

Домашнее задание по теме: «Интегрирование линейных неоднородных систем ДУ»

Решить системы методом вариации постоянных:

$$1) \begin{cases} u' = u - v + \cos^{-1} x, \\ v' = 2u - v. \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \cos x \\ \cos x + \sin x \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin x \\ \sin x - \cos x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \cdot [\cos x + \sin x] + \ln |\cos x| \cdot [\cos x - \sin x] \\ 2x \sin x + 2 \cos x \ln |\cos x| \end{pmatrix}.$$

$$2) \begin{cases} u' = 3u - 2v, \\ v' = 2u - v + 15e^x \sqrt{x}. \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = C_1 e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^x \begin{pmatrix} 0,5 + x \\ x \end{pmatrix} + e^x \begin{pmatrix} -8x^{5/2} \\ 10x^{3/2} - 8x^{5/2} \end{pmatrix}.$$

Используя теорему о структуре общего решения неоднородной системы, найти решение системы:

$$3) \begin{cases} u' = -5u - v, \\ v' = u - 3v - 9e^{2x}. \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = C_1 e^{-4x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-4x} \begin{pmatrix} x-1 \\ -x \end{pmatrix} + \frac{1}{4} e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

$$4) \begin{cases} u' = -3u - 3v + x + 1, \\ v' = 6u + 6v + 2x. \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{3x} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x^2 + 3x - 2/3 \\ -2x^2 - 4x \end{pmatrix}.$$