Математический анализ
Раздел: вариационное исчисление

Тема: ***Нормированное и метрическое пространство. Функционал. Первое определение вариации функционала***

Лектор Пахомова Е.Г.

2014 г.

Тема: Вариационное исчисление

Вариационное исчисление – раздел математики, посвященный исследованию методов отыскания экстремумов функционалов, зависящих от выбора одной или нескольких функций при разного рода ограничениях (интегральных, дифференциальных и т.п.), накладываемых на эти функции.

§7. Задачи, приведшие к возникновению вариационного исчисления

1. Задача о геодезических;
2. Задача о брахистохроне;
3. Задача о наименьшей площади поверхности вращения;
4. Изопериметрическая задача.

Вывод: во всех приведенных задачах требуется найти гладкую кривую, удовлетворяющую заданным условиям и такую, что

$$\int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')dx$$

достигает наибольшего (наименьшего значения).

§8. Линейное нормированное пространство. Метрическое пространство

Пусть L – линейное пространство над $\mathbf{F}$ ($\mathbf{F} = \mathbb{R}$ или $\mathbf{F} = \mathbb{C}$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

Нормой *в векторном пространстве* L *называется отображение* $L \to \mathbb{R}$, $x \to \| x \|$, *удовлетворяющее условиям*:

1) $\| x \| \geq 0, \quad \forall x \in L;$

   $\| x \| = 0 \;\Leftrightarrow\; x = o;$

2) $\| \lambda x \| = |\lambda| \cdot \| x \|, \;\; \forall x \in L, \;\; \forall \lambda \in \mathbf{F};$

3) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|, \;\; \forall x, y \in L$ (аксиома треугольника).

Число $\| x \|$ называется ***нормой элемента*** x.

Линейное пространство, на котором определена норма, называется ***нормированным***.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

Метрикой (***расстоянием***) *на множестве* X *называется функция* $X \times X \to [0; +\infty)$, $(x,y) \to \rho(x,y)$, *удовлетворяющая условиям*:

1) $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (аксиома тождества);

2) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$, $\forall x,y \in X$ (аксиома симметрии);

3) $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$, $\forall x,y,z \in X$ (аксиома треугольника).

Множество X, на котором может быть введена метрика, называется ***метризуемым***.

Множество X, наделенное некоторой метрикой, называется ***метрическим пространством***.

ЛЕММА 1.

Любое нормированное линейное пространство метризуемо.

Расстояние на нем определяется формулой: $\rho(x,y) = \| x - y \|$.

ПРИМЕРЫ.

1) $\mathbb{R}^n$

Пусть $a = (\alpha_1; \alpha_2; \ldots; \alpha_n)$, $b = (\beta_1; \beta_2; \ldots; \beta_n)$.

Тогда $$\| a \| = \sqrt{(\alpha_1)^2 + (\alpha_2)^2 + \ldots + (\alpha_n)^2},$$

$$\Rightarrow \quad \rho(a,b) = \| a - b \| = \sqrt{(\alpha_1 - \beta_1)^2 + (\alpha_2 - \beta_2)^2 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n)^2}.$$

2) $C[a;b]$.

Пусть $f(x), g(x) \in C[a;b]$.

Тогда $$\| f(x) \| = \max_{a \le x \le b} | f(x) |,$$

$$\Rightarrow \quad \rho(f(x), g(x)) = \| f(x) - g(x) \| = \max_{a \le x \le b} | f(x) - g(x) |.$$

3) Пусть $C_1[a;b]$ – множество непрерывно дифференцируемых на $[a;b]$ функций.

$C_1[a;b]$ – линейное пространство над $\mathbb{R}$, причем

$$C_1[a;b] < C\,[a;b].$$

Пусть $f(x), g(x) \in C_1[a;b]$.

Тогда
$$\| f(x) \| = \max_{a \le x \le b} \{ | f(x) |, | f'(x) | \},$$

$$\Rightarrow \quad \rho(f(x), g(x)) = \| f(x) - g(x) \| =$$

$$= \max_{a \le x \le b} \Big\{ | f(x) - g(x) |, | f'(x) - g'(x) | \Big\}.$$

4) Пусть $C_n[a;b]$ – множество n раз непрерывно дифференцируемых на $[a;b]$ функций.

$C_{\mathrm{n}}[a;b]$ – линейное пространство над $\mathbb{R}$, причем

$$C_n[a;b] < C_{n-1}[a;b] < \ldots < C\,[a;b].$$

Пусть $f(x), g(x) \in C_n[a;b]$.

Тогда $$\| f(x) \| = \max_{a \le x \le b} \left\{ | f(x) |, | f'(x) |, \ldots, \left| f^{(n)}(x) \right| \right\},$$

$$\Rightarrow \quad \rho(f(x), g(x)) = \| f(x) - g(x) \| =$$

$$= \max_{a \le x \le b} \left\{ | f(x) - g(x) |, | f'(x) - g'(x) |, \ldots, \left| f^{(n)}(x) - g^{(n)}(x) \right| \right\}.$$

Расстояние между функциями $y_1(x), y_2(x) \in C_n[a;b]$ называют ***расстоянием n-го порядка*** ($n = 1, 2, \ldots$).
ОБОЗНАЧАЮТ: $\rho_n(y_1(x), y_2(x))$.

Расстояние между функциями $y_1(x), y_2(x) \in C\,[a;b]$ является ***расстоянием нулевого порядка***.

§3. Функционалы в линейных нормированных пространствах

ОПРЕДЕЛЕНИЕ функционала (в вариационном исчислении).

Пусть M – линейное нормированное пространство функций (*или его подмножество*).

*Функция $M \to \mathbb{R}$ называется **функционалом***.

Множество M называют ***областью задания функционала***.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

Пусть $f(x) \in C_n[a;b]$, $\varepsilon > 0$.

ε-окрестностью n-го порядка кривой $y = f(x)$ *называется совокупность кривых* $\varphi_i(x) \in C_n[a;b]$ *таких, что*

$$\rho_n(f(x), \varphi_i(x)) < \varepsilon.$$

ε-окрестность нулевого порядка называется ***сильной ε-окрестностью*** функции $f(x)$.

Сильная ε-окрестность кривой $y = f(x)$ состоит из кривых, расположенных в ε-полоске кривой $y = f(x)$.

ε-окрестность первого порядка называется ***слабой ε-окрестностью*** функции $f(x)$.

ε-окрестность n-го порядка кривой $f(x)$ будем обозначать $U_n(f(x),\varepsilon)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

Пусть $Л[y(x)]$ *– функционал с областью задания* $C_n[a;b]$.

$Л[y(x)]$ *называется* ***непрерывным на (при)*** $\boldsymbol{y_0(x) \in C_n[a;b]}$ ***в смысле близости n -го порядка,*** *если* $\forall \varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$ *такое, что*

$$\forall y(x) \in U_n(y_0(x),\delta),\ y(x) \in C_n[a;b]$$

выполняется неравенство $|Л[y(x)] - Л[y_0(x)]| < \varepsilon$.

Функционал $Л[y(x)]$ непрерывный на $\forall y_0(x) \in C_n[a;b]$, называют ***непрерывным на*** $C_n[a;b]$.

Функционал, не являющийся непрерывным в смысле близости n-го порядка, будем называть ***разрывным*** в смысле указанной близости.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

Пусть M – *линейное нормированное пространство функций*,

$$L : M \to \mathbb{R} .$$

Функционал $L[y(x)]$ *называется* ***линейным***, *если он удовлетворяет условиям*:

1) $L[c \cdot y(x)] = c \cdot L[y(x)],\ \ \forall c \in \mathbb{R},\ \ \forall y(x) \in M;$

2) $L[y_1(x) + y_2(x)] = L[y_1(x)] + L[y_2(x)],\ \ \forall y_1(x), y_2(x) \in M.$

§4. Вариация функционала

1. Первое определение вариации функционала

Пусть $J[y(x)]$ задан на множестве функций M.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

Приращением функционала $J[y(x)]$, *отвечающим приращению аргумента* $\delta y(x)$, *называется величина*

$$\Delta J[y(x)] = J[y(x) + \delta y(x)] - J[y(x)],$$

где $\delta y(x) = \tilde{y}(x) - y(x)$, $\tilde{y}(x), y(x) \in M$.

Функция $\delta y(x)$ называется ***вариацией кривой***.

Рассмотрим $\Delta J[y(x)]$.
Если $y(x)$ фиксирована, то $\Delta J[y(x)]$ – функционал от $\delta y(x)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.

Если приращение $\Delta J[y(x)]$ *можно представить в виде*

$$\Delta J[y(x)] = L[y(x), \delta y(x)] + \beta(y(x), \delta y(x)) \cdot \| \delta y(x) \|,$$

где $L[y(x), \delta y(x)]$ *– линейный относительно* $\delta y(x)$ *функционал,*

$$\beta(y(x), \delta y(x)) \to 0 \quad \textit{при} \quad \| \delta y(x) \| \to 0,$$

то $J[y(x)]$ *называется* ***дифференцируемым на*** $y(x)$.

При этом, линейная относительно $\delta y(x)$ часть $\Delta J[y(x)]$ (т.е. $L[y(x), \delta y(x)]$), называется ***дифференциалом*** или ***вариацией функционала***.

ОБОЗНАЧАЮТ: δJ, $\delta J[y, \delta y]$.

ЛЕММА 1.

Пусть $L[y(x)]$ – *линейный функционал и*

$$\frac{L[y(x)]}{\| y(x) \|} \to 0 \quad \textit{при} \quad \| y \| \to 0.$$

Тогда $L[y(x)] \equiv 0.$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

ТЕОРЕМА 2.

Вариация функционала δJ (*если она существует*) *определена единственным образом*.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО