногда при интегрировании системы дифференциальных уравнений легче найти именно общий интеграл системы. Так, например, если с помощью элементарных преобразований система (19.1) приводится к виду

$$d\Phi_i(x, y_1, y_2, \ldots y_n) = 0 \quad (i = \overline{1, n}), \tag{19.4}$$

то
$$\Phi_i(x, y_1, y_2, \ldots y_n) = C_i \quad (i = \overline{1, n})$$

будут первыми интегралами системы, а их совокупность – общий интеграл. Такой способ интегрирования систем называют ***методом интегрируемых комбинаций***.

Замечание. n первых интегралов системы образуют общий интеграл, если они независимы, т. е. ни один из них не может быть получен из оставшихся. Доказано, что если $\Phi_i(x, y_1, y_2, \ldots y_n) = C_i$ $(i = \overline{1, k})$ – первые интегралы и для каких-нибудь k функций $y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_k}$ якобиан

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_{i_1}} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_{i_2}} & \cdots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_{i_k}} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_{i_1}} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_{i_2}} & \cdots & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_{i_k}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \Phi_k}{\partial y_{i_1}} & \frac{\partial \Phi_k}{\partial y_{i_2}} & \cdots & \frac{\partial \Phi_k}{\partial y_{i_k}} \end{vmatrix} = \frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_k)}{\partial(y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_k})} \neq 0,$$

то первые интегралы независимы.

ПРИМЕР 19.1. Найти первые интегралы системы

$$\begin{cases} y_1 y_1' + y_2 y_2' + 1 = 0, \\ \dfrac{y_1'}{y_1} + \dfrac{y_2'}{y_2} + y_1 y_2' + y_2 y_1' = 0. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Заметим, что систему можно переписать в следующем виде:

$$\begin{cases} y_1 dy_1 + y_2 dy_2 + dx = 0, \\ \dfrac{dy_1}{y_1} + \dfrac{dy_2}{y_2} + y_1 dy_2 + y_2 dy_1 = 0; \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2} d(y_1^2) + \dfrac{1}{2} d(y_2^2) + dx = 0, \\ d(\ln|y_1|) + d(\ln|y_2|) + d(y_1 y_2) = 0; \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d(y_1^2 + y_2^2 + 2x) = 0, \\ d(\ln|y_1| + \ln|y_2| + y_2 y_1) = 0. \end{cases}$$

Значит, общий интеграл системы:

$$\begin{cases} y_1^2 + y_2^2 + 2x = C_1, \\ \ln|y_1| + \ln|y_2| + y_2 y_1 = C_2. \end{cases} \quad \diamond$$

Если привести систему к виду (19.4) сложно, но удается найти k ($k < n$) независимых первых интегралов системы, то из них можно выразить k неизвестных функций через остальные $(n-k)$ функций и перейти таким образом к системе с меньшим числом переменных.

ПРИМЕР 19.2. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = 2y_1 - y_2 - y_3, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = 3y_1 - 2y_2 - 3y_3, \\ \dfrac{dy_3}{dx} = -y_1 + y_2 + 2y_3. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Почленно сложим второе и третье уравнения, вычтем первое и получим

$$-\frac{dy_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx} + \frac{dy_3}{dx} = -(2y_1 - y_2 - y_3) + (3y_1 - 2y_2 - 3y_3) + (-y_1 + y_2 + 2y_3) = 0$$

или
$$\frac{d}{dx}(-y_1 + y_2 + y_3) = 0.$$

Отсюда первый интеграл системы:

$$-y_1 + y_2 + y_3 = C_1.$$

Этот интеграл позволяет выразить одну из неизвестных функций через две другие, например,

$$y_3 = C_1 + y_1 - y_2. \tag{19.5}$$

Подставим y_3 в первые два уравнения системы и получим систему из двух уравнений с двумя неизвестными y_1 и y_2:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = 2y_1 - y_2 - (C_1 + y_1 - y_2), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = 3y_1 - 2y_2 - 3(C_1 + y_1 - y_2), \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_1 - C_1, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = y_2 - 3C_1. \end{cases}$$

Каждое из уравнений этой системы является уравнением с разделяющимися переменными. Интегрируя их, находим:

$$y_1 = C_1 + C_2 e^x, \quad y_2 = 3C_1 + C_3 e^x.$$

Подставим найденные y_1 и y_2 в (19.5) и найдем y_3:

$$y_3 = C_1 + (C_1 + C_2 e^x) - (3C_1 + C_3 e^x) = e^x (C_2 - C_3) - C_1.$$

Таким образом, общее решение исходной системы:

$$\begin{cases} y_1 = C_1 + C_2 e^x, \\ y_2 = 3C_1 + C_3 e^x, \\ y_3 = e^x (C_2 - C_3) - C_1. \end{cases} \qquad \diamond$$

Равенства (19.3), дающие общий интеграл системы (19.1) обладают следующей особенностью: независимая переменная и функции входят в них равноправно. Следовательно, они сохранят свой вид и в том случае, когда мы берем в качестве независимой переменной y_i, хотя сама система дифференциальных уравнений свою форму в этом случае меняет.

Систему дифференциальных уравнений тоже можно записать в виде, который не будет меняться при смене независимого переменного. Действительно, из уравнений

$$y_i' = \frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \ldots, y_n) \quad (i = \overline{1, n})$$

получаем:
$$dx = \frac{dy_i}{f_i(x, y_1, \ldots, y_n)} \quad (i = \overline{1, n}).$$

$$\Rightarrow \quad dx = \frac{dy_1}{f_1(x, y_1, \ldots, y_n)} = \ldots = \frac{dy_n}{f_n(x, y_1, \ldots, y_n)};$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{f(x)} = \frac{dy_1}{f(x) \cdot f_1(x, y_1, \ldots, y_n)} = \ldots = \frac{dy_n}{f(x) \cdot f_n(x, y_1, \ldots, y_n)}, \qquad (19.6)$$

где $f(x)$ – любая отличная от нуля функция. Обозначим

$$x = x_1, \; y_1 = x_2, \; \ldots, \; y_n = x_{n+1}.$$

Тогда равенства (19.6) примут вид:

$$\boxed{\frac{dx_1}{F_1(x_1,\ldots,x_{n+1})}=\frac{dx_2}{F_2(x_1,\ldots,x_{n+1})}=\ldots=\frac{dx_{n+1}}{F_{n+1}(x_1,\ldots,x_{n+1})}} \tag{19.7}$$

Форма (19.7) записи системы дифференциальных уравнений, называется ***симметричной*** (или ***симметрической***)***.*** Для метода интегрируемых комбинаций она обычно более удобна.

> *Замечание.* При интегрировании системы методом интегрируемых комбинаций часто оказывается полезным ***свойство равных дробей*** (или ***производных пропорций***):
>
> $$\boxed{\text{если}\quad \frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3},\qquad \text{то}\quad \frac{a_1}{b_1}=\frac{\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+\alpha_3 a_3}{\alpha_1 b_1+\alpha_2 b_2+\alpha_3 b_3}.}$$
>
> Действительно, пусть
>
> $$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=k,$$
>
> $$\Rightarrow\quad a_1=k\cdot b_1,\quad a_2=k\cdot b_2,\quad a_3=k\cdot b_3.$$
>
> Тогда
>
> $$\frac{\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+\alpha_3 a_3}{\alpha_1 b_1+\alpha_2 b_2+\alpha_3 b_3}=\frac{\alpha_1 kb_1+\alpha_2 kb_2+\alpha_3 kb_3}{\alpha_1 b_1+\alpha_2 b_2+\alpha_3 b_3}=k=\frac{a_1}{b_1}.\ \blacksquare$$

ПРИМЕР 19.3. Решить систему методом интегрируемых комбинаций

$$\begin{cases}\dfrac{dy_1}{dx}=-\dfrac{\ln x}{2y_1},\\[2mm] \dfrac{dy_2}{dx}=\dfrac{\ln x}{2y_1}-1.\end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Запишем систему в симметричной форме:

$$\frac{dy_1}{-\dfrac{\ln x}{2y_1}}=\frac{dy_2}{\dfrac{\ln x}{2y_1}-1}=\frac{d\,x}{1},$$

$$\Rightarrow\quad \frac{dy_1}{\ln x}=\frac{dy_2}{2y_1-\ln x}=\frac{d\,x}{-2y_1}.$$

Из равенства первой и третьей дроби получим один первый интеграл:

$$\frac{dy_1}{\ln x}=\frac{d\,x}{-2y_1},$$

$$\Rightarrow\quad -2y_1dy_1=\ln x d\,x,$$

$$\Rightarrow\quad -y_1^{\,2}=x(\ln x-1)+C_1 \qquad \text{или} \qquad y_1^{\,2}+x(\ln x-1)=C_1.$$

Другой первый интеграл системы получим используя свойства равных дробей:

$$\frac{dy_1 + dy_2}{\ln x + 2y_1 - \ln x} = \frac{d\,x}{-2y_1},$$

$$\Rightarrow \quad dy_1 + dy_2 = -d\,x,$$

$$\Rightarrow \quad y_1 + y_2 = -x + C_2 \quad \text{или} \quad y_1 + y_2 + x = C_2.$$

Убедимся, что найденные первые интегралы

$$y_1^{\,2} + x(\ln x - 1) = C_1 \quad \text{и} \quad y_1 + y_2 + x = C_2$$

независимы (см. замечание на стр. 129). Имеем:

$$\Phi_1 = y_1^{\,2} + x(\ln x - 1), \quad \Phi_2 = y_1 + y_2 + x,$$

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2y_1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2y_1 \neq 0.$$

Таким образом, первые интегралы действительно независимы и общий интеграл системы имеет вид

$$\begin{cases} y_1^{\,2} + x(\ln x - 1) = C_1, \\ \quad y_1 + y_2 + x = C_2. \end{cases} \quad \diamond$$

§ 20. Системы линейных дифференциальных уравнений

Нормальная система дифференциальных уравнений (18.3) *называется* ***линейной***, *если функции* $f_1, f_2, \ldots, f_n$ *линейны относительно неизвестных функций*, т. е. если она имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \ldots + a_{1n}(x)y_n + b_1(x), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \ldots + a_{2n}(x)y_n + b_2(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \ldots + a_{nn}(x)y_n + b_n(x), \end{cases} \tag{20.1}$$

или, более кратко,

$$\boxed{\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)y_j + b_i(x) \quad (i = \overline{1,n}),}$$

где коэффициенты $a_{ij}(x)$ и $b_i(x)$ – известные функции от x, $y_i(x)$ – искомые функции.

Если все $b_i(x) \equiv 0$ $(i = \overline{1,n})$, то система (20.1) называется ***однородной***.

Систему линейных дифференциальных уравнений (СЛДУ) можно записать в более компактной *матричной* (*векторно-матричной*) форме. Обозначим матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ b_2(x) \\ \dots \\ b_n(x) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \dots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}' = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \\ \dots \\ y_n'(x) \end{pmatrix}.$$

Тогда систему (20.1) можно записать в виде матричного уравнения

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{Y} + \mathbf{B} \quad \text{или} \quad \mathbf{Y}' - \mathbf{AY} = \mathbf{B}. \tag{20.2}$$

Для однородной системы матричная форма записи имеет вид

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{Y} \quad \text{или} \quad \mathbf{Y}' - \mathbf{AY} = \mathbf{O}, \tag{20.3}$$

где $\mathbf{O}$ – нулевая матрица-столбец длины n.

Чтобы упростить дальнейшее изложение, свяжем также систему линейных дифференциальных уравнений с действием некоторого линейного оператора.

Пусть $C_n[a,b]$ – множество матриц-столбцов, элементами которых являются функции, непрерывные на отрезке $[a;b]$, $D_n[a,b]$ – множество матриц-столбцов, элементами которых являются функции, непрерывно дифференцируемые на отрезке $[a;b]$. Легко доказать, что оба этих множества образуют линейное пространство над $\mathbb{R}$, причем $D_n[a,b]$ является подпространством $C_n[a,b]$.

Пусть L – оператор, действующий из $D_n[a,b]$ в $C_n[a,b]$ по следующему правилу

$$L[\mathbf{Y}] = \mathbf{Y}' - \mathbf{AY}, \quad \forall \mathbf{Y} \in D_n[a,b].$$

Тогда система (20.1) означает, что

$$L[\mathbf{Y}] = \mathbf{B}. \tag{20.4}$$

Равенство (20.4) называется ***операторной формой неоднородной системы***. Операторная форма однородной системы имеет вид:

$$L[\mathbf{Y}] = \mathbf{O}. \tag{20.7}$$

В дальнейшем, мы чаще всего будем использовать именно такую форму записи систем линейных дифференциальных уравнений.

Заметим, что оператор $L[\mathbf{Y}]$ является линейным, т. к. обладает следующими свойствами:

1. $L[C\,\mathbf{Y}] = CL\,[\mathbf{Y}],\ \forall C \in \mathbb{R};$ (20.5)

2. $L[\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2] = L[\mathbf{Y}_1] + L[\mathbf{Y}_2].$ (20.6)

Действительно, по свойствам матриц,

1) $L[C\,\mathbf{Y}] = (C\,\mathbf{Y})' - \mathbf{A}(C\,\mathbf{Y}) = C\,\mathbf{Y}' - C\,\mathbf{AY} = C(\mathbf{Y}' - \mathbf{AY}) = CL\,[\mathbf{Y}];$

2) $L[\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2] = (\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2)' - \mathbf{A}(\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2) = \mathbf{Y}_1' + \mathbf{Y}_2' - \mathbf{AY}_1 - \mathbf{AY}_2 =$

$$= (\mathbf{Y}_1' - \mathbf{AY}_1) + (\mathbf{Y}_2' - \mathbf{AY}_2) = L[\mathbf{Y}_1] + L[\mathbf{Y}_2].\ ■$$

Изучение СЛДУ будем проводить по той же схеме, что и изучение линейных дифференциальных уравнений n-го порядка: сначала изучим однородные СЛДУ, а затем – неоднородные.

20.1. Интегрирование однородных систем дифференциальных уравнений

Рассмотрим линейную однородную систему

$$L[\mathbf{Y}] = \mathbf{O}, \tag{20.7}$$

в которой все коэффициенты $a_{ij}(x)$ непрерывны на $[a,b]$. Тогда в области

$$D = \{(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \mid x \in [a;b],\ \forall y_i \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^{\mathrm{n+1}}$$

для системы (20.7) будут выполняться условия теоремы существования и единственности решения и, следовательно, для любого $x_0 \in [a;b]$ и любого $y_{i0} \in \mathbb{R}$ существует единственное решение системы (20.7), удовлетворяющее условию

$$y_1(x_0) = y_{10},\quad y_2(x_0) = y_{20},\quad \ldots,\quad y_n(x_0) = y_{n0}.$$

Так как оператор $L[\mathbf{Y}]$ – линейный, то справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 20.1. *Если* $\mathbf{Y}_1$ *и* $\mathbf{Y}_2$ *– решения линейной однородной системы* (20.7)*, то* $\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2$ *и* $C\mathbf{Y}_1$ $(\forall C \in \mathbb{R})$ *тоже являются решениями линейной однородной системы* (20.7).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимо убедиться, что $\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2$ и $C\mathbf{Y}_1$ удовлетворяют системе $L[\mathbf{Y}] = \mathbf{O}$. Из условия (20.5) получаем:

$$L[C\,\mathbf{Y}_1] = C \cdot L[\mathbf{Y}_1] = C \cdot \mathbf{O} = \mathbf{O}.$$

Из условия (20.6) получаем:

$$L[\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2] = L[\mathbf{Y}_1] + L[\mathbf{Y}_2] = \mathbf{O} + \mathbf{O} = \mathbf{O}.\ ■$$

СЛЕДСТВИЕ 20.2. *Если* $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_k$ *– решения линейной однородной системы* (20.7), *то для любых постоянных* $C_1, C_2, \ldots, C_n$ *линейная комбинация решений*

$$\sum_{i=1}^{k} C_i \mathbf{Y}_i = C_1 \mathbf{Y}_1 + C_2 \mathbf{Y}_2 + \ldots + C_k \mathbf{Y}_k$$

тоже является решением системы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (20.5) и (20.6) следует справедливость равенства

$$L\left[\sum_{i=1}^{k} C_i \mathbf{Y}_i\right] = \sum_{i=1}^{k} C_i L\left[\mathbf{Y}_i\right] = \sum_{i=1}^{k} C_i \cdot \mathbf{O} = \mathbf{O},$$

где C_i – произвольные постоянные. Но это и означает, что $\sum\limits_{i=1}^{k} C_i \mathbf{Y}_i$ – решение однородной системы (20.7). ■

Обозначим через $S_n[a,b]$ множество матриц-столбцов порядка n, элементы которых являются решениями системы (20.7). Так как функции любого решения системы (20.7) является непрерывно дифференцируемыми, то

$$S_n[a,b] \subset D_n[a;b],$$

где $D_n[a,b]$ – множество матриц-столбцов длины n, элементами которых являются функции, непрерывно дифференцируемые на отрезке $[a;b]$. Более того, в силу теоремы 20.1, $S_n[a,b]$ ***является подпространством линейного пространства*** $D_n[a,b]$. Оказалось также, что линейное пространство $S_n[a,b]$ конечномерное. Чтобы доказать это, необходимо нам сначала получить условие линейной независимости векторов пространства $S_n[a,b]$.

Возьмем в пространстве $D_n[a,b]$ n векторов:

$$\mathbf{Y}_1 = \begin{pmatrix} y_{11}(x) \\ y_{21}(x) \\ \cdots\cdots \\ y_{n1}(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}_2 = \begin{pmatrix} y_{12}(x) \\ y_{22}(x) \\ \cdots\cdots \\ y_{n2}(x) \end{pmatrix}, \ \ldots, \ \mathbf{Y}_n = \begin{pmatrix} y_{1n}(x) \\ y_{2n}(x) \\ \cdots\cdots \\ y_{nn}(x) \end{pmatrix}. \qquad (20.8)$$

Если векторы $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n$ линейно зависимы на $[a,b]$, то существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ такие, что хотя бы одно из них отлично от нуля и

$$\alpha_1 \mathbf{Y}_1 + \alpha_2 \mathbf{Y}_2 + \ldots + \alpha_n \mathbf{Y}_n \equiv 0.$$

Это тождество означает, что система

$$
\begin{cases}
\alpha_1 y_{11} + \alpha_2 y_{12} + \ldots + \alpha_n y_{1n} \equiv 0, \\
\alpha_1 y_{21} + \alpha_2 y_{22} + \ldots + \alpha_n y_{2n} \equiv 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\alpha_1 y_{n1} + \alpha_2 y_{n2} + \ldots + \alpha_n y_{nn} \equiv 0
\end{cases}
\tag{20.9}
$$

имеет нетривиальные решения. А это возможно только в том случае, когда определитель матрицы системы (20.9) тождественно равен нулю.

Матрица системы (20.9)

$$
\boxed{\begin{pmatrix}
y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\
y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn}
\end{pmatrix}}
\tag{20.10}
$$

называется ***интегральной матрицей***, а ее определитель называется ***определителем Вронского (вронскианом)*** векторов $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n$ и обозначается

$$
W[\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n] \quad \text{или} \quad W[\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n](x).
$$

Таким образом, мы показали что справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 20.3 (необходимое условие линейной зависимости n векторов пространства $D_n[a,b]$). *Если векторы $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n$ линейно зависимы на $[a;b]$, то их определитель Вронского на $[a;b]$ тождественно равен нулю*.

Теорема 20.3 дает необходимое условие линейной зависимости векторов $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n$. Достаточным это условие для произвольных n элементов пространства $D_n[a,b]$ не будет, т. е. если $W[\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n] \equiv 0$, то векторы $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n$ могут оказаться как линейно зависимыми, так и линейно независимыми.

ПРИМЕР 20.1. Для векторов $\mathbf{Y}_1 = \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{Y}_2 = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ имеем:

$$
W[\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2] = \begin{vmatrix} x^2 & x \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \equiv 0.
$$

Однако эти векторы линейно независимы, так как из $\alpha_1 \mathbf{Y}_1 + \alpha_2 \mathbf{Y}_2 \equiv 0$ следует

$$
\begin{cases}
\alpha_1 x^2 + \alpha_2 x \equiv 0, \\
\alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 \equiv 0;
\end{cases}
$$

$$
\Rightarrow \quad \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x \equiv 0 \quad \text{или} \quad \alpha_1 x + \alpha_2 \equiv 0
$$

$$
\Rightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = 0.
$$

Но ситуация меняется, если $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n$ – решения линейной однородной системы (20.7). Здесь справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 20.4 (условие линейной независимости решений линейной однородной системы дифференциальных уравнений)**.** *Если n решений $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n$ линейной однородной системы* (20.7) *линейно независимы на* $[a;b]$*, то их определитель Вронского* $W[\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n]$ *не может обратиться в нуль ни в одной точке этого промежутка.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Пусть $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n$ линейно независимы на $[a;b]$ и существует $x_0 \in [a;b]$ такое, что

$$W[\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n](x_0) = \begin{vmatrix} y_{11}(x_0) & y_{12}(x_0) & \ldots & y_{1n}(x_0) \\ y_{21}(x_0) & y_{22}(x_0) & \ldots & y_{2n}(x_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{n1}(x_0) & y_{n2}(x_0) & \ldots & y_{nn}(x_0) \end{vmatrix} = 0.$$

Рассмотрим систему n линейных однородных уравнений, матрицу которой составляют числа $y_{ij}(x_0)$:

$$\begin{cases} \alpha_1 y_{11}(x_0) + \alpha_2 y_{12}(x_0) + \ldots + \alpha_n y_{1n}(x_0) = 0, \\ \alpha_1 y_{21}(x_0) + \alpha_2 y_{22}(x_0) + \ldots + \alpha_n y_{2n}(x_0) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1 y_{n1}(x_0) + \alpha_2 y_{n2}(x_0) + \ldots + \alpha_n y_{nn}(x_0) = 0. \end{cases} \qquad (20.11)$$

Определитель матрицы системы (20.11)

$$\det \mathbf{M} = W[\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n](x_0) = 0.$$

Следовательно, система (20.11) имеет нетривиальные решения.

Пусть $\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \ldots, \widetilde{\alpha}_n$ – одно из нетривиальных решений системы (20.11). Рассмотрим матрицу-столбец

$$\widetilde{\mathbf{Y}} = \widetilde{\alpha}_1 \mathbf{Y}_1 + \widetilde{\alpha}_2 \mathbf{Y}_2 + \ldots + \widetilde{\alpha}_n \mathbf{Y}_n.$$

Так как $\mathbf{Y}_i$ – решения линейной однородной системы $L[\mathbf{Y}] = \mathbf{O}$, то $\widetilde{\mathbf{Y}}$ – решение той же системы, удовлетворяющее в силу (20.11), начальным условиям $\mathbf{Y}(x_0) = \mathbf{O}$.

С другой стороны, однородная система $L[\mathbf{Y}] = \mathbf{O}$ всегда имеет нулевое решение $\mathbf{Y}(x) \equiv \mathbf{O}$, которое тоже удовлетворяет начальному условию $\mathbf{Y}(x_0) = \mathbf{O}$.

Поскольку, по теореме существования и единственности решения, начальные условия определяют единственное решение, получаем:

$$\widetilde{\mathbf{Y}} = \widetilde{\alpha}_1 \mathbf{Y}_1 + \widetilde{\alpha}_2 \mathbf{Y}_2 + \ldots + \widetilde{\alpha}_n \mathbf{Y}_n = \mathbf{O},$$

причем среди коэффициентов $\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \ldots, \widetilde{\alpha}_n$ есть ненулевые. Но это означает, что $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \dots, \mathbf{Y}_n$ линейно зависимы на $[a;b]$, что противоречит условию теоремы.

Следовательно, предположение было неверным и

$$W[\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \dots, \mathbf{Y}_n](x) \neq 0, \ \ \forall x \in [a;b]. \ \blacksquare$$

СЛЕДСТВИЕ 20.5 (теоремы 20.3 и 20.4). Пусть $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \dots, \mathbf{Y}_n$ – *решения системы* (20.7). *Тогда их определитель Вронского* $W\,[\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \dots, \mathbf{Y}_n]$ *либо тождественно равен нулю, и это означает, что решения* $\mathbf{Y}_i$ *линейно зависимы*; *либо не обращается в нуль ни в одной точке* $x \in [a,b]$, *и это означает, что решения* $\mathbf{Y}_i$ *линейно независимы.*

Следствие 20.5 позволяет доказать следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 20.6. *Пространство решений* $S_n[a,b]$ *линейной однородной системы* (20.7) *конечномерно и его размерность совпадает с порядком системы, т. е.* $\dim S_n[a;b] = n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1) Покажем, что для системы (20.7) можно найти n линейно независимых решений.

Возьмем любое $x_0 \in [a;b]$ и любой определитель Δ_n порядка n, отличный от нуля. Например, пусть

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

По теореме существования и единственности решения получаем, что существуют n решений системы (20.7)

$$\mathbf{Y}_1 = \begin{pmatrix} y_{11}(x) \\ y_{21}(x) \\ \dots\dots \\ y_{n1}(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}_2 = \begin{pmatrix} y_{12}(x) \\ y_{22}(x) \\ \dots\dots \\ y_{n2}(x) \end{pmatrix}, \ \dots, \ \mathbf{Y}_n = \begin{pmatrix} y_{1n}(x) \\ y_{2n}(x) \\ \dots\dots \\ y_{nn}(x) \end{pmatrix},$$

определенных в окрестности точки x_0 и удовлетворяющих условиям:

1) $y_{11}(x_0) = 1, \ y_{21}(x_0) = 0, \ \dots\dots\dots, \ y_{n1}(x_0) = 0$

(где $1, 0, \dots, 0$ – числа из первого столбца определителя Δ_n);

2) $y_{12}(x_0) = 0, \ y_{22}(x_0) = 1, \ \dots\dots\dots, \ y_{n2}(x_0) = 0$

(где $0, 1, \dots, 0$ – числа из второго столбца определителя Δ_n);

………………………………………………………………

n) $y_{1n}(x_0) = 0, \ \ y_{2n}(x_0) = 0, \ \ \dots\dots\dots, \ \ y_{nn}(x_0) = 1$

(где $0, 0, \dots, 1$ – числа из n-го столбца определителя Δ_n).

Для найденных таким образом решений $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n$ имеем:

$$W[\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n](x_0) = \Delta_n \neq 0,$$

и, следовательно, по следствию 20.5, $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n$ – линейно независимы.

2) Покажем, что любое решение однородной системы (20.7) может быть представлено как линейная комбинация ее n линейно независимых решений.

Пусть $\mathbf{Y}_1 = (y_{i1}), \mathbf{Y}_2 = (y_{i2}), \ldots, \mathbf{Y}_n = (y_{in})$ – некоторые линейно независимые решения системы (20.7), $\hat{\mathbf{Y}} = (\hat{y}_i)$ – решение системы (20.7), удовлетворяющее условию $\hat{\mathbf{Y}}(x_0) = \mathbf{Y_0}$, т. е.

$$\hat{y}_1(x_0) = y_{10},\ \hat{y}_2(x_0) = y_{20},\ \ldots,\ \hat{y}_n(x_0) = y_{n0}.$$

Рассмотрим систему n линейных уравнений вида:

$$\begin{cases} y_{10} = C_1 y_{11}(x_0) + C_2 y_{12}(x_0) + \ldots + C_n y_{1n}(x_0), \\ y_{20} = C_1 y_{21}(x_0) + C_2 y_{22}(x_0) + \ldots + C_n y_{2n}(x_0), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{n0} = C_1 y_{n1}(x_0) + C_2 y_{n2}(x_0) + \ldots + C_n y_{nn}(x_0). \end{cases} \tag{20.12}$$

Так как $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n$ – линейно независимые решения системы (20.7), то для матрицы системы $\mathbf{M}$ имеем:

$$\det \mathbf{M} = W[\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n](x_0) \neq 0.$$

Следовательно, система (20.12) имеет единственное решение $\widetilde{C}_1, \widetilde{C}_2, \ldots, \widetilde{C}_n$.

Рассмотрим матрицу-столбец $\widetilde{\mathbf{Y}} = \widetilde{C}_1 \mathbf{Y}_1 + \widetilde{C}_2 \mathbf{Y}_2 + \ldots + \widetilde{C}_n \mathbf{Y}_n = (\widetilde{y}_i)$. В силу следствия (18.5) она будет являться решением системы (20.7), причем

$\widetilde{y}_1(x_0) = y_{10}$ (из 1-го уравнения системы (20.12)),

$\widetilde{y}_2(x_0) = y_{20}$ (из 2-го уравнения системы (20.12)),

……………………………………………….

$\widetilde{y}_n(x_0) = y_{n0}$ (из n-го уравнения системы (20.12)).

Но начальным условиям

$$y_1(x_0) = y_{10},\ y_2(x_0) = y_{20},\ \ldots,\ y_n(x_0) = y_{n0}$$

удовлетворяет и решение $\hat{\mathbf{Y}}$.

Поскольку, по теореме существования и единственности решения, начальные условия определяют единственное решение, получаем:

$$\hat{\mathbf{Y}} = \widetilde{C}_1 \mathbf{Y}_1 + \widetilde{C}_2 \mathbf{Y}_2 + \ldots + \widetilde{C}_n \mathbf{Y}_n = \widetilde{\mathbf{Y}}. \ \blacksquare$$

Система n линейно независимых решений линейной однородной системы порядка n (базис пространства $S_n[a;b]$) называется его ***фундаментальной системой решений***.

Если матрицы-столбцы

$$\mathbf{Y}_1 = \begin{pmatrix} y_{11}(x) \\ y_{21}(x) \\ \cdots\cdots \\ y_{n1}(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}_2 = \begin{pmatrix} y_{12}(x) \\ y_{22}(x) \\ \cdots\cdots \\ y_{n2}(x) \end{pmatrix}, \ \ldots, \ \mathbf{Y}_n = \begin{pmatrix} y_{1n}(x) \\ y_{2n}(x) \\ \cdots\cdots \\ y_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

образуют фундаментальную систему решений линейной однородной системы $L[\mathbf{Y}] = \mathbf{O}$, то общее решение этой системы имеет вид

$$\boxed{\mathbf{Y} = \sum_{i=1}^{n} C_i \mathbf{Y}_i}$$

или, подробнее

$$\begin{cases} y_1(x) = C_1 y_{11}(x) + C_2 y_{12}(x) + \ldots + C_n y_{1n}(x), \\ y_2(x) = C_1 y_{21}(x) + C_2 y_{22}(x) + \ldots + C_n y_{2n}(x), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n(x) = C_1 y_{n1}(x) + C_2 y_{n2}(x) + \ldots + C_n y_{nn}(x). \end{cases}$$

Итак, задача интегрирования линейной однородной системы свелась к отысканию фундаментальной системы ее решений. Но сделать это для произвольной системы очень сложно. Позже мы рассмотрим один класс однородных систем, для которых практически всегда удается найти фундаментальную систему решений – линейные однородные системы с постоянными коэффициентами.

ПРИМЕР 20.2. Доказать, что $\mathbf{Y_1} = \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix}$ и $\mathbf{Y_2} = \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$ образуют фундаментальную систему решений системы

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -y_1. \end{cases}$$

Записать общее решение этой системы.

РЕШЕНИЕ. Имеем:

$$W[\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2] = \begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1 \neq 0 .$$

Следовательно, $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2$ – линейно независимы (по следствию (20.7)) и образуют фундаментальную систему решений (по теореме 20.6). Поэтому общее решение можно записать в виде

$$\mathbf{Y} = C_1 \mathbf{Y}_1 + C_2 \mathbf{Y}_2 = \begin{pmatrix} C_1 \cos x + C_2 \sin x \\ -C_1 \sin x + C_2 \cos x \end{pmatrix}. \ \diamond$$

20.2. Линейные неоднородные системы дифференциальных уравнений

Рассмотрим линейную неоднородную систему

$$\mathbf{Y}' - \mathbf{AY} = \mathbf{B}. \qquad (20.13)$$

Если известно общее решение соответствующей однородной системы

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{AY}, \qquad (20.14)$$

то можно найти общее решение неоднородной системы (20.13) изложенным ниже методом, который называют ***методом вариации постоянных***.

Пусть $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n$ – фундаментальная система решений линейной однородной системы (20.14). Тогда его общее решение будет иметь вид

$$\mathbf{Y} = C_1\mathbf{Y}_1 + C_2\mathbf{Y}_2 + \ldots + C_n\mathbf{Y}_n, \qquad (20.15)$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – произвольные постоянные.

Полагаем, что решение линейной неоднородной системы по структуре совпадает с решением соответствующей однородной системы, т. е. имеет вид

$$\mathbf{Y} = C_1(x)\mathbf{Y}_1 + C_2(x)\mathbf{Y}_2 + \ldots + C_n(x)\mathbf{Y}_n = \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\mathbf{Y}_i, \qquad (20.16)$$

где $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ – некоторые пока неизвестные функции. Тогда

$$\mathbf{Y}' = \sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\mathbf{Y}_i + \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\mathbf{Y}_i'.$$

Подставим $\mathbf{Y}$ и $\mathbf{Y}'$ в неоднородную систему $\mathbf{Y}' - \mathbf{AY} = \mathbf{B}$:

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\mathbf{Y}_i + \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\mathbf{Y}_i' - \mathbf{A}\cdot\sum_{i=1}^{n} C_i(x)\mathbf{Y}_i = \mathbf{B},$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\mathbf{Y}_i + \sum_{i=1}^{n} C_i(x)(\mathbf{Y}_i' - \mathbf{AY}_i) = \mathbf{B}.$$

Т.к. $\mathbf{Y}_i$ – решения однородной системы, то $\mathbf{Y}_i' - \mathbf{AY}_i = \mathbf{O}$ и, следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\mathbf{Y}_i = \mathbf{B},$$

или, более подробно,

$$\begin{cases} C_1'(x)y_{11} + C_2'(x)y_{21} + \ldots + C_n'(x)y_{n1} = b_1(x), \\ C_1'(x)y_{12} + C_2'(x)y_{22} + \ldots + C_n'(x)y_{n2} = b_2(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1'(x)y_{1n} + C_2'(x)y_{2n} + \ldots + C_n'(x)y_{nn} = b_n(x). \end{cases} \qquad (20.17)$$

Это линейная неоднородная система относительно неизвестных функций $C_i'(x)$. Ее определитель – определитель Вронского для системы линейно независимых решений $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n$, и, следовательно, он отличен от нуля. Значит система (20.7) имеет единственное решение

$$C_i'(x) = \varphi_i(x) \quad (i = \overline{1, n}),$$

откуда интегрированием находим

$$C_i(x) = \int \varphi_i(x)dx + C_i \quad (i = \overline{1, n}), \tag{20.18}$$

где C_i – произвольные постоянные.

Подставим найденные функции $C_i(x)$ в (20.16) и получим общее решение неоднородной системы (20.13):

$$\mathbf{Y} = \sum_{i=1}^{n} \left(\int \varphi_i(x)dx + C_i \right) \mathbf{Y}_i .$$

ПРИМЕР 20.3. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = -y_1 + \dfrac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Запишем соответствующую однородную систему

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -y_1 . \end{cases}$$

Из первого уравнения находим:

$$y_1'' = y_2' \quad \Rightarrow \quad y_1'' = -y_1 .$$

Получили линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами. Его характеристические корни $\lambda_{1,2} = \pm i$ и, следовательно, общее решение уравнения

$$y_1 = C_1 \cos x + C_2 \sin x .$$

Тогда из первого уравнения системы

$$y_2 = y_1' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x .$$

Таким образом, общее решение однородной системы имеет вид

$$\begin{cases} y_1 = C_1 \cos x + C_2 \sin x, \\ y_2 = -C_1 \sin x + C_2 \cos x \end{cases}$$

или, в матричном виде,

$$\mathbf{Y}_{oo} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \cos x + C_2 \sin x \\ -C_1 \sin x + C_2 \cos x \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}.$$

Полагаем, что общее решение неоднородной системы имеет вид

$$\mathbf{Y}_{он} = C_1(x)\begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + C_2(x)\begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$$

или, подробнее,

$$\begin{cases} y_1 = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x, \\ y_2 = -C_1(x)\sin x + C_2(x)\cos x. \end{cases}$$

Тогда функции $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$ должны удовлетворять системе (20.17)

$$\begin{cases} C_1'\cos x + C_2'\sin x = 0, \\ -C_1'\sin x + C_2'\cos x = \dfrac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

Решая систему по формулам Крамера, находим:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \dfrac{1}{\cos x} & \cos x \end{vmatrix} = -tgx, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \dfrac{1}{\cos x} \end{vmatrix} = 1,$$

$$\Rightarrow \quad C_1'(x) = -tgx, \qquad C_2'(x) = 1.$$

Интегрируя, получаем:

$$C_1(x) = \ln|\cos x| + C_1, \qquad C_2(x) = x + C_2.$$

Следовательно, общее решение неоднородной системы будет иметь вид

$$\mathbf{Y}_{он} = (\ln|\cos x| + C_1)\cdot\begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + (x + C_2)\cdot\begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix} =$$

$$= C_1\begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix}\cdot\ln|\cos x| + \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}\cdot x$$

или, подробнее,

$$\begin{cases} y_1 = C_1\cos x + C_2\sin x + \cos x\cdot\ln|\cos x| + x\sin x, \\ y_2 = -C_1\sin x + C_2\cos x - \sin x\cdot\ln|\cos x| + x\cos x. \end{cases} \quad \diamond$$

Замечание. Общее решение (20.18) линейной неоднородной системы (20.13) можно переписать в виде

$$\mathbf{Y} = \sum_{i=1}^{n} C_i\mathbf{Y}_i + \sum_{i=1}^{n}\left(\int \varphi_i(x)dx\right)\mathbf{Y}_i .$$

Здесь слагаемое $\sum\limits_{i=1}^{n} C_i\mathbf{Y}_i$ – общее решение соответствующей однородной системы, а слагаемое $\overline{\mathbf{Y}} = \sum\limits_{i=1}^{n}\left(\int \varphi_i(x)dx\right)\mathbf{Y}_i$ – частное решение системы (20.13) (получается из общего решения при $C_i = 0$ $(i = \overline{1,n})$).

В общем случае оказалась справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 20.7 (о структуре общего решения неоднородной системы дифференциальных уравнений). *Общее решение неоднородной системы*

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{B}$$

с непрерывными на $[a,b]$ *коэффициентами* $a_{ij}(x)$ *и правыми частями* $b_i(x)$, *равно сумме общего решения соответствующей однородной системы* $\mathbf{Y}' = \mathbf{A}\mathbf{Y}$ *и частного решения* $\overline{\mathbf{Y}}$ *рассматриваемой неоднородной системы, т. е.*

$$\boxed{\mathbf{Y} = \sum_{i=1}^{n} C_i \mathbf{Y_i} + \overline{\mathbf{Y}},} \tag{20.19}$$

где $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n$ *– фундаментальная система решений однородной системы* $\mathbf{Y}' = \mathbf{A}\mathbf{Y}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перейдем к операторному представлению систем:

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{B} \quad \leftrightarrow \quad L[\mathbf{Y}] = \mathbf{B},$$

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{A}\mathbf{Y} \quad \leftrightarrow \quad L[\mathbf{Y}] = \mathbf{O}.$$

По условию теоремы $\quad L[\overline{\mathbf{Y}}] = \mathbf{B}$, $L[\mathbf{Y_i}] = \mathbf{O}$.

Тогда, в силу линейности оператора L, имеем:

$$L\left(\sum_{i=1}^{n} C_i \mathbf{Y_i} + \overline{\mathbf{Y}}\right) = L\left(\sum_{i=1}^{n} C_i \mathbf{Y_i}\right) + L(\overline{\mathbf{Y}}) = \sum_{i=1}^{n} C_i L(\mathbf{Y_i}) + L(\overline{\mathbf{Y}}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} C_i \cdot \mathbf{O} + \mathbf{B} = \mathbf{B}. \ \blacksquare$$

Таким образом, задача нахождения общего решения неоднородной системы может быть сведена к нахождению одного частного решения этой системы и фундаментальной системы решений соответствующей однородной системы. В этом случае может оказаться полезной и следующая теорема.

ТЕОРЕМА 20.8 (о наложении решений). *Если* $\mathbf{Y_i}$ *– решения неоднородных систем* $\quad \mathbf{Y}' = \mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{B_i} \quad (i = \overline{1,m})$,

то их сумма $\mathbf{Y_1} + \mathbf{Y_2} + \ldots + \mathbf{Y_m}$ *является решением неоднородной системы*

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{A}\mathbf{Y} + (\mathbf{B_1} + \mathbf{B_2} + \ldots + \mathbf{B_m}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перейдем к операторному представлению систем:

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{B_i} \quad \leftrightarrow \quad L[\mathbf{Y}] = \mathbf{B_i},$$

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{A}\mathbf{Y} + \sum_{i=1}^{m} \mathbf{B_i} \quad \leftrightarrow \quad L[\mathbf{Y}] = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{B_i}.$$

По условию теоремы

$$L[\mathbf{Y_i}] = \mathbf{B_i} \quad (i = \overline{1,m}).$$

Тогда, в силу линейности оператора L, имеем:

$$L\left[\sum_{i=1}^{m}\mathbf{Y_i}\right] = \sum_{i=1}^{m}L[\mathbf{Y_i}] = \sum_{i=1}^{m}\mathbf{B_i}\,. \blacksquare$$

§ 21. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

21.1. Собственные значения и собственные векторы

В предыдущем параграфе мы использовали линейный дифференциальный оператор для компактной формы записи системы дифференциальных уравнений и доказательства некоторых теорем. Для дальнейшей работы нам необходимо вспомнить ряд понятий, связанных с линейными операторами. А именно, нам понадобятся понятия собственного вектора и собственного значения оператора конечномерных пространств.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ**.** *Пусть φ – оператор пространства L. Если для некоторого ненулевого вектора $x \in L$ и числа λ имеем $\varphi(x) = \lambda x$, то число λ называется собственным значением оператора φ, а вектор x называется собственным вектором оператора φ, относящимся к собственному значению λ.*

Укажем свойства, которыми обладают собственные векторы.

1. *Каждый собственный вектор x оператора φ относится к единственному собственному значению.*
2. *Если x_1 и x_2 – собственные векторы оператора φ, относящиеся к одному и тому же собственному значению λ, то их линейная комбинация $\alpha x_1 + \beta x_2$ – собственный вектор оператора φ, относящийся к тому же собственному значению.*

Из второго свойства следует:

а) каждому собственному значению λ соответствует *бесчисленное множество собственных векторов*;

б) если к множеству всех собственных векторов x оператора φ, относящихся к одному и тому же собственному значению λ, присоединить нулевой вектор (нулевой вектор по определению не является собственным), то получим подпространство пространства L. *Это подпространство называется* ***собственным подпространством оператора*** φ и обозначается L_λ.

3. *Собственные векторы* $x_1, x_2, \dots x_k$ *оператора* φ, *относящиеся к различным собственным значениям* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, *линейно независимы.*

Из свойства 3 следует, что *линейный оператор, действующий в* n*-мерном линейном пространстве* L_n, *не может иметь более* n *собственных значений*. Кроме того, *в пространстве может существовать базис, хотя бы часть которого – собственные векторы*.

Процесс поиска собственных значений и собственных векторов оператора конечномерного пространства на практике сводится к решению алгебраических уравнений и систем.

Действительно, предположим, что $\mathbf{A}$ – матрица оператора φ в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$, $\mathbf{X}$ – матрица-столбец координат вектора x в том же базисе. Тогда векторное равенство $\varphi(x) = \lambda x$ равносильно матричному равенству

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \lambda \mathbf{X} \quad \text{или} \quad (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{O}. \qquad (21.1)$$

Но матричное уравнение $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{O}$ представляет собой матричную запись системы n линейных однородных уравнений с n неизвестными.

Так как собственные векторы ненулевые, то система (21.1) должна иметь нетривиальные решения. Это будет иметь место, если

$$rang(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \neq n$$

или, что то же,

$$\boxed{\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = 0.}$$

Матрица $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}$ называется ***характеристической матрицей*** оператора φ (матрицы $\mathbf{A}$), а ее определитель $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})$, являющийся многочленом относительно λ – ***характеристическим многочленом*** оператора φ (матрицы $\mathbf{A}$).

Найдя корни характеристического многочлена, мы определим собственные значения. Подставив конкретное собственное значение в (21.1) и решив получившуюся систему, мы найдем относящиеся к нему собственные векторы.

ПРИМЕР 21.1. Найти собственные векторы и собственные значения оператора, имеющего в некотором базисе матрицу

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -5 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 15 & 12 \end{pmatrix}.$$

РЕШЕНИЕ. 1) Запишем характеристическую матрицу и найдем характеристический многочлен:

$$\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}=\begin{pmatrix} 2-\lambda & -5 & -3 \\ -1 & -2-\lambda & -3 \\ 3 & 15 & 12-\lambda \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow \quad |\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}|=(3-\lambda)(\lambda^2-9\lambda+18).$$

Корни характеристического многочлена (собственные значения):

$$\lambda_1=6, \quad \lambda_{2,3}=3.$$

2) Для каждого из найденных собственных значений λ_i запишем систему линейных однородных уравнений $(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{E})\mathbf{X}=\mathbf{O}$ и найдем ее фундаментальную систему решений. Это будут координаты базисных векторов собственного подпространства L_{λ_i}.

а) Для $\lambda_1=6$ имеем:

$$(\mathbf{A}-6\mathbf{E})\mathbf{X}=\begin{pmatrix} 2-6 & -5 & -3 \\ -1 & -2-6 & -3 \\ 3 & 15 & 12-6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\mathbf{O},$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -4 & -5 & -3 \\ -1 & -8 & -3 \\ 3 & 15 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} -4x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 0, \\ -x_1 - 8x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 15x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$$

Ранг матрицы системы равен 2, в качестве базисного минора можно выбрать, например, минор $\begin{vmatrix} -4 & -5 \\ -1 & -8 \end{vmatrix}$. Тогда переменные x_1, x_2 будут зависимыми, а x_3 – свободной. Отбрасываем третье уравнение системы и находим общее решение:

$$\begin{cases} -4x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 0, \\ -x_1 - 8x_2 - 3x_3 = 0; \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -4x_1 - 5x_2 = 3x_3, \\ -x_1 - 8x_2 = 3x_3; \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta=\begin{vmatrix} -4 & -5 \\ -1 & -8 \end{vmatrix}=27, \quad \Delta_1=\begin{vmatrix} 3x_3 & -5 \\ 3x_3 & -8 \end{vmatrix}=-9x_3, \quad \Delta_2=\begin{vmatrix} -4 & 3x_3 \\ -1 & 3x_3 \end{vmatrix}=-9x_3;$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}=-\dfrac{x_3}{3}, \\ x_2 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}=-\dfrac{x_3}{3}. \end{cases}$$

Фундаментальная система решений состоит из одного решения. Чтобы ее записать, придадим свободной переменной x_3 любое отличное от нуля значение. Например, полагаем $x_3 = -3$. Тогда из общего решения находим $$x_1 = 1, \quad x_2 = 1.$$

Итак, получили: $\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ – решение фундаментальной системы. Следовательно, базисом собственного подпространства $L_{\lambda=6}$ является вектор $$c_1 = 1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 - 3 \cdot e_3 = \{1;1;3\}.$$

$$\Rightarrow \quad L_{\lambda=6} = \{\alpha c_1 \,|\, \forall \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

б) Для $\lambda_{2,3} = 3$ имеем:

$$(\mathbf{A} - 3\mathbf{E})\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2-3 & -5 & -3 \\ -1 & -2-3 & -3 \\ 3 & 15 & 12-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{O},$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -5 & -3 \\ -1 & -5 & -3 \\ 3 & 15 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 0, \\ -x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 15x_2 + 9x_3 = 0. \end{cases}$$

Матрица системы имеет три пропорциональные строки и, следовательно, ее ранг равен 1. Выбирая в качестве зависимой переменной x_1 получаем, что ее общее решение имеет вид:

$$x_1 = -5x_2 - 3x_3.$$

Находим фундаментальную систему решений:

$$x_2 = 1, \; x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -5;$$

$$x_2 = 0, \; x_3 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -3.$$

Итак, получили: $\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{X}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ – решения фундаментальной системы. Следовательно, базисом собственного подпространства $L_{\lambda=3}$ являются векторы

$$c_2 = \{-5;1;0\} \quad \text{и} \quad c_3 = \{-3;0;1\}.$$

$$\Rightarrow \quad L_{\lambda=3} = \{\alpha c_2 + \beta c_3 \,|\, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}. \; \diamond$$

В заключение этого пункта заметим, что говорят также о ***собственных векторах матрицы*** $\mathbf{A}$ порядка n, имея при этом ввиду собственные векторы оператора n-мерного пространства, имеющего $\mathbf{A}$ своей матрицей в некотором базисе. Использование такой терминологии удобно в задачах, в которых на каком-то этапе решения возникает система линейных однородных уравнений $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})\mathbf{X}=\mathbf{O}$. В этом случае любое решение системы $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})\mathbf{X}=\mathbf{O}$ обычно называют собственным вектором матрицы $\mathbf{A}$, а ее фундаментальную систему решений – линейно независимыми собственными векторами матрицы $\mathbf{A}$.

21.2. Линейные однородные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Метод Эйлера

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dy_i}{dx}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_j+b_i(x) \quad (i=\overline{1,n}), \tag{21.2}$$

где коэффициенты a_{ij} – постоянные. Такие системы называют ***системами дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами*** и именно они имеют наибольшее практическое применение.

Систему (21.2) можно решить методом исключения. При этом получится линейное уравнение порядка n с постоянными коэффициентами. Мы умеем интегрировать такие дифференциальные уравнения. Проблема лишь в том, что процесс получения дифференциального уравнения порядка n довольно трудоемкий и требует аккуратности.

Другой способ – найти общее решение соответствующей однородной системы, а затем найти общее решение неоднородной системы методом вариации постоянных. Этот путь, как правило, менее трудоемкий, так как оказалось, что фундаментальная система решений линейной однородной системы с постоянными коэффициентами связана с собственными векторами ее матрицы. Именно установление этой связи и является целью нашего дальнейшего изложения. Нахождение фундаментальной системы решений с использованием собственных векторов матрицы называется ***методом Эйлера***.

Итак, рассмотрим линейную однородную систему с постоянными коэффициентами:

$$\frac{dy_i}{dx}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_j \quad (i=\overline{1,n}). \tag{21.3}$$

Вид уравнений системы (21.3) наводит на мысль, что решения следует искать прежде всего среди таких функций, производные которых «похожи» на сами функции. Среди элементарных функций таким свойством обладает показательная функция. Поэтому частные решения будем искать в виде

$$y_1 = d_1 e^{\lambda x},\ y_2 = d_2 e^{\lambda x},\ \dots,\ y_n = d_n e^{\lambda x}, \tag{21.4}$$

где $\lambda, d_1, d_2, \dots, d_n$ – неизвестные действительные числа, которые нужно выбрать так, чтобы функции (21.4) удовлетворяли системе (21.3).

Запишем систему (21.3) в матричном виде:

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{AY}, \tag{21.5}$$

где

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

По предположению,

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} d_1 e^{\lambda x} \\ d_2 e^{\lambda x} \\ \dots \\ d_n e^{\lambda x} \end{pmatrix} = e^{\lambda x}\mathbf{D}, \quad \text{где} \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \dots \\ d_n \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{Y}' = \begin{pmatrix} d_1 \lambda e^{\lambda x} \\ d_2 \lambda e^{\lambda x} \\ \dots \\ d_n \lambda e^{\lambda x} \end{pmatrix} = \lambda e^{\lambda x}\mathbf{D}.$$

Подставим $\mathbf{Y}$ и $\mathbf{Y}'$ в (21.5) и получим

$$\lambda \cdot e^{\lambda x}\mathbf{D} = \mathbf{A} \cdot (e^{\lambda x}\mathbf{D}) \quad \text{или} \quad \lambda \cdot \mathbf{D} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{D},$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{D} - \lambda \mathbf{D} = \mathbf{O},$$

$$\Rightarrow \quad (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \cdot \mathbf{D} = \mathbf{O}. \tag{21.6}$$

Матричное уравнение (21.6) представляет собой матричную запись системы n линейных однородных уравнений с n неизвестными. Чтобы такая система имела нетривиальные решения необходимо, чтобы

$$\boxed{\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = 0.}$$

Но это означает, что λ *должно является действительным характеристическим корнем* (*т. е. собственным значением*) *матрицы* $\mathbf{A}$, *а* $\mathbf{D}$ *– ее собственным вектором, относящимся к* λ.

Матрица $\mathbf{A}$ имеет n характеристических корней, но среди них могут быть комплексные и кратные. Рассмотрим ситуации, которые в связи с этим могут возникнуть.

I. *Характеристические корни матрицы* $\mathbf{A}$ *действительны и различны*

В этом случае для каждого характеристического корня λ_i $(i = \overline{1,n})$ найдем собственный вектор $\mathbf{D_i} = (d_{ji})$ и запишем решения $\mathbf{Y_i} = e^{\lambda_i x}\mathbf{D_i}$:

$$\mathbf{Y_1} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} d_{11} \\ e^{\lambda_1 x} d_{21} \\ \dots \\ e^{\lambda_1 x} d_{n1} \end{pmatrix},\ \mathbf{Y}_2 = \begin{pmatrix} e^{\lambda_2 x} d_{12} \\ e^{\lambda_2 x} d_{22} \\ \dots \\ e^{\lambda_2 x} d_{n2} \end{pmatrix}, \dots,\ \mathbf{Y}_n = \begin{pmatrix} e^{\lambda_n x} d_{1n} \\ e^{\lambda_n x} d_{2n} \\ \dots \\ e^{\lambda_n x} d_{nn} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим определитель Вронского этих решений. Имеем:

$$W[\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \dots, \mathbf{Y}_n] = \begin{vmatrix} d_{11}e^{\lambda_1 x} & d_{12}e^{\lambda_2 x} & \dots & d_{1n}e^{\lambda_n x} \\ d_{21}e^{\lambda_1 x} & d_{22}e^{\lambda_2 x} & \dots & d_{2n}e^{\lambda_n x} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n1}e^{\lambda_1 x} & d_{n2}e^{\lambda_2 x} & \dots & d_{nn}e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{\lambda_1 x} \cdot e^{\lambda_2 x} \cdot \ldots \cdot e^{\lambda_n x} \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Действительно, так как все собственные векторы $\mathbf{D_i}$ относятся к различным собственным значениям, то они линейно независимы, т. е. $\alpha_1\mathbf{D_1} + \alpha_2\mathbf{D_2} + \ldots + \alpha_n\mathbf{D_n} = \mathbf{O}$ только при условии, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$. Это означает, что система

$$\begin{cases} \alpha_1 d_{11} + \alpha_2 d_{12} + \ldots + \alpha_n d_{1n} = 0, \\ \alpha_1 d_{21} + \alpha_2 d_{22} + \ldots + \alpha_n d_{2n} = 0, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \dots \dots \quad \dots \quad \dots \dots \\ \alpha_1 d_{n1} + \alpha_2 d_{n2} + \ldots + \alpha_n d_{nn} = 0 \end{cases}$$

имеет единственное (тривиальное) решение и, следовательно, ее определитель

$$\begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Так как $W[\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \dots, \mathbf{Y}_n] \neq 0$, то решения $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \dots, \mathbf{Y}_n$ линейно независимы и образуют фундаментальную систему решений. Общее решение системы в этом случае имеет вид

$$\mathbf{Y} = C_1\mathbf{Y}_1 + C_2\mathbf{Y}_2 + \ldots + C_n\mathbf{Y}_n$$

или, подробнее,

$$\begin{cases} y_1 &= C_1 d_{11} e^{\lambda_1 x} + C_2 d_{12} e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n d_{1n} e^{\lambda_n x}, \\ y_2 &= C_1 d_{21} e^{\lambda_1 x} + C_2 d_{22} e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n d_{2n} e^{\lambda_n x}, \\ \ldots\ldots & \quad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad \ldots \\ y_n &= C_1 d_{n1} e^{\lambda_1 x} + C_2 d_{n2} e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n d_{nn} e^{\lambda_n x}. \end{cases}$$

ПРИМЕР 21.2. Найти общее решение системы:

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2, \\ y_2' = 4y_1 + 3y_2. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Данная система – линейная однородная с постоянными коэффициентами. Следовательно, ее общее решение может быть найдено методом Эйлера.

Матрица системы:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Запишем ее характеристическую матрицу и найдем характеристический многочлен:

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow \ \left| \mathbf{A} - \lambda\mathbf{E} \right| = \lambda^2 - 4\lambda - 5.$$

Найдем характеристические корни:

$$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0,$$

$$\Rightarrow \ \lambda_1 = 5, \ \lambda_2 = -1.$$

Характеристические корни являются собственными значениями матрицы $\mathbf{A}$. Найдем ее собственные векторы, относящиеся к каждому из собственных значений.

а) Для $\lambda_1 = 5$ имеем:

$$(\mathbf{A} - 5\mathbf{E})\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1-5 & 2 \\ 4 & 3-5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{O},$$

$$\Rightarrow \ \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -4x_1 + 2x_2 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 = 0. \end{cases}$$

$\Rightarrow \ x_2 = 2x_1$ – общее решение системы.

Фундаментальная система решений состоит из одного решения. Полагаем $x_1 = 1$ и находим это решение:

$$\mathbf{D_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Итак, получили, что $\mathbf{D_1}$ – собственный вектор матрицы $\mathbf{A}$, относящийся к собственному значению $\lambda_1 = 5$. Следовательно, решение системы дифференциальных уравнений:

$$\mathbf{Y_1} = e^{5x}\mathbf{D_1} = e^{5x}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{5x} \\ 2e^{5x} \end{pmatrix}.$$

б) Для $\lambda_2 = -1$ имеем:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{E})\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1+1 & 2 \\ 4 & 3+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{O},$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 0, \\ 4x_1 + 4x_2 = 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ x_2 = -x_1 \ \text{– общее решение системы.}$$

Фундаментальная система решений состоит из одного решения. Полагаем $x_1 = 1$ и находим это решение:

$$\mathbf{D_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Так как $\mathbf{D_2}$ – собственный вектор матрицы $\mathbf{A}$, относящийся к собственному значению $\lambda_2 = -1$, то решение системы дифференциальных уравнений:

$$\mathbf{Y_2} = e^{-x}\mathbf{D_2} = e^{-x}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-x} \\ -e^{-x} \end{pmatrix}.$$

Найденные таким образом решения $\mathbf{Y_1}$ и $\mathbf{Y_2}$ образуют фундаментальную систему решений и, следовательно, общее решение системы имеет вид

$$\mathbf{Y} = C_1\mathbf{Y_1} + C_2\mathbf{Y_2} = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}e^{5x} + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-x}$$

или, подробнее,

$$\begin{cases} y_1 = C_1e^{5x} + C_2e^{-x}, \\ y_2 = 2C_1e^{5x} - C_2e^{-x}. \end{cases} \ \diamond$$

II. *Характеристические корни матрицы* $\mathbf{A}$ *различны, но среди них есть комплексные*

Так как характеристический многочлен матрицы $\mathbf{A}$ имеет действительные коэффициенты, то комплексные корни будут появляться сопряженными парами. Пусть, например, характеристическими корнями являются числа $\lambda_1 = \alpha + \beta i, \quad \lambda_2 = \alpha - \beta i$.

Рассмотрим две системы n линейных однородных уравнений с n неизвестными:

$$(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{E})\cdot\mathbf{X}=\mathbf{O} \quad \text{и} \quad (\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{E})\cdot\mathbf{X}=\mathbf{O}.$$

В алгебре доказано, что если для них выбрать одни и те же переменные свободными и придать им сопряженные значения, то для зависимых переменных тоже получаться сопряженные значения.

Пусть $\mathbf{D}=(d_{j1})$ – решение системы $(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{E})\cdot\mathbf{X}=\mathbf{O}$. Тогда $\overline{\mathbf{D}}=(\overline{d}_{j1})$ – решение системы $(\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{E})\cdot\mathbf{X}=\mathbf{O}$. Рассмотрим матрицы-столбцы

$$\mathbf{Z_1}=e^{\lambda_1 x}\mathbf{D}=e^{(\alpha+i\beta)x}\mathbf{D}=e^{\alpha x}\cdot e^{i\beta x}\mathbf{D}=e^{\alpha x}\cdot(\cos\beta x+i\sin\beta x)\mathbf{D},$$

$$\mathbf{Z_2}=e^{\lambda_2 x}\overline{\mathbf{D}}=e^{(\alpha-i\beta)x}\overline{\mathbf{D}}=e^{\alpha x}\cdot e^{-i\beta x}\overline{\mathbf{D}}=e^{\alpha x}\cdot(\cos\beta x-i\sin\beta x)\overline{\mathbf{D}}.$$

В силу выбора $\mathbf{D}$ и $\overline{\mathbf{D}}$ эти матрицы-столбцы $\mathbf{Z_1}$ и $\mathbf{Z_2}$ будут удовлетворять матричному уравнению $\mathbf{Y}'=\mathbf{AY}$. Полагаем далее

$$\mathbf{Y_1}=\frac{1}{2}\left(\mathbf{Z_1}+\mathbf{Z_2}\right), \quad \mathbf{Y_2}=\frac{1}{2i}\left(\mathbf{Z_1}-\mathbf{Z_2}\right).$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что $\mathbf{Y_1}$ и $\mathbf{Y_2}$ состоят из действительных функций и тоже удовлетворяют матричному уравнению $\mathbf{Y}'=\mathbf{AY}$. Более того, можно доказать, что $\mathbf{Y_1}$ и $\mathbf{Y_2}$ линейно независимы и, следовательно, могут быть включены в фундаментальную систему решений.

Замечание. На практике матрицу-столбец $\mathbf{Z_2}$ не записывают, так как $\mathbf{Z_2}=\overline{\mathbf{Z}}_\mathbf{1}$. Действительно,

$$\overline{\mathbf{Z}}_\mathbf{1}=\overline{e^{\alpha x}\cdot(\cos\beta x+i\sin\beta x)\mathbf{D}}=\overline{e^{\alpha x}\cdot(\cos\beta x+i\sin\beta x)}\cdot\overline{\mathbf{D}}=$$
$$=e^{\alpha x}\cdot(\cos\beta x-i\sin\beta x)\cdot\overline{\mathbf{D}}=\mathbf{Z_2}.$$

Следовательно, $$\mathbf{Y_1}=\frac{1}{2}\left(\mathbf{Z_1}+\overline{\mathbf{Z}}_\mathbf{1}\right)=\operatorname{Re}\mathbf{Z_1},$$
$$\mathbf{Y_2}=\frac{1}{2i}\left(\mathbf{Z_1}-\overline{\mathbf{Z}}_\mathbf{1}\right)=\operatorname{Im}\mathbf{Z_1}.$$

ПРИМЕР 21.3. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} y_1'=y_1-y_2-y_3, \\ y_2'=y_1+y_2, \\ y_3'=3y_1+y_3. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Так как данная система – линейная однородная с постоянными коэффициентами, то ее общее решение может быть найдено методом Эйлера.

1) Матрица системы: $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&1&0\\3&0&1\end{pmatrix}$.

Запишем ее характеристическую матрицу и найдем характеристический многочлен:

$$\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}=\begin{pmatrix}1-\lambda&-1&-1\\1&1-\lambda&0\\3&0&1-\lambda\end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow\ \left|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}\right|=(1-\lambda)[(1-\lambda)^2+4].$$

Найдем характеристические корни:

$$(1-\lambda)[(1-\lambda)^2+4]=0,$$

$$\Rightarrow\ \lambda_1=1,\ \lambda_{2,3}=1\pm 2i.$$

2) Действительный корень $\lambda_1=1$ является собственным значением матрицы $\mathbf{A}$. Найдем собственный вектор матрицы, относящийся к этому собственному значению. Имеем:

$$(\mathbf{A}-\mathbf{E})\mathbf{X}=\begin{pmatrix}1-1&-1&-1\\1&1-1&0\\3&0&1-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\mathbf{O},$$

$$\Rightarrow\ \begin{pmatrix}0&-1&-1\\1&0&0\\3&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\quad\text{или}\quad\begin{cases}-x_2-x_3=0,\\ x_1=0,\\ 3x_1=0.\end{cases}$$

Ранг матрицы системы равен 2, в качестве базисного минора можно выбрать, например, минор $\begin{vmatrix}0&-1\\1&0\end{vmatrix}$. Тогда переменные x_1,x_2 будут зависимыми, а x_3 свободной. Общее решение при этом будет иметь вид:

$$\begin{cases}x_2=-x_3,\\ x_1=0.\end{cases}$$

Фундаментальная система решений состоит из одного решения. Полагаем $x_3=1$ и находим его:

$$\mathbf{D_1}=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

Итак, получили, что $\mathbf{D_1}$ – собственный вектор матрицы $\mathbf{A}$, относящийся к собственному значению $\lambda_1 = 1$. Следовательно, решение системы дифференциальных уравнений:

$$\mathbf{Y_1} = e^x \mathbf{D_1} = e^x \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -e^x \\ e^x \end{pmatrix}.$$

3) Возьмем один из комплексных корней, например $\lambda_2 = 1 + 2i$, и найдем фундаментальную систему решений системы $(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{O}$. Имеем:

$$(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{E})\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1-(1+2i) & -1 & -1 \\ 1 & 1-(1+2i) & 0 \\ 3 & 0 & 1-(1+2i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{O},$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -2i & -1 & -1 \\ 1 & -2i & 0 \\ 3 & 0 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -2ix_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - 2ix_2 = 0, \\ 3x_1 - 2ix_3 = 0. \end{cases}$$

Ранг матрицы системы равен 2, в качестве базисного минора можно выбрать, например, минор $\begin{vmatrix} -2i & 0 \\ 0 & -2i \end{vmatrix}$. Тогда переменные x_2, x_3 будут зависимыми, а x_1 свободной. Общее решение при этом будет иметь вид:

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{x_1}{2i}, \\ x_3 = \dfrac{3x_1}{2i}. \end{cases}$$

Фундаментальная система решений состоит из одного решения. Полагаем $x_3 = 2i$ и находим его:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Тогда $$\mathbf{Z} = e^{(1+2i)x} \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = e^x \cdot (\cos 2x + i \sin 2x) \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow \mathbf{Z} = e^x \cdot \begin{pmatrix} -2\sin 2x + i \cdot 2\cos 2x \\ \cos 2x + i \cdot \sin 2x \\ 3\cos 2x + i \cdot 3\sin 2x \end{pmatrix} = e^x \cdot \begin{pmatrix} -2\sin 2x \\ \cos 2x \\ 3\cos 2x \end{pmatrix} + ie^x \cdot \begin{pmatrix} 2\cos 2x \\ \sin 2x \\ 3\sin 2x \end{pmatrix}$$

Откуда находим

$$\mathbf{Y_1} = \operatorname{Re}\mathbf{Z} = e^x \cdot \begin{pmatrix} -2\sin 2x \\ \cos 2x \\ 3\cos 2x \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{Y_2} = \operatorname{Im}\mathbf{Z} = e^x \cdot \begin{pmatrix} 2\cos 2x \\ \sin 2x \\ 3\sin 2x \end{pmatrix}.$$

Найденные таким образом решения $\mathbf{Y_1}, \mathbf{Y_2}, \mathbf{Y}_3$ образуют фундаментальную систему решений и, следовательно, общее решение системы имеет вид

$$\mathbf{Y} = C_1\mathbf{Y_1} + C_2\mathbf{Y_2} + C_3\mathbf{Y_3} =$$
$$= C_1 e^x \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^x \begin{pmatrix} -2\sin 2x \\ \cos 2x \\ 3\cos 2x \end{pmatrix} + C_3 e^x \cdot \begin{pmatrix} 2\cos 2x \\ \sin 2x \\ 3\sin 2x \end{pmatrix}$$

или, подробнее,

$$\begin{cases} y_1 = -2C_2 e^x \sin 2x + 2C_3 e^x \cos 2x, \\ y_2 = -C_1 e^x + C_2 e^x \cos 2x + C_3 e^x \sin 2x, \\ y_3 = C_1 e^x + 3C_2 e^x \cos 2x + 3C_3 e^x \sin 2x. \end{cases} \diamond$$

III. *Характеристические корни матрицы* $\mathbf{A}$ *действительны, но среди них есть кратные*

Пусть λ – действительный характеристический корень матрицы $\mathbf{A}$ кратности ℓ, $r = rang(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})$. Возможны два случая.

$\boxed{\mathbf{1)}\ \boldsymbol{n - r = \ell}.}$

В этом случае фундаментальная система решений системы линейных однородных уравнений $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{O}$ состоит из ℓ решений. Следовательно, существуют ℓ линейно независимых собственных векторов $\mathbf{D_1}, \mathbf{D_2}, \ldots, \mathbf{D}_\ell$ матрицы $\mathbf{A}$, относящихся к собственному значению λ. Тогда решения системы дифференциальных уравнений

$$\mathbf{Y_1} = e^{\lambda x}\mathbf{D_1},\ \mathbf{Y_2} = e^{\lambda x}\mathbf{D_2},\ \ldots,\ \mathbf{Y}_\ell = e^{\lambda x}\mathbf{D}_\ell$$

линейно независимы и входят в фундаментальную систему решений этой системы.

$\boxed{\mathbf{2)}\ \boldsymbol{n - r \neq \ell}}$ (точнее, $n - r < \ell$, случай $n - r > \ell$ вообще невозможен из алгебраических соображений).

Тогда фундаментальная система решений системы линейных однородных уравнений $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{O}$ состоит из $k < \ell$ решений. С их помощью мы сможем получить k линейно независимых решений системы дифференциальных уравнений. В такой ситуации существует два возможных способа найти все решения.

Первый способ – искать ℓ решений вида

$$\mathbf{Y}=e^{\lambda x}\begin{pmatrix} a_{10} & + & a_{11}x & + & \ldots & + & a_{1,\ell-1}x^{\ell-1} \\ a_{20} & + & a_{21}x & + & \ldots & + & a_{2,\ell-1}x^{\ell-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n0} & + & a_{n1}x & + & \ldots & + & a_{n,\ell-1}x^{\ell-1} \end{pmatrix},$$

где коэффициенты многочленов a_{ij} находят, подставляя $\mathbf{Y}$ в исходную систему.

ПРИМЕР 21.4. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2, \\ y_2' = y_1 + 3y_2. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Так как система – линейная однородная с постоянными коэффициентами, то ее общее решение может быть найдено методом Эйлера.

Матрица системы: $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$

Запишем ее характеристическую матрицу и найдем характеристический многочлен:

$$\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}=\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow\ \left|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}\right| = \lambda^2-4\lambda+4.$$

Найдем характеристические корни:

$$\lambda^2-4\lambda+4=0, \quad \Rightarrow\ \lambda_{1,2}=2.$$

Итак, имеем характеристический корень кратности $\ell=2$. При этом $r=rang(\mathbf{A}-2\mathbf{E})=1$ (т. к. $\left|\mathbf{A}-2\mathbf{E}\right|=0$). Следовательно,

$$n-r=2-1=1 \quad \text{и} \quad n-r<\ell.$$

Будем искать решения системы в виде

$$\mathbf{Y}=e^{2x}\begin{pmatrix} a & + & bx \\ c & + & dx \end{pmatrix},$$

т. е. полагаем

$$y_1=(a+bx)e^{2x}, \quad y_2=(c+dx)e^{2x}.$$

Тогда

$$y_1'=(2a+2bx+b)e^{2x}, \quad y_2'=(2c+2dx+d)e^{2x}.$$

Подставим y_1, y_2, y_1', y_2' в исходную систему и получим:

$$\begin{cases} (2a+b+2bx)e^{2x}=(a+bx-c-dx)e^{2x}, \\ (2c+d+2dx)e^{2x}=(a+bx+3c+3dx)e^{2x} \end{cases}$$

или, после сокращения на e^{2x}:

$$\begin{cases} 2a+b+2bx = a+bx-c-dx, \\ 2c+d+2dx = a+bx+3c+3dx; \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a+b+c)+(b+d)x = 0, \\ (-a-c+d)-(b+d)x = 0. \end{cases}$$

Приравнивая коэффициенты при равных степенях *x,* получим:

$$\begin{cases} a+b+c=0, \\ -a-c+d=0, \\ -b-d=0, \\ b+d=0. \end{cases}$$

Или, после преобразований:

$$\begin{cases} a+b+c=0, \\ b+d=0. \end{cases}$$

Ранг матрицы системы равен 2, в качестве базисного минора можно выбрать, например, минор $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$. Тогда переменные a, b будут зависимыми, c и d – свободными. Общее решение при этом будет иметь вид:

$$\begin{cases} a = d-c, \\ b = -d. \end{cases}$$

Находим фундаментальную систему решений:

$$d=1,\ c=0 \quad \Rightarrow \quad a=1,\ b=-1;$$

$$d=0,\ c=1 \quad \Rightarrow \quad a=-1,\ b=0.$$

Первое из решений фундаментальной системы ($a=1$, $b=-1$, $c=0$, $d=1$) дает для системы дифференциальных уравнений решение

$$\mathbf{Y_1} = e^{2x}\begin{pmatrix} 1-x \\ x \end{pmatrix},$$

второе решение из фундаментальной системы ($a=-1$, $b=0$, $c=1$, $d=0$) дает решение

$$\mathbf{Y}_2 = e^{2x}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Найденные таким образом решения $\mathbf{Y_1}$, $\mathbf{Y_2}$ образуют фундаментальную систему решений и, следовательно, общее решение системы имеет вид:

$$\mathbf{Y} = C_1\mathbf{Y}_1 + C_2\mathbf{Y_2} = C_1e^{2x}\begin{pmatrix} 1-x \\ x \end{pmatrix} + C_2e^{2x}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \ \diamond$$

Как показывает рассмотренный пример, чтобы найти решения для системы дифференциальных уравнений второго порядка, нам пришлось решать алгебраическую систему из четырех уравнений с четырьмя неизвестными. А если порядок исходной системы будет 3, то алгебраическая система будет содержать в лучшем случае шесть уравнений и шесть неизвестных (а в худшем – девять уравнений и неизвестных). И хотя мы в каждом случае точно знаем количество свободных переменных (их количество совпадает с кратностью корня), задача получается трудоемкая.

Второй способ решения – найти k линейно независимых решений системы дифференциальных уравнений, а недостающие $\ell-k$ решений искать в виде

$$\mathbf{Y_{k+1}}=e^{\lambda x}(\mathbf{D_{k}}_{+1,0}+\mathbf{D_{k}}_{+1,1}x),$$

$$\mathbf{Y_{k+2}}=e^{\lambda x}\left(\mathbf{D_{k+2}}_{,0}+\mathbf{D_{k}}_{+2,1}x+\mathbf{D_{k}}_{+2,2}\cdot\frac{x^2}{2}\right),$$

$$\mathbf{Y_{k+3}}=e^{\lambda x}\left(\mathbf{D_{k}}_{+3,0}+\mathbf{D_{k}}_{+3,1}x+\mathbf{D_{k}}_{+3,2}\cdot\frac{x^2}{2}+\mathbf{D_{k}}_{+3,3}\cdot\frac{x^3}{3}\right) \text{ и т.д.}$$

Здесь $\mathbf{D_{ij}}$ – числовые матрицы-столбцы, определяемые так, чтобы $\mathbf{Y_i}$ были решениями системы дифференциальных уравнений.

На первый взгляд кажется, что этот способ такой же трудоемкий, как и предыдущий. Но на самом деле это не так. Рассмотрим его применительно к системам дифференциальных уравнений 3-го порядка, т. е. к системам вида

$$\mathbf{Y}'=\mathbf{AY}, \tag{21.7}$$

где $\mathbf{A}=(a_{ij})$ – матрица третьего порядка, $a_{ij}\in\mathbb{R}$.

Число характеристических корней матрицы совпадает с ее порядком, следовательно, если матрица $\mathbf{A}$ имеет кратный характеристический корень λ, то его кратность ℓ равна двум или трем. Рассмотрим каждый из этих случаев.

$\boxed{\textbf{а) Пусть } \ell=2,\ n-r=1.}$

В этом случае матрица $\mathbf{A}$ имеет один линейно независимый собственный вектор $\mathbf{D_1}$, относящийся к собственному значению λ и, следовательно, $\mathbf{Y_1}=e^{\lambda x}\mathbf{D_1}$ – решение системы (21.7). Еще одно решение системы дифференциальных уравнений будем искать в виде

$$\mathbf{Y_2}=e^{\lambda x}(\mathbf{D_{20}}+\mathbf{D_{21}}x).$$

Тогда $$\mathbf{Y_2'}=e^{\lambda x}(\lambda\mathbf{D_{20}}+\lambda\mathbf{D_{21}}x+\mathbf{D_{21}})$$

и, подставляя $\mathbf{Y_2}$ и $\mathbf{Y_2'}$ в (21.7), получаем:

$$e^{\lambda x}(\lambda\mathbf{D}_{20} + \lambda\mathbf{D_{21}}x + \mathbf{D_{21}}) = \mathbf{A}\cdot e^{\lambda x}(\mathbf{D_{20}} + \mathbf{D_{21}}x).$$

После преобразований будем иметь:

$$\lambda\mathbf{D_{20}} + \mathbf{D}_{21} + \lambda\mathbf{D_{21}}x = \mathbf{AD}_{20} + \mathbf{AD_{21}}x.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, находим:

$$\begin{cases} \lambda\mathbf{D_{21}} = \mathbf{AD_{21}}, \\ \lambda\mathbf{D_{20}} + \mathbf{D_{21}} = \mathbf{AD_{20}} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \mathbf{AD_{21}} - \lambda\mathbf{D_{21}} = \mathbf{O}, \\ \mathbf{AD_{20}} - \lambda\mathbf{D_{20}} = \mathbf{D_{21}}. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{D_{21}} = \mathbf{O}, \\ (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{D_{20}} = \mathbf{D_{21}}. \end{cases} \qquad (21.8)$$

Первое уравнение системы (21.8) означает, что $\mathbf{D_{21}}$ – собственный вектор матрицы $\mathbf{A}$, относящийся к собственному значению λ и, следовательно, можем полагать $\mathbf{D_{21}} = \mathbf{D_1}$. Тогда второе уравнение системы (21.8) перепишется в виде:

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{D_{20}} = \mathbf{D_1},$$

т. е. в качестве $\mathbf{D_{20}}$ можно взять любое решение системы линейных уравнений $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{D_1}$.

Таким образом, *если* $\ell = 2$ и $n - r = 1$, *то рассматриваемая система* (21.7) *имеет решения*

$$\boxed{\mathbf{Y_1} = e^{\lambda x}\mathbf{D_1} \;\text{ и }\; \mathbf{Y_2} = e^{\lambda x}(\mathbf{D}_{20} + \mathbf{D}_1 x),} \qquad (21.9)$$

где $\mathbf{D_1}$ – *собственный вектор матрицы* $\mathbf{A}$*, относящийся к собственному значению* λ;

$\mathbf{D_{20}}$ – *любое решение системы линейных уравнений* $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{D_1}$.

Найденные таким образом решения $\mathbf{Y_1}$ и $\mathbf{Y}_2$ входят в фундаментальную систему решений, так как они линейно независимы.

Действительно, рассматривая

$$\alpha\mathbf{Y_1} + \beta\mathbf{Y_2} = \mathbf{O},$$

получаем
$$(\alpha\mathbf{D_1} + \beta\mathbf{D_{20}}) + \beta\mathbf{D_1}x = \mathbf{O},$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta\mathbf{D_1} = \mathbf{O}, \\ \alpha\mathbf{D_1} + \beta\mathbf{D_{20}} = \mathbf{O}. \end{cases}$$

По определению собственного вектора $\mathbf{D_1} \neq \mathbf{O}$. Тогда из этой системы находим
$$\alpha = \beta = 0.$$

А это означает, что $\mathbf{Y_1}$ и $\mathbf{Y}_2$ – линейно независимы.

Замечание. При получении формул (21.9) нигде не использовался тот факт, что система дифференциальных уравнений третьего порядка. Следовательно, они останутся справедливыми и для линейной однородной системы порядка n.

ПРИМЕР 21.5. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2, \\ y_2' = y_1 + 3y_2. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Так как система – линейная однородная с постоянными коэффициентами, то ее общее решение может быть найдено методом Эйлера.

1) Матрица системы:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ее характеристическая матрица:

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}.$$

Тогда
$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| = \lambda^2 - 4\lambda + 4,$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = 2.$$

Итак, имеем характеристический корень кратности $\ell = 2$. При этом $r = rang(\mathbf{A} - 2\mathbf{E}) = 1$ (т. к. $|\mathbf{A} - 2\mathbf{E}| = 0$). Следовательно,

$$n - r = 2 - 1 = 1$$

и для нахождения решений можно воспользоваться формулами (21.9).

2) Найдем собственный вектор матрицы $\mathbf{A}$, относящийся к собственному значению $\lambda = 2$. Имеем:

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{E})\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1-2 & -1 \\ 1 & 3-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{O},$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -x_1 - x_2 = 0, \\ x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = -x_2 \text{ – общее решение системы.}$$

Фундаментальная система решений состоит из одного решения. Полагаем $x_2 = 1$ и находим это решение:

$$\mathbf{D_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, получили, что $\mathbf{D_1}$ – собственный вектор матрицы $\mathbf{A}$, относящийся к собственному значению $\lambda = 2$. Следовательно, решение системы дифференциальных уравнений:

$$\mathbf{Y_1} = e^{2x}\mathbf{D_1} = e^{2x}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{2x} \\ e^{2x} \end{pmatrix}.$$

3) Второе решение системы дифференциальных уравнений найдем в виде
$$\mathbf{Y_2} = e^{2x}(\mathbf{D}_{20} + \mathbf{D}_1 x),$$
где $\mathbf{D_{20}}$ – любое решение системы линейных уравнений $(\mathbf{A} - 2\mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{D_1}$. Имеем:
$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{E})\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1-2 & -1 \\ 1 & 3-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{D_1},$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -x_1 - x_2 = -1, \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$
$$\Rightarrow \; x_1 = 1 - x_2 \text{ – общее решение системы.}$$

Полагаем $x_2 = 0$ и находим частное решение:
$$\mathbf{D_{20}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Подставляем $\mathbf{D_1}$ и $\mathbf{D_{20}}$ в $\mathbf{Y_2}$ и получаем:
$$\mathbf{Y_2} = e^{2x}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} x\right] = e^{2x}\begin{pmatrix} 1-x \\ x \end{pmatrix}.$$

Найденные таким образом решения $\mathbf{Y_1}$, $\mathbf{Y_2}$ образуют фундаментальную систему и, следовательно, общее решение системы имеет вид:
$$\mathbf{Y} = C_1\mathbf{Y}_1 + C_2\mathbf{Y_2} = C_1 e^{2x}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2x}\begin{pmatrix} 1-x \\ x \end{pmatrix}. \; \diamond$$

$\boxed{\textbf{б) Пусть } \ell = 3, \; n - r = 1.}$

В этом случае матрица $\mathbf{A}$ имеет один линейно независимый собственный вектор $\mathbf{D_1}$, относящийся к собственному значению λ и, следовательно, $\mathbf{Y_1} = e^{\lambda x}\mathbf{D_1}$ – решение системы (21.7). Необходимо найти еще два решения. Второе решение системы дифференциальных уравнений будем искать в виде
$$\mathbf{Y_2} = e^{\lambda x}(\mathbf{D}_{20} + \mathbf{D}_{21}x).$$

Условия, которым при этом будут удовлетворять $\mathbf{D_{20}}$ и $\mathbf{D_{21}}$ были нами уже получены ранее. А именно, $\mathbf{D_{21}}$ будет собственным вектором матрицы $\mathbf{A}$, относящимся к собственному значению λ, и, следовательно, можно считать $\mathbf{D_{21}} = \mathbf{D_1}$; $\mathbf{D_{20}}$ – любое решение системы линейных уравнений $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{D_1}$.

Третье решение системы запишем в виде
$$\mathbf{Y_3} = e^{\lambda x}\left(\mathbf{D}_{30} + \mathbf{D}_{31}x + \mathbf{D}_{32} \cdot \frac{x^2}{2}\right).$$

Тогда

$$\mathbf{Y}_3' = e^{\lambda x}\left(\lambda\,\mathbf{D}_{30} + \lambda\,\mathbf{D}_{31}x + \lambda\,\mathbf{D}_{32}\cdot\frac{x^2}{2} + \mathbf{D}_{31} + \mathbf{D}_{32}x\right)$$

и, подставляя $\mathbf{Y_3}$ и $\mathbf{Y_3'}$ в (21.7), получаем:

$$e^{\lambda x}\left(\lambda\mathbf{D}_{30} + \lambda\mathbf{D}_{31}x + \lambda\mathbf{D}_{32}\cdot\frac{x^2}{2} + \mathbf{D}_{31} + \mathbf{D}_{32}x\right) = \mathbf{A}\cdot e^{\lambda x}\left(\mathbf{D}_{30} + \mathbf{D}_{31}x + \mathbf{D}_{32}\cdot\frac{x^2}{2}\right).$$

После преобразований будем иметь:

$$\left(\lambda\,\mathbf{D}_{30} + \mathbf{D}_{31}\right) + \left(\lambda\,\mathbf{D}_{31} + \mathbf{D}_{32}\right)x + \lambda\,\mathbf{D}_{32}\cdot\frac{x^2}{2} = \mathbf{AD}_{30} + \mathbf{AD}_{31}x + \mathbf{AD}_{32}\cdot\frac{x^2}{2}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, находим:

$$\begin{cases} \lambda\mathbf{D}_{32} = \mathbf{AD_{32}}, \\ \lambda\mathbf{D_{31}} + \mathbf{D_{32}} = \mathbf{AD_{31}}, \\ \lambda\mathbf{D_{30}} + \mathbf{D_{31}} = \mathbf{AD_{30}}; \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathbf{AD_{32}} - \lambda\mathbf{D_{32}} = \mathbf{O}, \\ \mathbf{AD_{31}} - \lambda\mathbf{D_{31}} = \mathbf{D_{32}}, \\ \mathbf{AD_{30}} - \lambda\mathbf{D_{30}} = \mathbf{D_{31}}; \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{D_{32}} = \mathbf{O}, \\ (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{D_{31}} = \mathbf{D_{32}}, \\ (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{D_{30}} = \mathbf{D_{31}}. \end{cases} \qquad (21.10)$$

Первое уравнение системы (21.10) означает, что $\mathbf{D_{32}}$ – собственный вектор матрицы $\mathbf{A}$, относящийся к собственному значению λ и, следовательно, можем полагать $\mathbf{D_{32}} = \mathbf{D_1}$. Тогда второе уравнение системы (21.10) перепишется в виде:

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{D_{31}} = \mathbf{D_1},$$

т. е. в качестве $\mathbf{D_{31}}$ можно взять любое решение системы линейных уравнений $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{D_1}$. Так как $\mathbf{D_{20}}$ тоже является решением этой системы, то можем полагать

$$\mathbf{D_{31}} = \mathbf{D_{20}}.$$

С учетом этого, третье уравнение системы (21.10) перепишется в виде:

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{D_{30}} = \mathbf{D_{20}},$$

т. е. в качестве $\mathbf{D_{30}}$ можно взять любое решение системы линейных уравнений $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{D_{20}}$.

Таким образом, *если* $\ell = 3$ и $n - r = 1$, *то рассматриваемая система* (21.7) *имеет решения*

$$\boxed{\mathbf{Y_1} = e^{\lambda x}\mathbf{D_1}\,,\ \mathbf{Y_2} = e^{\lambda x}(\mathbf{D}_{20} + \mathbf{D}_1 x)\,,\ \mathbf{Y_3} = e^{\lambda x}\left(\mathbf{D}_{30} + \mathbf{D_{20}}x + \mathbf{D_1}\cdot\frac{x^2}{2}\right),} \quad (21.11)$$

где $\mathbf{D_1}$ – *собственный вектор матрицы* $\mathbf{A}$*, относящийся к собственному значению* λ;

$\mathbf{D_{20}}$ – *любое решение системы линейных уравнений* $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{D_1}$;

$\mathbf{D_{30}}$ – *любое решение системы линейных уравнений* $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{D_{20}}$.

При этом легко доказать, что найденные таким образом решения $\mathbf{Y_1}, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Y}_3$ будут линейно независимыми.

> *Замечание.* При получении формул (21.11) нигде не использовался тот факт, что система дифференциальных уравнений третьего порядка. Следовательно, они останутся справедливыми и для линейной однородной системы порядка n.

ПРИМЕР 21.6. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - 3y_2 + 3y_3, \\ y_2' = -2y_1 - 6y_2 + 13y_3, \\ y_3' = -y_1 - 4y_2 + 8y_3. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Система является линейной однородной с постоянными коэффициентами. Следовательно, ее общее решение может быть найдено методом Эйлера.

1) Матрица системы:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Ее характеристическая матрица:

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ -2 & -6-\lambda & 13 \\ -1 & -4 & 8-\lambda \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$|\,\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}\,| = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1 = -(\lambda - 1)^3,$$

$$\Rightarrow\ \lambda_{1,2,3} = 1.$$

Итак, имеем характеристический корень кратности $\ell = 3$. При этом

$$\mathbf{A}-1\cdot\mathbf{E}=\begin{pmatrix}1-1 & -3 & 3\\ -2 & -6-1 & 13\\ -1 & -4 & 8-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -3 & 3\\ -2 & -7 & 13\\ -1 & -4 & 7\end{pmatrix},$$

$$\begin{vmatrix}0 & -3\\ -2 & -7\end{vmatrix}\neq 0 \quad \Rightarrow \quad r=rang(\mathbf{A}-\mathbf{E})=2.$$

Следовательно, $\qquad n-r=3-2=1$

и для нахождения решений можно воспользоваться формулами (21.11).

2) Найдем собственный вектор матрицы $\mathbf{A}$, относящийся к собственному значению $\lambda=1$. Имеем:

$$(\mathbf{A}-\mathbf{E})\mathbf{X}=\begin{pmatrix}0 & -3 & 3\\ -2 & -7 & 13\\ -1 & -4 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\mathbf{O},$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}0 & -3 & 3\\ -2 & -7 & 13\\ -1 & -4 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -3x_2+3x_3=0,\\ -2x_1-7x_2+13x_3=0,\\ -x_1-4x_2+7x_3=0.\end{cases}$$

Как уже указывали выше, ранг матрицы системы равен 2 и в качестве базисного минора можно выбрать, например, минор $\begin{vmatrix}0 & -3\\ -2 & -7\end{vmatrix}$. Тогда переменные x_1, x_2 будут зависимыми, а x_3 свободной. Отбрасываем третье уравнение системы и находим общее решение:

$$\begin{cases} -3x_2+3x_3=0,\\ -2x_1-7x_2+13x_3=0;\end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 3x_2=3x_3,\\ 2x_1+7x_2=13x_3;\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2=x_3,\\ x_1=3x_3\end{cases} \text{ – общее решение.}$$

Фундаментальная система решений состоит из одного решения. Полагаем $x_3=1$ и находим это решение:

$$\mathbf{D_1}=\begin{pmatrix}3\\ 1\\ 1\end{pmatrix}.$$

Итак, получили, что $\mathbf{D_1}$ – собственный вектор матрицы $\mathbf{A}$, относящийся к собственному значению $\lambda=1$. Следовательно, решение системы дифференциальных уравнений:

$$\mathbf{Y_1}=e^x\mathbf{D_1}=e^x\begin{pmatrix}3\\ 1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3e^x\\ e^x\\ e^x\end{pmatrix}.$$

3) Второе решение системы дифференциальных уравнений будем искать в виде $\mathbf{Y_2} = e^x(\mathbf{D}_{20} + \mathbf{D}_1 x)$,

где $\mathbf{D_{20}}$ – любое решение системы линейных уравнений $(\mathbf{A}-\mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{D_1}$. Имеем:

$$(\mathbf{A}-\mathbf{E})\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -2 & -7 & 13 \\ -1 & -4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{D_1},$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -2 & -7 & 13 \\ -1 & -4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -3x_2 + 3x_3 = 3, \\ -2x_1 - 7x_2 + 13x_3 = 1, \\ -x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 1. \end{cases}$$

Выбирая переменные x_1, x_2 зависимыми, а x_3 свободной, получаем общее решение

$$\begin{cases} x_2 = -1 + x_3, \\ x_1 = 3 + 3x_3. \end{cases}$$

Полагаем $x_3 = 0$ и находим частное решение:

$$\mathbf{D_{20}} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Подставляем $\mathbf{D_1}$ и $\mathbf{D_{20}}$ в $\mathbf{Y_2}$ и получаем:

$$\mathbf{Y_2} = e^x\left[\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}x\right] = e^x\begin{pmatrix} 3+3x \\ -1+x \\ x \end{pmatrix}.$$

4) Третье решение системы дифференциальных уравнений найдем в виде $\mathbf{Y_3} = e^{\lambda x}\left(\mathbf{D}_{30} + \mathbf{D_{20}}x + \mathbf{D_1}\cdot\dfrac{x^2}{2}\right)$,

где $\mathbf{D}_{30}$ – любое решение системы линейных уравнений $(\mathbf{A}-\mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{D_{20}}$.

Имеем:

$$(\mathbf{A}-\mathbf{E})\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -2 & -7 & 13 \\ -1 & -4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{D_{20}},$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -2 & -7 & 13 \\ -1 & -4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -3x_2 + 3x_3 = 3, \\ -2x_1 - 7x_2 + 13x_3 = -1, \\ -x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 0. \end{cases}$$

Выбирая переменные x_1, x_2 зависимыми, а x_3 – свободной, получаем общее решение

$$\begin{cases} x_2 = -1 + x_3, \\ x_1 = 4 + 3x_3. \end{cases}$$

Полагаем $x_3 = 0$ и находим частное решение:

$$\mathbf{D_{30}} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Подставляем $\mathbf{D_1}, \mathbf{D_{20}}$ и $\mathbf{D_{30}}$ в $\mathbf{Y_3}$ и получаем:

$$\mathbf{Y}_3 = e^x \left[\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{x^2}{2} \right] = e^x \begin{pmatrix} 4 + 3x + 1{,}5x^2 \\ -1 - x + 0{,}5x^2 \\ 0{,}5x^2 \end{pmatrix}.$$

Найденные таким образом решения $\mathbf{Y_1}, \mathbf{Y_2}, \mathbf{Y_3}$ образуют фундаментальную систему и, следовательно, общее решение системы имеет вид:

$$\mathbf{Y} = C_1\mathbf{Y}_1 + C_2\mathbf{Y_2} + C_3\mathbf{Y_3} =$$

$$= C_1 e^x \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^x \left[\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} x \right] + C_3 e^x \left[\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{x^2}{2} \right] =$$

$$= C_1 e^x \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^x \begin{pmatrix} 3 + 3x \\ -1 + x \\ x \end{pmatrix} + C_3 e^x \begin{pmatrix} 4 + 3x + 1{,}5x^2 \\ -1 - x + 0{,}5x^2 \\ 0{,}5x^2 \end{pmatrix}$$

или, более подробно,

$$\begin{cases} y_1 = 3C_1 e^x + C_2 e^x (3 + 3x) + C_3 e^x (4 + 3x + 1{,}5x^2), \\ y_2 = C_1 e^x + C_2 e^x (-1 + x) + C_3 e^x (-1 - x + 0{,}5x^2), \\ y_3 = C_1 e^x + C_2 e^x \cdot x + C_3 e^x \cdot 0{,}5x^2. \end{cases} \diamond$$

в) Пусть $\ell = 3$, $n - r = 2$.

В этом случае матрица $\mathbf{A}$ имеет два линейно независимых собственных вектора $\mathbf{D_1}$ и $\mathbf{D_2}$, относящихся к собственному значению λ и, следовательно, $\mathbf{Y_1} = e^{\lambda x}\mathbf{D_1}$, $\mathbf{Y_2} = e^{\lambda x}\mathbf{D_2}$ – решения системы (21.7). Необходимо найти еще одно решение. Третье решение системы дифференциальных уравнений будем искать в виде

$$\mathbf{Y_3} = e^{\lambda x}(\mathbf{D}_{30} + \mathbf{D}_{31}x).$$

Условия, которым при этом будут удовлетворять $\mathbf{D_{30}}$ и $\mathbf{D_{31}}$, нами получены ранее. А именно, $\mathbf{D_{31}}$ будет собственным вектором матрицы $\mathbf{A}$, относящимся к собственному значению λ; $\mathbf{D_{30}}$ – любое решение системы линейных уравнений $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})\mathbf{X}=\mathbf{D_{31}}$.

В нашем случае размерность собственного подпространства матрицы $\mathbf{A}$ для собственного значения λ равна двум, а в качестве его базиса выбраны $\mathbf{D_1}$ и $\mathbf{D_2}$. Следовательно,

$$\mathbf{D_{31}}=\alpha\,\mathbf{D_1}+\beta\,\mathbf{D_2},$$

где α,β – некоторые числа, ***одновременно не равные нулю***, которые следует выбрать так, чтобы система линейных уравнений $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})\mathbf{X}=\mathbf{D_{31}}$ была совместна.

Замечание. Если $\alpha=\beta=0$, то $\mathbf{D_{31}}=\alpha\,\mathbf{D_1}+\beta\,\mathbf{D_2}=\mathbf{O}$ и, следовательно, $\mathbf{D_{31}}$ не будет собственным вектором.

Таким образом, *если* $\ell=3$ и $n-r=2$, *то рассматриваемая система* (21.7) *имеет решения*

$$\boxed{\mathbf{Y_1}=e^{\lambda x}\mathbf{D_1},\ \ \mathbf{Y_2}=e^{\lambda x}\mathbf{D_2},\ \ \mathbf{Y_3}=e^{\lambda x}(\mathbf{D_{30}}+\mathbf{D_{31}}x),}\qquad(21.12)$$

где $\mathbf{D_1},\mathbf{D_2}$ – *линейно независимые собственные векторы матрицы* $\mathbf{A}$, *относящиеся к собственному значению* λ;

$\mathbf{D_{31}}=\alpha\,\mathbf{D_1}+\beta\,\mathbf{D_2}$, α,β – *числа, одновременно не равные нулю, которые выбираются так, чтобы система линейных уравнений* $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})\mathbf{X}=\mathbf{D_{31}}$ *была совместна*;

$\mathbf{D_{30}}$ – *любое решение системы уравнений* $(\mathbf{A}-\lambda\,\mathbf{E})\mathbf{X}=\mathbf{D_{31}}$.

При этом легко доказать, что найденные таким образом решения $\mathbf{Y_1},\mathbf{Y_2},\mathbf{Y_3}$ будут линейно независимыми.

Замечание. Формулы (21.12) останутся справедливыми и для линейной однородной системы порядка n, так как при их получении не использовался тот факт, что система дифференциальных уравнений третьего порядка.

ПРИМЕР 21.7. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} y_1'=2y_1, \\ y_2'=y_2-y_3, \\ y_3'=y_2+3y_3. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Так как система – линейная однородная с постоянными коэффициентами, то ее общее решение может быть найдено методом Эйлера.

1) Матрица системы:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ее характеристическая матрица:

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\left| \mathbf{A} - \lambda\mathbf{E} \right| = (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = -(\lambda - 2)^3,$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_{1,2,3} = 2.$$

Итак, имеем характеристический корень кратности $\ell = 3$. При этом

$$\mathbf{A} - 2\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 2-2 & 0 & 0 \\ 0 & 1-2 & -1 \\ 0 & 1 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow \ r = rang(\mathbf{A} - 2\mathbf{E}) = 1.$$

Следовательно, $\qquad n - r = 3 - 1 = 2$

и для нахождения решений можно воспользоваться формулами (21.12).

2) Найдем собственные векторы матрицы $\mathbf{A}$, относящиеся к собственному значению $\lambda = 2$. Имеем:

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{E})\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{O},$$

$$\Rightarrow \ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 0 \cdot x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ 0 \cdot x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Выбрав x_3 в качестве зависимой переменной, а x_1, x_2 – свободными, получаем общее решение:

$$x_3 = 0 \cdot x_1 - x_2.$$

Находим фундаментальную систему решений:

$$x_1 = 1,\ x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 0;$$

$$x_1 = 0,\ x_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_3 = -1.$$

$$\Rightarrow \ \mathbf{D_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{D_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Итак, получили, что $\mathbf{D_1}, \mathbf{D_2}$ – линейно независимые собственные векторы матрицы $\mathbf{A}$, относящиеся к собственному значению $\lambda = 2$. Следовательно, решения системы дифференциальных уравнений:

$$\mathbf{Y_1} = e^{2x}\mathbf{D_1} = e^{2x}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y_2} = e^{2x}\mathbf{D_2} = e^{2x}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

3) Третье решение системы уравнений найдем в виде

$$\mathbf{Y_3} = e^{\lambda x}(\mathbf{D}_{30} + \mathbf{D}_{31}x),$$

где $\mathbf{D_{31}} = \alpha\,\mathbf{D_1} + \beta\,\mathbf{D_2}$, α, β – числа, одновременно не равные нулю, которые выбираются так, чтобы система линейных уравнений $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{D_{31}}$ была совместна;

$\mathbf{D_{30}}$ – любое решение системы уравнений $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{D_{31}}$.

Исследуем на совместность систему линейных уравнений $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{X} = \alpha\,\mathbf{D_1} + \beta\,\mathbf{D_2}$. Имеем:

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{E})\mathbf{X} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & -1 & -1\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},$$

$$\alpha\,\mathbf{D_1} + \beta\,\mathbf{D_2} = \alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\-\beta\end{pmatrix};$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & -1 & -1\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\-\beta\end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 0 = \alpha, \\ 0\cdot x_1 - x_2 - x_3 = \beta, \\ 0\cdot x_1 + x_2 + x_3 = -\beta. \end{cases}$$

Система будет совместна при $\alpha = 0$ и $\forall\beta \in \mathbb{R}$. Пусть $\alpha = 0$ и $\beta = -1$. Тогда

$$\mathbf{D_{31}} = 0\cdot\mathbf{D_1} + (-1)\cdot\mathbf{D_2} = -\mathbf{D_2}$$

и система для нахождения $\mathbf{D_{30}}$ имеет вид

$$\begin{cases} 0\cdot x_1 - x_2 - x_3 = -1, \\ 0\cdot x_1 + x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

Выбрав x_3 в качестве зависимой переменной, а x_1, x_2 – свободными, получаем общее решение:

$$x_3 = 1 - 0\cdot x_1 - x_2.$$

Полагаем $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ и находим частное решение:

$$\mathbf{D_{30}} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Подставляем $\mathbf{D_{31}} = -\mathbf{D_2}$ и $\mathbf{D_{30}}$ в $\mathbf{Y_3}$ и получаем:

$$\mathbf{Y}_3 = e^{2x}\left[\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}x\right] = e^{2x}\begin{pmatrix}0\\-x\\1+x\end{pmatrix}.$$

Найденные таким образом решения $\mathbf{Y_1}, \mathbf{Y_2}, \mathbf{Y_3}$ образуют фундаментальную систему и, следовательно, общее решение системы имеет вид:

$$\mathbf{Y} = C_1\mathbf{Y}_1 + C_2\mathbf{Y_2} + C_3\mathbf{Y_3} =$$

$$= C_1 e^{2x}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + C_2 e^{2x}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} + C_3 e^{2x}\left[\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}x\right] =$$

$$= C_1 e^{2x}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + C_2 e^{2x}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} + C_3 e^{2x}\begin{pmatrix}0\\-x\\1+x\end{pmatrix}$$

или, более подробно

$$\begin{cases} y_1 = C_1 e^{2x}, \\ y_2 = C_2 e^{2x} - C_3 x e^{2x}, \\ y_3 = -C_2 e^{2x} + C_3(1+x)e^{2x}. \end{cases} \quad \diamond$$

ПРИМЕР 21.8. Найти общее решение системы $\mathbf{Y}' = \mathbf{AY}$, где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

РЕШЕНИЕ. Так как система – линейная однородная с постоянными коэффициентами, то ее общее решение может быть найдено методом Эйлера.

1) Матрица системы:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ее характеристическая матрица:

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 4-\lambda & -4 & 2 \\ 2 & -2-\lambda & 1 \\ -4 & 4 & -2-\lambda \end{pmatrix}.$$

Тогда $$\left|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}\right| = -\lambda(\lambda^2 + 4\lambda - 4\lambda) = -\lambda^3,$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2,3} = 0.$$

Итак, имеем характеристический корень кратности $\ell = 3$. При этом

$$\mathbf{A} - 0 \cdot \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 4-0 & -4 & 2 \\ 2 & -2-0 & 1 \\ -4 & 4 & -2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow \ r = rang(\mathbf{A} - 0 \cdot \mathbf{E}) = 1.$$

Следовательно,

$$n - r = 3 - 1 = 2$$

и для нахождения решений можно воспользоваться формулами (21.12).

2) Найдем собственный вектор матрицы $\mathbf{A}$, относящийся к собственному значению $\lambda = 0$. Имеем:

$$(\mathbf{A} - 0 \cdot \mathbf{E})\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{O},$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 4x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ -4x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Как уже указывали выше, ранг матрицы системы равен 1 и в качестве базисного минора можно выбрать, например, минор $|1|$. Тогда переменная x_3 будет зависимой, а x_1, x_2 – свободными. Отбрасываем первое и третье уравнение системы и находим общее решение:

$$2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0,$$

$$\Rightarrow \ x_3 = -2x_1 + 2x_2 \ \text{– общее решение.}$$

Фундаментальная система решений состоит из двух решений. Полагая $x_1 = 1, \ \ x_2 = 0$ и $x_1 = 0, \ \ x_2 = 1$, находим их:

$$\mathbf{D_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{D_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Итак, получили, что $\mathbf{D_1}$ и $\mathbf{D}_2$ – собственные векторы матрицы $\mathbf{A}$, относящиеся к собственному значению $\lambda = 0$. Следовательно, решение системы дифференциальных уравнений:

$$\mathbf{Y_1} = e^{0 \cdot x}\mathbf{D_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{Y}_2 = e^{0 \cdot x}\mathbf{D}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3) Третье решение системы уравнений найдем в виде

$$\mathbf{Y_3} = e^{\lambda x}(\mathbf{D}_{30} + \mathbf{D}_{31}x),$$

где $\mathbf{D_{31}} = \alpha\,\mathbf{D_1} + \beta\,\mathbf{D_2}$, α, β – числа, одновременно не равные нулю, которые выбираются так, чтобы система линейных уравнений $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{D_{31}}$ была совместна;

$\mathbf{D_{30}}$ – любое решение системы уравнений $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{D_{31}}$.

Исследуем на совместность систему линейных уравнений $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{X} = \alpha\,\mathbf{D_1} + \beta\,\mathbf{D_2}$. Имеем:

$$(\mathbf{A} - 0\cdot\mathbf{E})\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

$$\alpha\,\mathbf{D_1} + \beta\,\mathbf{D_2} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ -2\alpha + 2\beta \end{pmatrix};$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ -2\alpha + 2\beta \end{pmatrix}.$$

Умножим вторую строку на –2 и 2 и прибавим к первой и третьей строке соответственно. В результате получим систему линейных уравнений:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - 2\beta \\ \beta \\ -2\alpha + 4\beta \end{pmatrix}.$$

Система будет совместна при $\alpha - 2\beta = -2\alpha + 4\beta = 0$, где β – любое действительное число. Пусть

$$\beta = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 2.$$

Тогда
$$\mathbf{D_{31}} = 2\cdot\mathbf{D_1} + \mathbf{D_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

и система для нахождения $\mathbf{D_{30}}$ имеет вид

$$\{2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1,$$

Выбрав x_3 в качестве зависимой переменной, а x_1, x_2 – свободными, получаем общее решение:

$$x_3 = 1 - 2x_1 + 2x_2.$$

Полагаем $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ и находим частное решение:

$$\mathbf{D_{30}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Подставляем $\mathbf{D_{31}} = 2 \cdot \mathbf{D_1} + \mathbf{D_2}$ и $\mathbf{D_{30}}$ в $\mathbf{Y_3}$ и получаем:

$$\mathbf{Y}_3 = e^{0 \cdot x} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} x \right] = \begin{pmatrix} 2x \\ x \\ 1-2x \end{pmatrix}.$$

Найденные таким образом решения $\mathbf{Y_1}, \mathbf{Y_2}, \mathbf{Y_3}$ образуют фундаментальную систему и, следовательно, общее решение системы имеет вид:

$$\mathbf{Y} = C_1 \mathbf{Y}_1 + C_2 \mathbf{Y_2} + C_3 \mathbf{Y_3} =$$

$$= C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_3 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} x \right] = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 2x \\ x \\ 1-2x \end{pmatrix}$$

или, более подробно

$$\begin{cases} y_1 = C_1 + 2C_3 x, \\ y_2 = C_2 + C_3 x, \\ y_3 = -2C_1 + 2C_2 + C_3(1-2x). \end{cases} \qquad \diamond$$

Итак, мы рассмотрели метод Эйлера в трех случаях:

1) характеристические корни матрицы $\mathbf{A}$ действительны и различны;
2) характеристические корни матрицы $\mathbf{A}$ различны, но среди них есть комплексные;
3) характеристические корни матрицы $\mathbf{A}$ действительны, но среди них есть кратные.

Не рассмотренным остался случай, когда среди характеристических корней матрицы $\mathbf{A}$ есть кратные комплексные корни. В этой ситуации алгебраические трудности метода Эйлера возрастают настолько, что лучше использовать другие методы интегрирования.

§ 22. Линейные уравнения с частными производными первого порядка

22.1. Понятие уравнения с частными производными и его интегрирование

Уравнением с частными производными[1] *называется соотношение, связывающее неизвестную функцию нескольких переменных, ее аргументы и ее частные производные. Порядок старшей частной производной, входящей в уравнение, называется* ***порядком уравнения****.*

Функция, обращающая уравнение с частными производными в тождество, называется ***решением*** *этого уравнения. Процесс нахождения решений дифференциального уравнения с частными производными называется* ***интегрированием*** *этого уравнения.*

Так как обыкновенные дифференциальные уравнения можно рассматривать как частный случай уравнения с частными производными, то можно утверждать, что если уравнение с частными производными имеет решение, то решений будет множество.

Для обыкновенных дифференциальных уравнений порядка n вся совокупность решений (за исключением некоторых) представлялась функцией, зависящей от независимой переменной x и n произвольных постоянных C_1, C_2, … , C_n (общим решением)[2]. Для дифференциальных уравнений с частными производными общее решение будет иметь более сложную структуру. Оно тоже будет содержать некоторые произвольные элементы, но это уже будут не константы, а функции. В этом можно убедиться, рассмотрев несколько простых примеров.

ПРИМЕРЫ.

1) Рассмотрим уравнение $F(x, y, z, z'_x) = 0$, где $z = z(x, y)$.

   Это уравнение можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение относительно x, где y – параметр. Общее решение такого уравнения будет иметь вид

$$z = \varphi(x, y, C(y)),$$

   где $C(y)$ – произвольная функция.

---

[1] Или «***уравнением в частных производных***».

[2] Справедливо и обратное. Т. е. для любого семейства функций $y = \varphi(x, C_1, \dots, C_n)$ существует дифференциальное уравнение порядка n, для которого это семейство является общим решением. Оно получается в результате исключения констант $C_1, \dots, C_n$ из системы $\begin{cases} y = \varphi(x, C_1, \dots, C_n), \\ y' = \varphi'(x, C_1, \dots, C_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{(n)} = \varphi^{(n)}(x, C_1, \dots, C_n). \end{cases}$

2) Рассмотрим уравнение $z'_x = z'_y$, где $z = z(x,y)$.

Введем новые переменные по формулам

$$u = x + y, \quad v = x - y.$$

Тогда

$$z(x,y) = f(u,v),$$

$$z'_x = f'_u \cdot \underbrace{u'_x}_{1} + f'_v \cdot \underbrace{v'_x}_{1} = f'_u + f'_v,$$

$$z'_y = f'_u \cdot \underbrace{u'_y}_{1} + f'_v \cdot \underbrace{v'_y}_{-1} = f'_u - f'_v.$$

Из уравнения $z'_x = z'_y$ получаем:

$$f'_u + f'_v = f'_u - f'_v,$$

$$\Rightarrow \quad 2f'_v = 0,$$

$$\Rightarrow \quad f(u,v) = \varphi(u) \quad \text{или} \quad z(x,y) = \varphi(x+y),$$

где $\varphi(x+y)$ – произвольная функция.

3) Рассмотрим уравнение $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$, где $z = z(x,y)$.

Имеем:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0,$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial x} \text{ – не зависит от } y,$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \varphi(x), \text{ где } \varphi(x) \text{ – произвольная функция;}$$

$$\Rightarrow \quad z = \int \varphi(x)dx + \psi(y) = \omega(x) + \psi(y),$$

где $\omega(x), \psi(y)$ – произвольные функции.

4) Рассмотрим уравнение $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$, где $z = z(x,y)$.

Имеем:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0,$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial x} \text{ – не зависит от } x,$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \varphi(y), \text{ где } \varphi(y) \text{ – произвольная функция;}$$

$$\Rightarrow \quad z = \int \varphi(y)dx + \psi(y) = \varphi(y)x + \psi(y),$$

где $\varphi(y), \psi(y)$ – произвольные функции.

Как показывают рассмотренные примеры, уравнение с частными производными имеет множество решений, которые определяются с точностью до некоторой функции. Поэтому, для выбора одного решения необходимо задавать некоторые условия, которым эта функция должна удовлетворять.

Если уравнение можно разрешить относительно старшей частной производной, т. е. записать, например, в виде

$$\frac{\partial^m z}{\partial x_1^m} = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, \frac{\partial^k z}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}, \ldots\right), \tag{22.1}$$

здесь $k_1 + \ldots + k_n = k \le m$ и $k_1 < m$, то обычно полагают, что

$$\boxed{\left.\begin{aligned} z\big|_{x_1 = x_{10}} &= \varphi_0(x_2, \ldots, x_n), \\ \left.\frac{\partial z}{\partial x_1}\right|_{x_1 = x_{10}} &= \varphi_1(x_2, \ldots, x_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left.\frac{\partial^{m-1} z}{\partial x_1^{m-1}}\right|_{x_1 = x_{10}} &= \varphi_{m-1}(x_2, \ldots, x_n), \end{aligned}\right\}} \tag{22.2}$$

где x_{10} – заданное значение, $\varphi_0(x_2, \ldots, x_n)$, …, $\varphi_{m-1}(x_2, \ldots, x_n)$ – заданные функции $n-1$ аргумента. Условия (22.2) называют ***начальными условиями для уравнения*** (22.1), а задача нахождения решения уравнения (22.1), удовлетворяющего начальным условиям (22.2), называется ***задачей Коши***.

В частности, для уравнения первого порядка

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) \tag{22.3}$$

начальное условие будет иметь вид

$$z\big|_{x_1 = x_{10}} = \varphi_0(x_2, \ldots, x_n), \tag{22.4}$$

где x_{10} – заданное значение, $\varphi_0(x_2, \ldots, x_n)$ – заданная функция $n-1$ аргумента.

В случае функции $z = z(x, y)$ задача Коши для уравнения с частными производными первого порядка имеет простой *геометрический смысл*. Действительно, для уравнения $\frac{\partial z}{\partial x} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$ частное решение $z = \varphi(x, y)$ представляет собой некоторую поверхность в пространстве $Oxyz$ (ее называют ***интегральной поверхностью***). Тогда, общее решение – некоторое семейство поверхностей. Начальное условие $z(x=x_0, y)=\varphi_0(y)$ задает в пространстве некоторую кривую $x=x_0$, $z(y)=\varphi_0(y)$. Следовательно, ***задача Коши представляет собой нахождение поверхности, проходящей через заданную кривую.***

Например, если общее решение $z=\varphi(x^2+y^2)$ – семейство поверхностей вращения (*рис. 22.1*), то частным решением будет та поверхность, на которой лежит заданная кривая (начальное условие $z(x=x_0, y)=\varphi_0(y)$). Так на рис 22.1 в качестве начального условия выбрана ветка гиперболы $z(x=x_0, y)=\sqrt{x_0^2+y^2}$ и, следовательно, частным решением является конус, на поверхности которого она лежит.

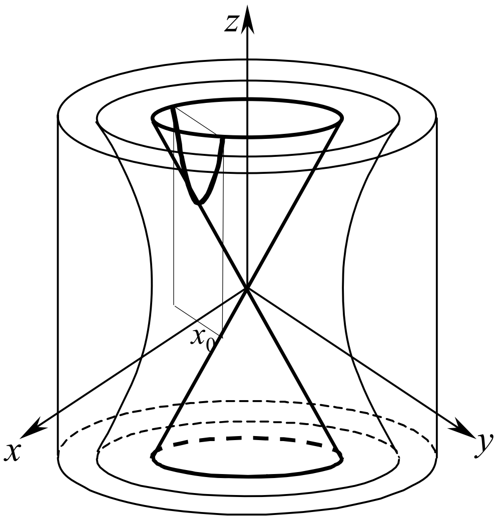

Рис. 22.1.

По аналогии с трехмерным пространством, говорят, что $(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)$ – точка $n+1$-мерного пространства, $z=\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – гиперповерхность (поверхность n измерений) в $n+1$-мерном пространстве, а условие

$$z(x_1, x_2, \ldots, x_n)\big|_{x_1=x_{10}}=\varphi_0(x_2, \ldots, x_n)$$

определяют в $n+1$-мерном пространстве гиперповерхность $n-1$-измерения. Поэтому говорят, что *для дифференциального уравнения с частными производными первого порядка задача Коши в общем случае состоит в нахождении интегральной гиперповерхности, проходящей через заданную гиперповерхность $n-1$-измерения.*

В нашем курсе мы будем рассматривать только линейные уравнения с частными производными первого порядка, поскольку их интегрирование сводится к интегрированию некоторой системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

22.2. Линейные однородные уравнения с частными производными первого порядка

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Линейным однородным уравнением с частными производными первого порядка***[3] называется уравнение вида

$$\boxed{F_1(x_1,\ldots,x_n)\cdot\frac{\partial z}{\partial x_1}+\ldots+F_n(x_1,\ldots,x_n)\cdot\frac{\partial z}{\partial x_n}=0,} \qquad (22.5)$$

где $F_i(x_1,\ldots,x_n)$ – заданные функции, непрерывно дифференцируемые в рассматриваемой области $G\subset\mathbb{R}^n$, $z=z(x_1,\ldots,x_n)$ – неизвестная функция.

Запишем систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида:

$$\boxed{\frac{dx_1}{F_1(x_1,\ldots,x_n)}=\frac{dx_2}{F_2(x_1,\ldots,x_n)}=\ldots=\frac{dx_n}{F_n(x_1,\ldots,x_n)}.} \qquad (22.6)$$

Ее называют ***соответствующей*** уравнению (22.5). Связь между уравнением (22.5) и системой обыкновенных уравнений (22.6) устанавливает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 22.1. *Функция* $z=\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ *является решением уравнения* (22.5) тогда и только тогда, когда $\varphi(x_1,\ldots,x_n)=C$ *является первым интегралом системы* (22.6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Достаточность ($\Leftarrow$). Пусть имеется уравнение

$$\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1})=C. \qquad (22.7)$$

Очевидно, что уравнение (22.7) определяет первый интеграл системы (22.6) тогда и только тогда, когда для любого ее решения $x_1,\ldots,x_{n+1}$

$$\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1})\equiv C.$$

Отсюда
$$d\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1})\equiv 0;$$

$$\Rightarrow\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\frac{\partial\varphi}{\partial x_{n+1}}dx_{n+1}\equiv 0.$$

Но из (22.6) находим: $\quad dx_i=kF_i(x_1,\ldots,x_{n+1})$.

Следовательно,

$$k\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\cdot F_1(x_1,\ldots,x_{n+1})+\ldots+\frac{\partial\varphi}{\partial x_{n+1}}\cdot F_{n+1}(x_1,\ldots,x_{n+1})\right]\equiv 0,$$

$$\Rightarrow\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\cdot F_1(x_1,\ldots,x_{n+1})+\ldots+\frac{\partial\varphi}{\partial x_{n+1}}\cdot F_{n+1}(x_1,\ldots,x_{n+1})\equiv 0. \qquad (22.8)$$

---

[3] или «***линейным однородным уравнением в частных производных первого порядка***»

Таким образом, функция

$$z = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$$

является решение уравнения (22.5).

2) Необходимость ($\Rightarrow$). Легко проверить, что условие (22.8) является не только необходимым, но и достаточным условием того, что уравнение $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = C$ определяет первый интеграл системы дифференциальных уравнений (22.6). Следовательно, если $z = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ – решение уравнения (22.5), то уравнение $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = C$ определяет первый интеграл системы (22.6). ■

Пусть найдена система независимых[4] первых интегралов системы дифференциальных уравнений (22.15), образующих ее общий интеграл:

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, \ldots, x_n) = C_1, \\ \varphi_2(x_1, \ldots, x_n) = C_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_{n-1}(x_1, \ldots, x_n) = C_{n-1}. \end{cases}$$

По теореме 22.1 функции $\varphi_i(x_1, \ldots, x_n)$ $(i = \overline{1, n-1})$ являются решениями уравнения (22.5), причем справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 22.2. *Если* $\varphi_i(x_1, \ldots, x_n) = C_i$ $(i = \overline{1, n-1})$ *– независимые первые интегралы системы* (22.6) *и* Φ *– произвольная непрерывно дифференцируемая функция* $n-1$ *аргумента, то* $z = \Phi(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$ *– общее решение уравнения* (22.5).

ПРИМЕР 22.1. Найти общее решение уравнения

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

РЕШЕНИЕ. Данное уравнение – линейное однородное. Искомая функция $u = u(x, y, z)$. Соответствующая система обыкновенных дифференциальных уравнений имеет вид

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}.$$

Из равенства первой и третьей дроби получим один первый интеграл системы:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z},$$

[4] т. е. ни один из них не следует из остальных.

$$\Rightarrow\quad \ln|z| = \ln|x| + \ln C_1 \qquad \text{или} \qquad \frac{z}{x} = C_1.$$

Из равенства второй и третьей дроби получим другой первый интеграл системы:

$$\frac{dx}{y} = \frac{dz}{z},$$

$$\Rightarrow\quad \ln|z| = \ln|y| + \ln C_2 \qquad \text{или} \qquad \frac{z}{y} = C_2.$$

Первые интегралы $\frac{z}{x} = C_1$ и $\frac{z}{y} = C_2$ независимы и образуют общий интеграл системы дифференциальных уравнений. Следовательно, общее решение однородного дифференциального уравнения в частных производных имеет вид

$$u = \Phi\left(\frac{z}{x}; \frac{z}{y}\right). \quad \diamond$$

Теперь покажем, как найти решение задачи Коши для линейного однородного уравнения с частными производными первого порядка.

Пусть дано уравнение

$$F_1(x_1, \ldots, x_n) \cdot \frac{\partial z}{\partial x_1} + \ldots + F_n(x_1, \ldots, x_n) \cdot \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0, \tag{22.5}$$

где $F_i(x_1, \ldots, x_n)$ – заданные функции, непрерывно дифференцируемые в рассматриваемой области $G \subset \mathbb{R}^n$, $z = z(x_1, \ldots, x_n)$ – неизвестная функция. Требуется найти его решение, удовлетворяющее условию

$$z(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = x_{n0}) = \Phi_0(x_1, \ldots, x_{n-1}),$$

где $\Phi_0(x_1, \ldots, x_{n-1})$ – заданная функция $n-1$ аргумента.

Найдем систему независимых первых интегралов системы дифференциальных уравнений (22.6), образующих ее общий интеграл:

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, \ldots, x_n) = C_1, \\ \varphi_2(x_1, \ldots, x_n) = C_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_{n-1}(x_1, \ldots, x_n) = C_{n-1}. \end{cases}$$

Обозначим

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_{n0}) = \overline{\varphi}_1, \\ \varphi_2(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_{n0}) = \overline{\varphi}_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_{n0}) = \overline{\varphi}_{n-1}. \end{cases} \tag{22.9}$$

Разрешим (22.9) относительно $x_1, \ldots, x_{n-1}$ (это всегда можно сделать в окрестности точки $M_0(x_{10}, x_{20} \ldots, x_{n0})$, такой что $F_i(M_0) \neq 0$). Получим:

$$\begin{cases} x_1 = \omega_1(\overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2, \ldots, \overline{\varphi}_{n-1}), \\ x_2 = \omega_2(\overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2, \ldots, \overline{\varphi}_{n-1}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} = \omega_{n-1}(\overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2, \ldots, \overline{\varphi}_{n-1}). \end{cases} \tag{22.10}$$

Тогда решение уравнения (22.5), удовлетворяющее условию

$$z(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = x_{n0}) = \Phi_0(x_1, \ldots, x_{n-1}),$$

будет иметь вид

$$\boxed{z = \Phi_0[\omega_1(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}), \omega_2(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}), \ldots, \omega_{n-1}(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})].} \tag{22.11}$$

Действительно, в силу теоремы 2, функция (22.11) определяет решение уравнения (22.5). А при $x_n = x_{n0}$ имеем

$$z(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = x_{n0}) =$$

$$\Phi_0(\omega_1(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}), \ldots, \omega_{n-1}(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}))\big|_{x_n = x_{n0}} =$$

$$= \Phi_0\left(\omega_1\Big(\underbrace{\varphi_1\big|_{x_n = x_{n0}}}_{\overline{\varphi}_1}, \ldots, \underbrace{\varphi_{n-1}\big|_{x_n = x_{n0}}}_{\overline{\varphi}_{n-1}}\Big), \ldots, \omega_{n-1}\Big(\underbrace{\varphi_1\big|_{x_n = x_{n0}}}_{\overline{\varphi}_1}, \ldots, \underbrace{\varphi_{n-1}\big|_{x_n = x_{n0}}}_{\overline{\varphi}_{n-1}}\Big) \right) =$$

$$= \Phi_0\left(\underbrace{\omega_1(\overline{\varphi}_1, \ldots, \overline{\varphi}_{n-1})}_{x_1}, \ldots, \underbrace{\omega_{n-1}(\overline{\varphi}_1, \ldots, \overline{\varphi}_{n-1})}_{x_{n-1}} \right) =$$

$$= \Phi_0(x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

Замечание. Алгоритм нахождения решения задачи Коши показывает, что решение начальными данными определяется однозначно.

ПРИМЕР 22.2. Найти решение уравнения $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{z}{2}\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$, удовлетворяющее начальному условию $u(1, y, z) = y + z^2$.

РЕШЕНИЕ. 1) Данное уравнение – линейное однородное. Искомая функция $u = u(x, y, z)$. Соответствующая система обыкновенных дифференциальных уравнений имеет вид

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z/2}.$$

Из равенства 1-й и 3-й дроби получим один первый интеграл системы:

$$\frac{dx}{x} = \frac{2dz}{z},$$

$$\Rightarrow \quad 2\ln|z| = \ln|x| + \ln C_1 \quad \text{или} \quad \frac{z^2}{x} = C_1.$$

Из равенства 2-й и 3-й дроби получим другой первый интеграл:

$$\frac{dx}{y} = \frac{2dz}{z},$$

$$\Rightarrow \quad 2\ln|z| = \ln|y| + \ln C_2 \quad \text{или} \quad \frac{z^2}{y} = C_2.$$

Первые интегралы $\frac{z^2}{x} = C_1$ и $\frac{z^2}{y} = C_2$ независимы и образуют общий интеграл системы дифференциальных уравнений. Следовательно, общее решение линейного однородного дифференциального уравнения в частных производных имеет вид

$$u = \Phi\left(\frac{z^2}{x}; \frac{z^2}{y}\right).$$

2) Имеем: $\qquad \varphi_1(x,y,z) = \frac{z^2}{x}, \quad \varphi_2(x,y,z) = \frac{z^2}{y}.$

Тогда $\qquad \overline{\varphi}_1 = \varphi_1(1,y,z) = z^2, \quad \overline{\varphi}_2 = \varphi_2(1,y,z) = \frac{z^2}{y}.$

$$\Rightarrow \quad z = \pm\sqrt{\overline{\varphi}_1}, \qquad y = \frac{z^2}{\overline{\varphi}_2} = \frac{\overline{\varphi}_1}{\overline{\varphi}_2}.$$

Подставляя найденные выражения для y и z в начальное условие и «теряя черточки», получаем искомое частное решение:

$$u(x,y,z) = \frac{\varphi_1}{\varphi_2} + \left(\pm\sqrt{\varphi_1}\right)^2 = \frac{\varphi_1}{\varphi_2} + \varphi_1 = \frac{z^2/x}{z^2/y} + \frac{z^2}{x},$$

$$\Rightarrow \quad u(x,y,z) = \frac{y}{x} + \frac{z^2}{x}. \ \diamond$$

ПРИМЕР 22.3. Найти решение уравнения $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, удовлетворяющее начальному условию $z(x,0) = x - 1$.

РЕШЕНИЕ. 1) Данное уравнение – линейное однородное. Искомая функция $z = z(x,y)$. Соответствующая система обыкновенных дифференциальных уравнений имеет вид

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x}.$$

Она имеет единственный первый интеграл (общий интеграл дифференциального уравнения):

$$-xdx = ydy,$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C \quad \text{или} \quad y^2 + x^2 = C.$$

Следовательно, общее решение дифференциального уравнения в частных производных имеет вид

$$z = \Phi\left(y^2 + x^2\right).$$

С геометрической точки зрения, общее решение представляет собой всевозможные поверхности вращения с осью Oz.

2) Имеем: $\qquad \varphi(x, y) = y^2 + x^2.$

Тогда $\qquad \overline{\varphi} = \varphi(x, 0) = x^2,$

$$\Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{\overline{\varphi}}.$$

Подставляя найденное выражения для x в начальное условие и «теряя черточку», получаем искомое частное решение:

$$z(x, y) = \pm\sqrt{\varphi} - 1 = \pm\sqrt{x^2 + y^2} - 1.$$

С геометрической точки зрения, это частное решение представляет собой конус $(z+1)^2 = x^2 + y^2$, т.е. поверхность вращения, проходящую через прямую

$$\begin{cases} y = 0, \\ z = x - 1. \end{cases} \quad \diamond$$

22.3. Линейные неоднородные уравнения с частными производными первого порядка

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Линейным неоднородным уравнением с частными производными первого порядка*** называется уравнение вида

$$F_1(x_1, \ldots, x_n, z) \cdot \frac{\partial z}{\partial x_1} + \ldots + F_n(x_1, \ldots, x_n, z) \cdot \frac{\partial z}{\partial x_n} = P(x_1, \ldots, x_n, z), \quad (22.12)$$

где $F_i(x_1, \ldots, x_n, z)$, $P(x_1, \ldots, x_n, z)$ – заданные функции, непрерывно дифференцируемые в рассматриваемой области $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $z = z(x_1, \ldots, x_n)$ – неизвестная функция.

Интегрирование уравнения (22.12) сводится к интегрированию некоторого линейного однородного уравнения с частными производными первого порядка. Действительно, предположим, что уравнение

$$u(x_1, \ldots, x_n, z) = 0 \quad (22.13)$$

задает в неявном виде решение уравнения (22.12). Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = -\frac{u'_{x_i}}{u'_z}$$

и из уравнения (22.12) находим:

$$F_1(x_1,\ldots,x_n,z)\cdot\left(-\frac{u'_{x_1}}{u'_z}\right)+\ldots+F_n(x_1,\ldots,x_n,z)\cdot\left(-\frac{u'_{x_n}}{u'_z}\right)=P(x_1,\ldots,x_n,z),$$

$$F_1(x_1,\ldots,x_n,z)\cdot\left(-u'_{x_1}\right)+\ldots+F_n(x_1,\ldots,x_n,z)\cdot\left(-u'_{x_n}\right)=P(x_1,\ldots,x_n,z)\cdot u'_z.$$

$$F_1(x_1,\ldots,x_n,z)\cdot\frac{\partial u}{\partial x_1}+\ldots+F_n(x_1,\ldots,x_n,z)\cdot\frac{\partial u}{\partial x_n}+P(x_1,\ldots,x_n,z)\cdot\frac{\partial u}{\partial z}=0. \quad (22.14)$$

Уравнение (22.14) – линейное однородное первого порядка, в котором искомая функция u зависит от $n+1$ переменной $x_1,\ldots,x_n,z$. Соответствующая ему система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{F_1(x_1,\ldots,x_n,z)}=\ldots=\frac{dx_n}{F_n(x_1,\ldots,x_n,z)}=\frac{dz}{P(x_1,\ldots,x_n,u)} \quad (22.15)$$

имеет n независимых первых интегралов

$$\varphi_1(x_1,\ldots,x_n,z)=C_1,\quad \ldots,\quad \varphi_n(x_1,\ldots,x_n,z)=C_n$$

и, следовательно, общее решение уравнения (22.14) будет иметь вид

$$u=\Phi(\varphi_1,\ldots,\varphi_n).$$

Но тогда уравнение $\Phi(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)=0$ будет определять в неявном виде общее решение (22.12).

Замечание. На практике, при интегрировании линейных неоднородных уравнений с частными производными первого порядка, уравнение (22.14) обычно не записывают. Записывают сразу его соответствующую систему (22.15).

ПРИМЕР 22.4. Найти общее решение уравнения

$$(1+\sqrt{z-x-y})\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=2.$$

РЕШЕНИЕ. Данное уравнение – линейное неоднородное. Искомая функция $z=z(x,y)$. Соответствующая система обыкновенных дифференциальных уравнений имеет вид

$$\frac{dx}{1+\sqrt{z-x-y}}=\frac{dy}{1}=\frac{dz}{2}.$$

Из равенства 2-й и 3-й дроби получим один первый интеграл системы:

$$\frac{dy}{1}=\frac{dz}{2},$$

$$\Rightarrow\ 0{,}5z=y+C_1 \quad \text{или} \quad z-2y=C_1.$$

Другой первый интеграл системы получим, используя свойства равных дробей:

$$\frac{dy}{1} = \frac{dz - dx - dy}{2 - (1 + \sqrt{z - x - y}) - 1},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{1} = \frac{d(z - x - y)}{\sqrt{z - x - y}},$$

$$\Rightarrow \quad y - 2\sqrt{z - x - y} = C_2.$$

Первые интегралы $z - 2y = C_1$ и $y - 2\sqrt{z - x - y} = C_2$ независимы и образуют общий интеграл системы дифференциальных уравнений. Следовательно, общее решение неоднородного дифференциального уравнения в частных производных имеет вид

$$\Phi\left(z - 2y; y - 2\sqrt{z - x - y}\right) = 0. \ \diamond$$

ПРИМЕР 22.5. Найти решение уравнения $x\frac{\partial z}{\partial x} - 2y\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + y^2$, удовлетворяющее начальному условию $z(x,1) = x^2$.

РЕШЕНИЕ. 1) Данное уравнение – линейное неоднородное. Искомая функция $z = z(x, y)$. Соответствующая система обыкновенных дифференциальных уравнений имеет вид

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-2y} = \frac{dz}{x^2 + y^2}.$$

Из равенства 1-й и 2-й дроби получим один первый интеграл системы:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-2y},$$

$$\Rightarrow \quad 2\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y},$$

$$\Rightarrow \quad 2\ln|x| = -\ln|y| + \ln C_1 \qquad \text{или} \qquad x^2 y = C_1.$$

Другой первый интеграл системы получим, используя свойства равных дробей:

$$\frac{xdx}{x^2} = \frac{-0{,}5ydy}{y^2} = \frac{dz}{x^2 + y^2},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{xdx - 0{,}5ydy}{x^2 + y^2} = \frac{dz}{x^2 + y^2},$$

$$\Rightarrow\quad xdx-0{,}5ydy=dz \quad \text{или} \quad d\left(z-\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}\right)=0,$$

$$\Rightarrow\quad z-\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=C_2.$$

Первые интегралы $x^2y=C_1$ и $z-\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=C_2$ независимы и образуют общий интеграл системы дифференциальных уравнений. Следовательно, общее решение неоднородного дифференциального уравнения в частных производных имеет вид

$$\Phi\left(x^2y; z-\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}\right)=0.$$

Разрешая это уравнение относительно второй переменной, получим общее решение неоднородного уравнения в явном виде:

$$z-\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=f(x^2y),$$

$$\Rightarrow\quad z=f(x^2y)+\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{4}.$$

2) Найдем искомое частное решение. Имеем:

$$\varphi_1(x,y,z)=x^2y,\qquad \varphi_2(x,y,z)=z-\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}.$$

Тогда $$\overline{\varphi}_1=\varphi_1(x,1,z)=x^2,\quad \overline{\varphi}_2=\varphi_2(x,1,z)=z-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{4}.$$

$$\Rightarrow\quad x=\pm\sqrt{\overline{\varphi}_1},\qquad z=\overline{\varphi}_2+\frac{x^2}{2}-\frac{1}{4}=\overline{\varphi}_2+\frac{\overline{\varphi}_1}{2}-\frac{1}{4}.$$

Подставляя найденные выражения для x и z в начальное условие $z(x,1)=x^2$ и «теряя черточки», получаем искомое частное решение:

$$\varphi_2+\frac{\varphi_1}{2}-\frac{1}{4}=\left(\pm\sqrt{\varphi_1}\right)^2,$$

$$\Rightarrow\quad \varphi_2+\frac{\varphi_1}{2}-\frac{1}{4}=\varphi_1 \quad \text{или} \quad \varphi_2-\frac{\varphi_1}{2}-\frac{1}{4}=0,$$

$$\Rightarrow\quad z-\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}-\frac{x^2y}{2}-\frac{1}{4}=0,$$

$$\Rightarrow\quad z=\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{4}+\frac{x^2y}{2}+\frac{1}{4}.\diamond$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Краснов М.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения: учебное пособие / Краснов М. Л. – М.: Высшая школа, 1983. – 128 с.
2. Краснов М.Л. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям: учебное пособие / Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 1978. – 287 с.
3. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям : учебное пособие / Филиппов А. Ф. – 2-е изд. – М.: Изд-во ЛКИ, 2008. – 240 с.
4. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений: учебник для вузов / Степанов В. В. – 9-е изд., стер. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 472 с.
5. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений: учебник / Матвеев Н. М. – 3-е изд., испр. и доп. – М.: Высшая школа, 1967. – 564 с.
6. Барышева В.К. Обыкновенные дифференциальные уравнения (часть 1, 2): учебное пособие / Барышева В.К., Ивлев Е.Т., Имас О.Н., Пахомова Е.Г. – Томск: Изд-во ТПУ, 2003. – 112 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

ИМАС Ольга Николаевна
ПАХОМОВА Елена Григорьевна
РОЖКОВА Светлана Владимировна
УСТИНОВА Ирина Георгиевна

ЛЕКЦИИ ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

Учебное пособие

Издано в авторской редакции

Научный редактор *доктор физико-математических наук*, *профессор С.В. Рожкова*
Компьютерная верстка *О.Н. Имас*
Дизайн обложки _______________

Отпечатано в Издательстве ТПУ в полном соответствии с качеством предоставленного оригинал-макета

Подписано к печати Формат 60x84/16. Бумага «Снегурочка».
Печать XEROX. Усл.печ.л. . Уч.-изд.л. .
Заказ . Тираж 100 экз.

Национальный исследовательский Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Томского политехнического университета сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту ISO 9001:2008

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30
Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru